



INTRODUCTION A LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

PARTIE 2

Guilhem MOLLON

*Polytech Grenoble
Département Géotechnique, Troisième année
Edition 1, 2012-2013*

Table des matières

Table des matières	2
Avertissement au lecteur	4
Séance 7. Elasticité	5
A. Généralités sur les lois de comportement	5
1. Rappels	5
2. Définitions	6
B. Le modèle élastique linéaire isotrope	7
1. Définition mathématique	7
2. Paramètres usuels	9
C. Elasticité en sollicitations simples	11
1. Contrainte uniaxiale	11
2. Cisaillement simple	12
3. Compression hydrostatique	14
D. Thermoélasticité	15
Séance 8. Le problème élastique	17
A. Equations constitutives du problème	17
1. Equations cinématiques	18
2. Equations d'équilibre	18
3. Modèle de comportement	19
B. Résolution du problème élastique	20
1. Formulation en contraintes	20
2. Formulation en déplacement	21
3. Théorème de superposition	22
4. Contraintes et déformations planes	24
Séance 9. Elastoplasticité	26
A. Comportement des matériaux réels	26
1. Observations expérimentales	26
2. Notion de limite élastique	28
3. Représentation graphique d'un critère de plasticité.	29
B. Exemples de critères de plasticité	32
1. Critère de Rankine	33
2. Critère de Tresca	34
3. Critère de Von Mises	35
4. Critère de Mohr-Coulomb	36
Séance 10. Comportement des liquides	38
A. Généralités sur les liquides	38
1. Introduction à la mécanique des fluides	38
2. Le fluide parfait	38
3. Notion de viscosité	39

B. Application du PFD à un liquide	42
1. Contraintes dans un liquide	42
2. Conservation de la quantité de mouvement	43
3. Equation de Navier-Stokes	44
C. Théorème de Bernoulli	46
1. Forme générale	46
2. Cas particuliers	48
Séance 11. Techniques de résolution	50
A. Méthode des différences finies	50
1. Principes	50
2. Discrétisation des dimensions	51
3. Discrétisation des EDP	52
B. Méthode des éléments finis	55
1. Formulations forte et faible	55
2. Méthode de minimisation de Galerkin	57
3. Introduction aux éléments finis	59
C. Méthode des éléments discrets	63
1. Principes de la modélisation discrète	64
2. Algorithme principal	66
3. Versions améliorées de la méthode	67

Avertissement au lecteur

Ce polycopié est un support aux cours de mécanique des milieux continus du département Géotechnique de Polytech Grenoble. Il ne peut pas être considéré comme complet ou exhaustif, et pourra seulement servir de complément aux cours magistraux et d'aide-mémoire. Il introduit les concepts de base, leur signification et leur utilisation, mais ne s'attarde pas sur les démonstrations ni sur les parties les plus complexes de la théorie. Pour une approche plus rigoureuse et plus complète, il est vivement recommandé de se procurer l'un des innombrables ouvrages de MMC disponibles à la bibliothèque universitaire (ou chez tout bon libraire scientifique), ou de chercher un cours sur le net (il y en a beaucoup).

La partie 1 du cours (à peu près 6 séances), développe la partie la plus abstraite de la théorie, en présentant les différentes grandeurs qui caractérisent d'une part les déformations d'un système mécanique, et d'autre part les efforts intérieurs et extérieurs présents dans ce système, sans développer de lien entre ces déformations et ces efforts. Cette tâche sera dévolue à la partie 2 du cours (6 séances également), qui introduira la notion de modèle de comportement et présentera quelques exemples fondamentaux de comportements solides et liquides. Cette seconde partie s'intéressera aussi brièvement aux méthodes de résolution d'un problème concret.

Séance 7. Elasticité

A. Généralités sur les lois de comportement

1. Rappels

Dans les premières séances de ce cours, on a présenté les grands principes de la mécanique des milieux continus : cinématique et déformation d'un milieu, hypothèse des petites déformations, loi de conservation de la masse, principe fondamental de la dynamique, notion de contraintes.

On a en particulier défini deux objets fondamentaux : le tenseur des déformations linéarisées $\bar{\bar{\epsilon}}$ et le tenseur des contraintes de Cauchy $\bar{\bar{\sigma}}$. En revanche, on n'a encore jamais défini une quelconque relation entre ces deux objets, car on est resté sur le cas général du milieu continu sans jamais s'intéresser à un matériau en particulier.

On rappelle que le tenseur des déformations linéarisées possède une base propre $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ nommé base principale de déformation, dans laquelle sa matrice est diagonale, les termes diagonaux étant appelés déformations principales :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Ces déformations principales permettent de calculer l'allongement dans les trois directions principales. Si un des vecteurs principaux \vec{b}_i est transformé en \vec{b}'_i , on peut écrire :

$$\vec{b}'_i = (\varepsilon_i + 1)\vec{b}_i \quad (7.2)$$

Par ailleurs, les angles droits existant entre les directions principales prises deux à deux restent droits au cours de la déformation, et on peut donc dire que le glissement entre deux directions principales est nulle.

De la même manière, on rappelle que le tenseur de Cauchy possède également une base propre $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ nommée base principale de contraintes, dans laquelle sa matrice est diagonale, les termes diagonaux étant appelés contraintes principales :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Dans cette base propre, la contrainte pour une direction principale est colinéaire au vecteur propre correspondant. Autrement dit, une facette perpendiculaire à l'une de ces trois directions ne recevra aucune contrainte de cisaillement, et uniquement une contrainte normale.

Il n'y a aucune raison *a priori* pour que les bases principales de déformation et de contrainte soient identiques.

2. Définitions

On va maintenant introduire la notion de modèle de comportement (aussi appelé loi de comportement, ou modèle constitutif), qui va définir une relation contraintes-déformations qui sera applicable à une classe de matériaux donnée.

Mathématiquement, une loi de comportement a pour but d'exprimer en un point donné et à un instant donné t une inconnue $\bar{\bar{\sigma}}$ à partir de l'histoire (jusqu'à l'instant t) des déformations des particules du système étudié. Certains modèles font également intervenir d'autres paramètres, tels que l'historique de température. On utilise dans le cas le plus général la notion de fonctionnelle \mathcal{F} :

$$\bar{\bar{\sigma}}(\vec{x}, t) = \mathcal{F}[\bar{\bar{E}}(t') \mid t' \leq t] \quad (7.4)$$

Cette expression très générale indique que le tenseur des contraintes en un point dépend de toute l'histoire des déformations en tous points du milieu et pour tous les instants passés jusqu'à l'instant t . Pour être valide physiquement, une loi de comportement ne doit pas violer le premier et le second principes de la thermodynamique, et doit donc respecter certaines conditions énergétiques.

Dans le cadre de notre cours, on ne s'intéressera qu'à des lois de comportement locales, c'est à dire que l'état de contrainte en un point donné et à un instant donné ne dépendra que de l'historique de déformation de la particule matérielle qui occupe ce point à cet instant :

$$\bar{\bar{\sigma}}(\vec{x}, t) = \mathcal{F}[\bar{\bar{E}}(\vec{x}, t') \mid t' \leq t \text{ et } \vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)] \quad (7.5)$$

Si on travaille sur un solide dans le cadre d'un problème où l'on sait qu'il se déformera peu, on ajoute à ce postulat l'hypothèse des petites perturbations (HPP), qui permet de supposer que la position de la particule est très peu variable dans le temps, et d'associer position initiale et position actuelle :

$$\bar{\sigma}(\vec{x}, t) = \mathcal{F}[\bar{\varepsilon}(\vec{x}, t') \mid t' \leq t] \quad (7.6)$$

Sous ces hypothèses, le tenseur de Cauchy en un point donné et à un instant donné t est une fonction de l'histoire du tenseur des déformations linéarisées en ce point précis, et pour tous les instants antérieurs à t .

On introduit enfin un dernier niveau de simplification, avec la notion de milieu sans mémoire, dans le cas où l'état de contrainte dépend uniquement de l'état actuel de déformation du milieu. Dans ce cas, on peut écrire :

$$\bar{\sigma}(\vec{x}, t) = \mathcal{F}[\bar{\varepsilon}(\vec{x}, t)] \quad (7.7)$$

C'est le cas du modèle élastique linéaire que l'on va détailler dans la suite du chapitre. On est aussi parfois amené à définir la notion de milieu à mémoire infiniment courte, pour laquelle la contrainte ne dépend pas de l'historique de déformation mais dépend en revanche de la variation de la déformation à l'instant considéré :

$$\bar{\sigma}(\vec{x}, t) = \mathcal{F}\left[\bar{\varepsilon}(\vec{x}, t), \frac{d}{dt}\bar{\varepsilon}(\vec{x}, t)\right] \quad (7.8)$$

C'est le cas du modèle viscoélastique et de nombreux modèles fluides. Dans ce dernier cas il faut mettre de côté l'HPP (remplacer $\bar{\varepsilon}$ par \bar{E}) et travailler en eulérien.

B. Le modèle élastique linéaire isotrope

1. Définition mathématique

Le modèle de comportement élastique est une loi locale sans mémoire, selon les définitions de la section précédente. Un milieu élastique se définit par les propriétés suivantes :

- Il existe pour chaque particule du milieu un état privilégié, dit état naturel ou état au repos, pour lequel le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur des déformations sont tous les deux nuls.
- L'état des contraintes à l'instant t ne dépend que de l'état de déformation à cet instant par rapport à l'état naturel, qui sert donc d'état initial du système, au sens lagrangien du terme.

On parlera d'élasticité linéaire si on vérifie également les deux propriétés suivantes :

- Le mouvement du système satisfait l'hypothèse des petites perturbations.
- La fonction qui relie l'état des contraintes à l'état des déformations est affine.

Cette dernière propriété permet de mettre en place une relation de proportionnalité entre chaque composante du tenseur de déformation et les composantes du tenseur de contraintes. On aura donc une relation du type :

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (7.9)$$

Ceci permet de faire apparaître un tenseur d'ordre 4 faisant le lien entre $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$. Le plus souvent, pour simplifier les notations et tenir compte des symétries de ces deux tenseurs, on écrit la relation (7.9) sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Pour éviter de faire intervenir un tenseur d'ordre 4, on a rassemblé les termes des $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$ dans des vecteur colonnes, et on obtient une matrice à 36 coefficients (ce qui est logique puisqu'on a 6 composantes indépendantes pour chaque tenseur du fait des symétries) qui permet de faire le lien entre ces composantes dans une base donnée. En réalité, pour des raisons de symétrie, seuls 21 de ces coefficients sont indépendants.

Pour simplifier ces relations, on introduit une dernière hypothèse qui est justifiée dans un très grand nombre de matériaux naturels : l'isotropie. Un milieu est appelé élastique linéaire isotrope s'il est élastique linéaire et si son comportement mécanique est invariant par rotation. Ceci revient à dire qu'il se comporte exactement de la même manière dans toute les directions.

Il existe certains matériaux naturels (bois massif, certains sols stratifiés...) ou artificiels (composites, fibres de verre...) pour lesquels cette hypothèse n'est pas vérifiée car le matériau à une direction particulière qui prend le pas sur les autres : orientation des fibres dans une poutre de bois, direction de déposition sédimentaire pour un sol, etc. Dans ce cas il est inexact de dire que le comportement du matériau est le même dans toutes les directions. En revanche, cette hypothèse fonctionne très bien pour un très grand nombre de matériaux courants : acier, béton, verre, etc.

Pour un milieu élastique isotrope, on n'a donc pas besoin de définir les 21 paramètres dépendants de l'orientation de la base mais on a seulement besoin de deux paramètres scalaires, qui ont par ailleurs le bon goût d'être les mêmes dans toutes les directions de

l'espace. On exprime la relation contraintes-déformations par la formule suivante, que l'on appelle loi de Hooke :

$$\bar{\sigma} = \lambda \cdot \text{tr}(\bar{\varepsilon}) \cdot \bar{I} + 2\mu \cdot \bar{\varepsilon} \quad (7.11)$$

Cette relation fait intervenir les deux scalaires λ et μ , que l'on appelle coefficients d'élasticité de Lamé, et qui sont variables d'un matériau à l'autre. Ils ont l'unité d'une pression (Pa, kPa ou MPa). Comme on le voit, la formule (7.11) est intrinsèque, c'est-à-dire qu'elle ne fait pas intervenir les coefficients d'une base quelconque et est donc valable pour toute base. Si on souhaite l'exprimer dans une base donnée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on peut écrire :

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} \quad (7.12)$$

Dans cette expression, ε_{kk} est la trace de $\bar{\varepsilon}$ et est donc un scalaire indépendant de la base puisque c'est le premier invariant principal de $\bar{\varepsilon}$. Par conséquent, le tenseur de Cauchy s'obtient à partir du tenseur des déformations linéarisées en le multipliant par un scalaire (2μ) et en lui ajoutant un autre scalaire ($\lambda \cdot \text{tr}(\bar{\varepsilon})$).

On en déduit une propriété très intéressante : pour un milieu élastique linéaire isotrope (que l'on appelle souvent milieu élastique classique), en tout point et à tout instant, les tenseurs des contraintes et des déformations linéarisées ont la même base propre. Par conséquent, les directions principales de contraintes et de déformations sont identiques.

L'expression (7.11) peut être "renversée", de manière à exprimer le tenseur des déformations en fonction du tenseur des contraintes, de la manière suivante :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \left(\bar{\sigma} - \lambda \frac{\text{tr}(\bar{\sigma})}{3\lambda + 2\mu} \bar{I} \right) \quad (7.13)$$

2. Paramètres usuels

Aux deux coefficients de Lamé λ et μ , on préfère généralement substituer deux autres paramètres plus usuels, que l'on appelle module d'Young E et coefficient de Poisson ν . On peut les exprimer de la façon suivante :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (7.14)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (7.15)$$

Ces expressions peuvent être renversées de la manière suivante :

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (7.16)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (7.17)$$

On a en réalité 4 coefficients d'élasticité λ , μ , E et ν , et il y a toujours un moyen pour exprimer la loi de Hooke avec n'importe quel couple de coefficients parmi les 4 (même si généralement on associe λ à μ et E à ν).

On peut par exemple réécrire la loi de Hooke de manière intrinsèque en fonction du module d'Young et du coefficient de Poisson :

$$\bar{\sigma} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\bar{\varepsilon} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{tr}(\bar{\varepsilon}) \cdot \bar{I} \right) \quad (7.18)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\bar{\sigma}) \cdot \bar{I} \quad (7.19)$$

On préfère dans un cadre pratique utiliser le module d'Young et le coefficient de Poisson parce qu'ils ont une manifestation physique plus tangible, ce qui apparaîtra dans la prochaine section.

Dans le cadre de l'élasticité linéaire isotrope, on peut alors réécrire l'équation (7.10) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

Cette relation s'inverse sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

Du fait de l'isotropie du matériau, les deux relations (7.20) et (7.21) sont vraies dans toute base.

C. Elasticité en sollicitations simples

1. Contrainte uniaxiale

Imaginons une particule matérielle dans une base quelconque $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, et soumettons cette particule à un état de traction uniaxiale dans la direction \vec{e}_1 . On applique donc une contrainte $\sigma > 0$ dans la direction \vec{e}_1 , tel que :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

D'après l'expression (7.19), la particule va donc subir un tenseur de déformation donné par :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

La déformation selon \vec{e}_1 est égale à la contrainte appliquée divisée par le module d'Young (qui s'exprime en unité de pression, MPA ou GPa). Ce module est donc le coefficient de proportionnalité entre une contrainte uniaxiale et la déformation qui en résulte dans la même direction. Dans le cas présent la déformation est positive et on est donc en présence d'un allongement.

Il est intéressant de constater que les déformations selon les directions \vec{e}_2 et \vec{e}_3 (qui sont orthogonales à la direction de chargement) ne sont pas nulles : elles sont négatives et correspondent donc à une contraction. C'est ce qu'on appelle l'effet Poisson. Il apparaît que, dans le cas d'une contrainte uniaxiale selon \vec{e}_1 , le rapport entre l'allongement selon \vec{e}_1 et la contraction selon \vec{e}_2 ou \vec{e}_3 est égal au signe près au coefficient de Poisson :

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11} \quad (7.24)$$

On distingue deux cas limites : si le coefficient de Poisson est nul, la déformation dans les deux directions orthogonales au chargement est également nulle. Si, à l'opposé, le coefficient de Poisson est égal à 0.5, on vérifie la propriété suivante :

$$\text{tr}(\bar{\varepsilon}) = 0 \quad (7.25)$$

On en déduit que le coefficient de Poisson sera toujours compris entre $\nu = 0$ (pas d'effet Poisson) et $\nu = 0.5$ (matériau incompressible). Ce coefficient n'a pas d'unité.

La sollicitation de contrainte uniaxiale permet donc de faire apparaître une signification physique très marquée au module d'Young et au coefficient de Poisson. Ces deux paramètres ont des valeurs différentes d'un matériau à l'autre, et ces valeurs sont faciles à déterminer expérimentalement. Il suffit pour cela de soumettre une éprouvette de matériau à une sollicitation uniaxiale, et de mesurer les déformations de cette éprouvette dans la direction de la sollicitation et dans les directions orthogonales à la sollicitation.

Enfin, on remarque que le fait d'appliquer une contrainte uniaxiale à un matériau élastique classique ne provoque pas de glissement des directions de la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, puisque les termes non-diagonaux de la matrice de $\bar{\varepsilon}$ dans cette base sont nuls. Ceci est dû au fait que les bases principales de déformations et de contraintes sont identiques du fait de l'isotropie du matériau concerné. Si l'on était en présence d'un matériau anisotrope, il serait tout à fait possible qu'une simple sollicitation de traction uniaxiale entraîne une déviation du tenseur de déformation (i.e. un déviateur non nul). La matrice de $\bar{\varepsilon}$ ne serait alors plus diagonale.

2. Cisaillement simple

On sollicite maintenant notre particule matérielle par un cisaillement simple (défini au chapitre 6) selon les directions orthogonales \vec{e}_1 et \vec{e}_2 , représenté dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par la matrice suivante :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

La déformation correspondante, calculée par la formule (7.19), est :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1+\nu}{E}\tau & 0 \\ \frac{1+\nu}{E}\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2\mu}\tau & 0 \\ \frac{1}{2\mu}\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

On constate qu'une sollicitation de cisaillement simple appliquée à un matériau élastique linéaire isotrope ne provoque aucune élongation dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, puisque les termes diagonaux de $\bar{\bar{\varepsilon}}$ sont nuls dans cette base. On en déduit également qu'une telle sollicitation n'entraîne pas de dilatation volumique, puisque la trace de $\bar{\bar{\varepsilon}}$ est nulle.

Une sollicitation de cisaillement simple produit une déformation de glissement simple, telle que définie au chapitre 4. Cette sollicitation fait donc apparaître un glissement (changement d'angle) entre les directions cisillées \vec{e}_1 et \vec{e}_2 , qui peut s'exprimer par :

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \frac{\tau}{\mu} \quad (7.28)$$

Cette expression nous fournit une interprétation physique du deuxième coefficient de Lamé noté μ : Il s'agit d'un coefficient de proportionnalité entre une contrainte de cisaillement τ et le glissement γ_{12} qu'elle produit sur deux directions orthogonales \vec{e}_1 et \vec{e}_2 . Pour cette raison, on appelle souvent μ le "module de cisaillement" du matériau. Dans le cadre du génie civil et du calcul de structure, il sera assez souvent noté G .

Il faut noter que, contrairement à la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, des élongations apparaissent dans la base principale de déformation. On a en effet vu au chapitre 4 que la base principale de déformation d'un tel état est donnée par :

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \\ \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \\ \vec{b}_3 = \vec{e}_3 \end{cases} \quad (7.29)$$

Les directions \vec{b}_1 et \vec{b}_2 sont les bissectrices de \vec{e}_1 et \vec{e}_2 , et cette base est également la base principale de contraintes puisque le matériau est élastique linéaire et isotrope. Dans cette base principale $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, la matrice du tenseur de déformations est donnée par :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{1+\nu}{E}\tau & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1+\nu}{E}\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\mu}\tau & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\mu}\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

Dans cette base principale, on a donc une extension et une contraction des deux directions \vec{b}_1 et \vec{b}_2 qui sont opposées en norme et qui sont inversement proportionnelles au module de cisaillement.

3. Compression hydrostatique

On soumet maintenant notre particule matérielle à une compression isotrope, également appelée compression hydrostatique puisqu'il s'agit de l'état de contrainte au sein d'un fluide au repos. Si on note p la pression, cet état de contrainte s'exprime dans toute base par la matrice suivante :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

On se place ici dans la convention de signes de la MMC, pour laquelle une contrainte de compression correspond à une valeur négative. D'après la formule (7.19), cet état de contrainte entraîne une déformation qui s'exprime par la matrice suivante, également valable dans toute base puisqu'elle est sphérique :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} -p\frac{1-2\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -p\frac{1-2\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -p\frac{1-2\nu}{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-p}{3K} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-p}{3K} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-p}{3K} \end{bmatrix} \quad (7.32)$$

Une contrainte de compression hydrostatique provoque donc une déformation de contraction isotrope. Dans cette expression, on a introduit le module de compressibilité K , qui s'obtient par :

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (7.33)$$

Ce module de compressibilité relie la pression à la variation volumique. A partir de (7.29), on peut en effet écrire :

$$\text{tr}(\bar{\varepsilon}) = \frac{-p}{K} \quad (7.34)$$

K est donc le coefficient de proportionnalité entre une pression et la variation volumique qu'elle entraîne pour le matériau qui la subit.

D. Thermoélasticité

Une variante importante de l'élasticité est celle qui fait intervenir l'effet de la température. Cette variante est de premier intérêt dans le cadre du génie civil, qui traite de matériaux sujets à des dilatations thermiques qui dans certain cas ne peuvent pas être négligées.

La thermoélasticité traite de milieux élastiques dilatables sous l'effet d'une variation de température. On notera T_0 le champ uniforme de température dans l'état initial, c'est-à-dire celui pour lequel on a à la fois $\bar{\varepsilon} = \bar{0}$ et $\bar{\sigma} = \bar{0}$. On note par ailleurs $T(\vec{x}, t)$ le champ non-uniforme (c'est-à-dire variable spatialement) de la configuration actuelle du milieu étudié. Il peut s'agir par exemple du champ de température créé par la différence entre la face ensoleillée et la face ombragée d'un bâtiment.

En thermoélasticité, on suppose que le matériau subit une contraction (respectivement dilatation) isotrope sous l'effet d'une diminution (respectivement élévation) de température par rapport à sa valeur de référence. On définit donc un nouveau tenseur de déformations noté $\bar{\varepsilon}_T$, uniquement lié à la variation de température :

$$\bar{\varepsilon}_T = \alpha(T(\vec{x}, t) - T_0)\bar{I} \quad (7.35)$$

Le tenseur $\bar{\varepsilon}_T$ est nommé tenseur des déformations linéarisées dues à la température, et est toujours un tenseur sphérique. Par ailleurs, α est le coefficient de dilatation thermique, et on supposera qu'il est constant pour un matériau donné. Finalement, si on note $(T - T_0)$ la variation de température en un point donné et à un instant donné par rapport à l'état de référence, on a :

$$\bar{\varepsilon}_T = \alpha(T - T_0)\bar{I} \quad (7.36)$$

Finalement, les effets de déformation dues aux contraintes et à la variation de température se cumulent, et on peut écrire la formule générale de la thermoélasticité :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\bar{\sigma}) \cdot \bar{I} + \alpha(T - T_0) \bar{I} \quad (7.37)$$

On peut renverser cette expression pour obtenir l'expression de la contrainte :

$$\bar{\sigma} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\bar{\varepsilon} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{tr}(\bar{\varepsilon}) \cdot \bar{I} - \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \alpha(T - T_0) \bar{I} \right) \quad (7.38)$$

Séance 8. Le problème élastique

A. Equations constitutives du problème

On va dans ce chapitre mettre en place les outils permettant la résolution d'un problème de mécanique fondé sur l'élasticité. On s'intéresse donc à un système mécanique qui, à partir d'un état initial non-chargé (tenseurs des contraintes et des déformations égaux à zéro, champ de température uniforme donné), va être soumis à une sollicitation mécanique sous la forme d'une contrainte, d'un déplacement imposé sur ses frontières et/ou d'une force volumique, et va atteindre un nouvel état d'équilibre pour lequel les champs de tenseurs de contraintes et de déformations seront à déterminer.

On va travailler en élasticité classique, donc on va supposer que l'hypothèse des petites perturbations est vérifiée. Par conséquent, les vecteurs positions sont supposés quasi-identiques entre l'état initial et l'état actuel, et le chargement ne modifie pas la géométrie globale du système. On travaille alors sur un domaine matériel D , et on nomme sa surface extérieure S . Grâce à l'HPP, on peut donc énoncer que D et S sont quasi-indépendants du temps, et sont quasi-identiques avant et après le chargement.

Comme énoncé lors de la présentation de l'HPP, cela ne veut pas dire que le champ de déplacement est nul (dans ce cas le système ne se déformerait pas, et il n'y aurait pas de problème mécanique à résoudre), mais cela signifie que ce champ de déplacement est très faible devant les dimensions du système.

Si on prend l'exemple d'un pont, on peut dire que son état initial est celui où il ne reçoit pas de chargement, que son état actuel est celui où il supporte un fort trafic, et que l'HPP se traduit par le fait que sa flèche (le déplacement de son tablier vers le bas dû au chargement) est négligeable devant ses dimensions. Il va pourtant reprendre des efforts, subir des contraintes et connaître des déformations qu'il est préférable de contrôler.

1. Equations cinématiques

Les équations cinématiques que l'on a présenté depuis le début de ce cours se résument à deux expressions. La première donne le lien entre le champ de déplacement et le tenseur des déformations linéarisées (chapitre 3) :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{grad}} \vec{U} + (\overline{\text{grad}} \vec{U})^T \right) \text{ sur } D \quad (8.1)$$

Cette expression est valable en tout point du domaine D , et fait intervenir le champ de déplacement \vec{U} par l'intermédiaire de son gradient (que l'on avait noté \bar{H} dans le chapitre 3).

La deuxième équation cinématique fait intervenir la notion de condition aux limites (aussi notées CL) en déplacement, et s'énonce :

$$\vec{U} = \overline{U}_D \text{ sur } S_U \quad (8.2)$$

Cette expression est valable en tout point de S_U , qui est une partie donnée de la surface extérieure S de D . Elle stipule que, en chaque point \vec{x} de cette partie S_U , le déplacement de la matière est imposé et vaut $\overline{U}_D(\vec{x})$.

Ce déplacement imposé est généralement une des données du problème à résoudre. Il se peut que S_U constitue plusieurs parties distinctes de S . Si on reprend l'exemple du pont, les conditions limites en déplacement seront celles qui stipuleront que les déplacements sont nuls au niveaux des contacts du pont avec le sol (fondations des piles et des culées).

2. Equations d'équilibre

En plus des conditions cinématiques, on a présenté depuis le début de ce cours un certain nombre de conditions d'équilibre, que l'on peut résumer sous la forme de plusieurs expressions. La première correspond à la forme locale du principe fondamental de la dynamique appliqué à un domaine à l'équilibre :

$$\overline{\text{div}} \bar{\sigma} + \rho \bar{g} = \vec{0} \text{ sur } D \quad (8.3)$$

Cette équation, valable en tout point \vec{x} de D , repose sur l'hypothèse d'un domaine à l'équilibre, c'est-à-dire que l'on néglige tout effet dynamique dû au chargement. Elle

n'est pas applicable par exemple dans le cas d'un ouvrage soumis au séisme, pour lequel il faudrait également prendre en compte le terme d'accélération présenté au chapitre 5. L'équation (8.3) repose également sur l'hypothèse courante que la seule force volumique du problème est la gravité.

A cette équation, on ajoute la conséquence de la partie "rotation" du PFD, c'est-à-dire de la loi de bilan de moment cinétique :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^T \text{ sur } D \quad (8.4)$$

Comme énoncé au chapitre 5, cette loi de bilan conduit directement à la symétrie du tenseur de Cauchy. On énonce enfin une dernière équation d'équilibre, qui fait intervenir le vecteur contrainte sur la surface extérieure au domaine :

$$\bar{\sigma}\vec{n} = \vec{T}_D \text{ sur } S_T \quad (8.5)$$

Cette équation est à rapprocher de l'équation (8.2), puisqu'il s'agit d'une condition limite en contrainte. Cette équation stipule qu'il existe une partie S_T de la surface extérieure S de D pour laquelle le vecteur contrainte est imposé en chaque point \vec{x} et vaut \vec{T}_D . Dans le cas du pont que l'on a pris en exemple, il s'agit de la surface supérieure du tablier (soumise au chargement du trafic sur la chaussée), mais également de toutes les surfaces extérieures du pont soumises à l'air libre, et pour lesquelles le vecteur contrainte est imposé et vaut zéro : surface extérieure des piles, surface inférieure du tablier, etc.

L'équation (8.5) exprime que le vecteur contrainte (à l'intérieur du domaine) qui s'applique sur la normale à la surface S_T au point \vec{x} (vecteur exprimé par $\bar{\sigma}\vec{n}$) est égal au vecteur contrainte qui est appliqué à la surface par l'extérieur (vecteur exprimé par \vec{T}_D). Ce dernier vecteur contrainte est généralement une des données du problème.

3. Modèle de comportement

A ces cinq équations cinématiques et dynamiques, on ajoute le loi de Hooke définissant le comportement élastique linéaire et isotrope du matériau constituant le domaine D (Chapitre 7) :

$$\bar{\sigma} = \lambda \cdot \text{tr}(\bar{\epsilon}) \cdot \bar{I} + 2\mu \cdot \bar{\epsilon} \quad (8.6)$$

Un des résultats classiques de la théorie de l'élasticité est que le problème élastique défini par les équations (8.1) à (8.6) a toujours une solution, à partir du moment où on vérifie les deux conditions suivantes :

$$S_U \cap S_T = \emptyset \quad (8.7)$$

$$S_U \cup S_T = S \quad (8.8)$$

La première condition énonce que, en un point donné de la surface S , on ne peut pas imposer à la fois une condition limite en contrainte et une autre en déplacement. La deuxième condition implique que tout point de la surface extérieure au domaine doit être soumis à une condition limite, qu'il s'agisse de condition en contrainte ou en déformation.

Lorsque les relations (8.1) à (8.8) sont vérifiées, on dit que le problème élastique est bien posé, c'est à dire qu'il est fermé (il a exactement une solution).

B. Résolution du problème élastique

1. Formulation en contraintes

La formulation en contraintes est appelée méthode de Beltrami ou méthode de Navier. Elle consiste à prendre pour inconnues les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy $\bar{\sigma}$. On va donc chercher à faire disparaître $\bar{\varepsilon}$ et \vec{U} du système d'équations posées dans la section précédente. La difficulté consiste à exprimer les conditions de compatibilité en déplacement à partir du seul tenseur des contraintes. Pour cela, on utilise la loi de Hooke qui relie directement $\bar{\sigma}$ à $\bar{\varepsilon}$. En combinant les équations (8.1) et (8.6), on obtient la formule de Beltrami :

$$\Delta \bar{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{\text{grad}} \text{tr } \bar{\sigma} = \vec{0} \quad (8.9)$$

Cette formule est valable si on travaille à température constante (pas d'effet de dilatation thermique) et si on considère que la gravité est la seule action à distance. Cette équation s'ajoute aux équations d'équilibre (8.3) et (8.4) pour exprimer la formulation en contrainte du problème. On constate en effet que la seule et unique inconnue de ce système est le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$.

Le système des équations (8.3), (8.4), et (8.9) doit être muni de conditions limites pour être résolu. Comme on l'a dit, celles-ci sont de deux types :

- Sur S_T il s'agit de conditions limites en contraintes, qui s'expriment donc sans modification dans le cadre de la formulation en contraintes en reprenant l'expression (8.5).
- Sur S_U c'est nettement plus compliqué puisqu'il s'agit de conditions limites de déplacement, qui n'ont *a priori* pas d'expression simple en termes de contraintes.

En général, on résout le système avec uniquement les premières conditions aux limites, et on aboutit à une indétermination (sous la forme de variables d'intégrations qui n'ont pas encore de valeur spécifiée). Il faut alors calculer successivement $\bar{\epsilon}$ (à partir de la loi de Hooke) puis \vec{U} à partir de l'équation (8.1) en transmettant l'indétermination au fil de ces calculs. Lorsque \vec{U} a été calculé, on applique enfin les conditions limites (8.2) pour lever l'indétermination et fermer le problème.

Une telle méthode de résolution est donc à réserver pour les cas où la majorité des conditions limites s'expriment en contraintes.

2. Formulation en déplacement

La formulation en déplacement, dite méthode de Lamé-Clapeyron, consiste à prendre comme inconnue principale le champ de déplacement \vec{U} , et à faire disparaître du problème les tenseurs $\bar{\epsilon}$ et $\bar{\sigma}$. On réécrit donc les équations d'équilibre (8.3) et (8.4) en fonction de \vec{U} à partir de l'équation (8.1) (qui exprime $\bar{\epsilon}$ en fonction de \vec{U}) et de la loi de Hooke (qui exprime $\bar{\sigma}$ en fonction de $\bar{\epsilon}$). On aboutit finalement à l'équation de Navier :

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \vec{U} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \overrightarrow{grad} \operatorname{div} \vec{U} + \vec{g} = \vec{0} \quad (8.10)$$

Cette formule est valable si la déformation s'effectue à température constante, c'est-à-dire si on néglige tout effet de dilatation thermique. On peut exprimer cette équation en faisant intervenir le rotationnel et en introduisant les coefficients d'élasticité de Lamé :

$$\mu \Delta \vec{U} + (\lambda + \mu) \overrightarrow{rot} \overrightarrow{rot} \vec{U} + \vec{g} = \vec{0} \quad (8.11)$$

Cette formulation alternative trouvera tout son avantage lorsque l'on travaillera sur un champ de déplacement irrotationnel, c'est à dire pour lequel $\overrightarrow{rot} \vec{U} = \vec{0}$.

On a donc exprimé le principe fondamental de la dynamique en terme de champ vectoriel de déplacement uniquement. Pour résoudre l'équation (8.11), il faut prendre en compte les conditions limites. Les conditions sur S_U ne posent pas de problème, puisqu'elles sont elles-mêmes exprimées en termes de déplacements, selon l'équation (8.2).

Pour les conditions limites en contraintes énoncées en (8.5), on applique une méthode analogue à celle utilisée dans la formulation en contrainte. On commence par résoudre l'équation (8.11) avec les seules conditions limites (8.2), et on obtient un champ de vecteurs déplacements avec une indétermination sous la forme de constantes d'intégrations non spécifiées. A partir de ce champ \vec{U} , on applique successivement (8.1) pour déterminer $\vec{\varepsilon}$ puis la loi de Hooke pour en déduire $\vec{\sigma}$. Le champ de contraintes obtenu (qui comporte toujours l'indétermination) est ensuite confronté aux conditions limites de l'équation (8.5) de façon à lever l'indétermination et à fermer le problème.

La formulation en déplacements est donc généralement à réserver au cas où le système a peu de conditions aux limites exprimées en contraintes. D'une manière générale, il est extrêmement rare que les approches en contraintes et en déplacements conduisent à une résolution manuelle, sauf si la géométrie du problème, les conditions limites et les conditions de chargement sont très simples.

3. Théorème de superposition

On va introduire ici une propriété de l'élasticité linéaire, nommée théorème de superposition. Cette propriété peut permettre de simplifier considérablement certains problèmes. Considérons un domaine matériel D muni d'une surface extérieure S . On imagine une première situation appliquée à D , pour laquelle les conditions limites sont exprimées par des déplacements imposés \vec{U}_{D1} et des contraintes imposées \vec{T}_{D1} :

$$\vec{U}_1 = \vec{U}_{D1} \text{ sur } S_U \quad (8.12)$$

$$\vec{\sigma}_1 \vec{n} = \vec{T}_{D1} \text{ sur } S_T \quad (8.13)$$

avec les conditions de "fermeture" du problème :

$$S_U \cap S_T = \emptyset \quad (8.14)$$

$$S_U \cup S_T = S \quad (8.15)$$

Par l'une ou l'autre des méthodes de résolution proposées précédemment, on est en mesure de calculer les champs résultants de cette situation. On appelle ces champs $\bar{\bar{\epsilon}}_1$, $\bar{\bar{\sigma}}_1$, et \bar{U}_1 .

On imagine maintenant une deuxième situation appliquée au même domaine matériel muni de la même surface extérieure S (celle-ci étant divisée en S_U et S_T comme dans la première configuration). On définit ces nouvelles conditions limites par des déplacements imposés \bar{U}_{D2} et des contraintes imposées \bar{T}_{D2} :

$$\bar{U}_2 = \bar{U}_{D2} \text{ sur } S_U \quad (8.16)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_2 \bar{n} = \bar{T}_{D2} \text{ sur } S_T \quad (8.17)$$

De nouveau, l'une ou l'autre des méthodes de résolution peut nous fournir les champs résultants $\bar{\bar{\epsilon}}_2$, $\bar{\bar{\sigma}}_2$, et \bar{U}_2 .

Le théorème de superposition se propose d'appliquer un chargement qui sera la superposition des deux situations proposées, multipliées par deux scalaires α et β quelconques. On a donc des conditions aux limites correspondant à des déplacements imposés $\alpha \cdot \bar{U}_{D1} + \beta \cdot \bar{U}_{D2}$ et des contraintes imposées $\alpha \cdot \bar{T}_{D1} + \beta \cdot \bar{T}_{D2}$:

$$\bar{U} = \alpha \cdot \bar{U}_{D1} + \beta \cdot \bar{U}_{D2} \text{ sur } S_U \quad (8.18)$$

$$\bar{\bar{\sigma}} \bar{n} = \alpha \cdot \bar{T}_{D1} + \beta \cdot \bar{T}_{D2} \text{ sur } S_T \quad (8.19)$$

La théorème de superposition permet d'affirmer, sans le moindre calcul supplémentaire, que les champs résultats pour ce troisième problème sont donnés par les expressions suivantes :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \alpha \cdot \bar{\bar{\epsilon}}_1 + \beta \cdot \bar{\bar{\epsilon}}_2 \quad (8.20)$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = \alpha \cdot \bar{\bar{\sigma}}_1 + \beta \cdot \bar{\bar{\sigma}}_2 \quad (8.21)$$

$$\bar{U} = \alpha \cdot \bar{U}_1 + \beta \cdot \bar{U}_2 \quad (8.22)$$

Par application de ce théorème, on voit qu'on peut donc décomposer un chargement complexe en plusieurs chargement simples, faire le calcul de manière indépendante

pour chacun d'eux, et ajouter les résultats à la fin. Cette propriété provient de la linéarité de la loi de comportement (loi de Hooke) et du fait que l'on travaille sous l'hypothèse des petites perturbations.

4. Contraintes et déformations planes

Dans le chapitre 4 on a défini la notion de déformation plane, engendrée par un champ de déplacement plan. Un tel champ de déformation est défini par les équations suivantes :

$$U_3 = 0 \quad (8.23)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_3} = \frac{\partial U_2}{\partial x_3} = 0 \quad (8.24)$$

Dans ce cas, on dit que le mouvement est plan dans la direction \vec{e}_3 : le déplacement dans la direction \vec{e}_3 est nul et le champ de vitesse est identique dans tout plan perpendiculaire à \vec{e}_3 . La forme générale de ce champ de déformation est donc :

$$\vec{U} = U_1(x_1, x_2)\vec{e}_1 + U_2(x_1, x_2)\vec{e}_2 \quad (8.25)$$

Un tel champ de déplacement entraîne un champ de tenseurs des déformations linéarisées dont la matrice dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ a l'allure générale suivante :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(x_1, x_2) & \varepsilon_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \varepsilon_{12}(x_1, x_2) & \varepsilon_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.26)$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

Un tel état de déformation se produit par exemple lorsque la structure étudiée a une grande dimension dans la direction \vec{e}_3 (comparée à ses dimensions dans les deux autres directions), lorsque les sections droites perpendiculaires à \vec{e}_3 sont toutes identiques, et

lorsque les conditions aux limites (et en particulier les conditions de chargement) sont identiques dans la direction de \vec{e}_3 . C'est le cas par exemple d'un barrage, d'un talus, d'un tunnel, etc.

Grâce à la loi de Hooke, on peut écrire l'allure générale de la matrice du tenseur des contraintes engendrées par un champ de déformation plane :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot tr(\bar{\varepsilon}) + 2\mu \cdot \varepsilon_{11} & 2\mu \cdot \varepsilon_{12} & 0 \\ 2\mu \cdot \varepsilon_{12} & \lambda \cdot tr(\bar{\varepsilon}) + 2\mu \cdot \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \cdot tr(\bar{\varepsilon}) \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

On constate qu'un état de déformation plane n'entraîne pas un état de contrainte plane, du fait de l'effet Poisson : la tendance du matériau à avoir une déformation dans la direction \vec{e}_3 transversale à son chargement est empêchée dans le cadre d'une déformation plane, et cette déformation empêchée est à l'origine d'une contrainte non-nulle dans la direction \vec{e}_3 .

A l'inverse, on a défini dans le chapitre 6 l'état de contrainte plane, représenté par la matrice suivante :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

Un tel état de contrainte ne peut se produire que dans une pièce mince (pour laquelle la dimension selon \vec{e}_3 est très faible devant les autres dimensions) chargée uniquement dans son plan. On appelle généralement ce genre de pièce une coque, par opposition à la notion de plaque de mêmes caractéristiques géométriques mais chargée uniquement perpendiculairement à son plan. Pour qu'une coque soit soumise à un champ de contrainte plane, il faut que sa partie plane soit libre d'effort (c'est-à-dire soumise à une condition aux limites imposant une contrainte nulle) et que la gravité agisse perpendiculairement à \vec{e}_3 .

La loi de Hooke fournit la forme générale de la matrice du tenseur des déformations linéarisées :

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \end{bmatrix} \quad (8.30)$$

A cause de l'effet Poisson, on constate qu'un état de contrainte plane n'implique pas un état de déformation plane.

Séance 9. Elastoplasticité

A. Comportement des matériaux réels

1. Observations expérimentales

La loi de comportement élastique linéaire isotrope décrite dans les deux chapitres précédents a un domaine d'application limité à un certain domaine qui dépend du matériau considéré. Imaginons par exemple que l'on soumet une éprouvette métallique à un essai de traction, c'est à dire à un état de contrainte uniaxiale de la forme :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

La seule contrainte non-nulle est la composante normale σ_{11} de $\bar{\sigma}$ dans la direction \vec{e}_1 . Supposons que l'on augmente progressivement cette contrainte uniaxiale, et que l'on observe son effet sur la déformation ε_{11} de l'éprouvette dans la même direction (on ne s'intéresse pas ici à l'effet Poisson). On part du point O, qui correspond à une contrainte et à une déformation nulles (Fig. 9.1). Pour les faibles valeurs de σ_{11} , toutes les hypothèses de l'élasticité linéaire isotrope sont vérifiées, et on a donc une augmentation de la déformation ε_{11} qui est exactement proportionnelle à σ_{11} . La pente de la droite $\varepsilon_{11} - \sigma_{11}$ est égale au module d'Young E.

Si on charge seulement jusqu'au point A de la Fig. 9.1, on reste dans le domaine élastique, et on peut donc effectuer un déchargement de A à O : le matériau va retrouver très exactement son état initial d'avant chargement. Si, en revanche, on continue à charger au delà du point B, on va observer un très net changement de comportement : on dit que le matériau plastifie, ou qu'il a un comportement plastique.

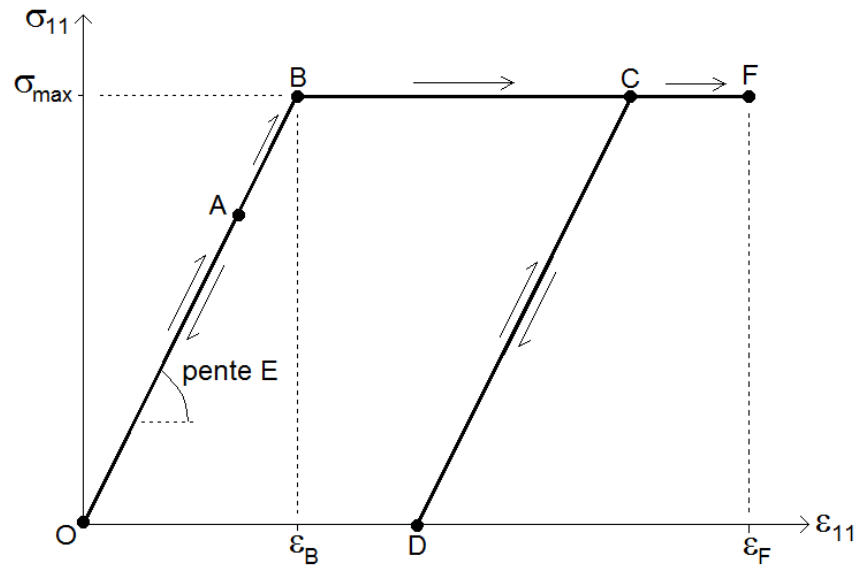


Figure (9.1). Comportement élastoplastique idéaliste

On constate en réalité que, au point B, on a atteint une valeur maximale de σ_{11} notée σ_{max} , correspondant à une déformation axiale ϵ_B : le matériau n'est pas capable de soutenir une contrainte supérieure. Ainsi, si on continue à appliquer une déformation uniaxiale jusqu'au point C, on constate que la déformation ϵ_{11} augmente mais que la contrainte σ_{11} reste constante. C'est ce qu'on appelle un écoulement plastique.

A ce stade, le matériau n'a pas encore cédé, et on peut effectuer une décharge à partir du point C (c'est-à-dire réduire la valeur de σ_{11}). Pour beaucoup de matériaux, et en particulier pour l'acier, on va constater expérimentalement un retour au comportement élastique du matériau : le déchargement va s'effectuer de manière linéaire jusqu'au point D, qui est le nouvel état de référence du matériau. Pour cet état de référence, on a bien $\sigma_{11}=0$, mais on a en revanche $\epsilon_{11} > 0$. Ceci signifie que la plastification a déplacé l'état de référence, et on appelle ce phénomène "écrouissage".

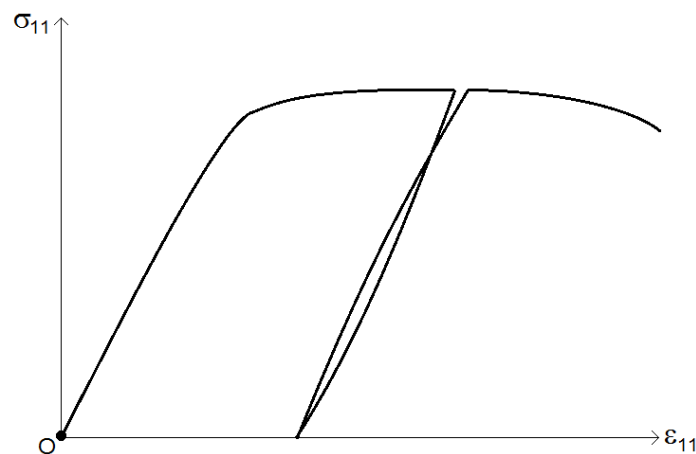


Figure (9.2). Comportement élastoplastique réel

Si on effectue un rechargement à partir du point D, on va de nouveau avoir un comportement élastique jusqu'au point C, puis un retour à la plasticité lorsqu'on aura atteint la valeur maximale de σ_{11} . Par la suite, si on continue à appliquer une déformation en extension, on atteindra la rupture de l'éprouvette en un point F, pour une déformation maximale ε_F .

Il faut bien noter que le comportement élastoplastique tel qu'on l'a décrit ici est une modélisation du réel, mais qu'un essai expérimental ne conduira pas forcément à une courbe aussi parfaite (Fig. 9.2).

Dans beaucoup de matériaux, la limite élastique est contenue dans le domaine des petites déformations, ce qui signifie qu'on a $\varepsilon_B < 10^{-2}$. C'est le cas par exemple de l'acier.

2. Notion de limite élastique

On a donc identifié un changement de comportement à partir d'un certain niveau de chargement. Dans certaines applications industrielles où l'on a besoin de mettre en forme un matériau (pliage ou emboutissage de l'acier, extrusion du plastique, etc.), il est intéressant de se placer bien au delà du comportement élastique et de profiter du fait que la plasticité implique des mouvements irréversibles.

En revanche, dans le domaine du génie civil et de la mécanique des sols, on cherche la plupart du temps à rester dans le domaine élastique afin de se prémunir de la rupture du matériau. Pour s'en assurer, on a coutume de définir la notion de limite élastique, qu'on appelle également critère de plasticité. Ce critère fixe la position du point B sur la Fig. 9.1, c'est-à-dire qu'il sépare deux domaines : le domaine élastique pour lequel toutes les déformations sont réversibles et la rupture du matériau est évitée, et le domaine plastique dans lequel on voit apparaître des déformations irréversibles et pour lequel la rupture peut être atteinte rapidement si on applique une déformation suffisante.

Mathématiquement, on définit un critère de plasticité par l'intermédiaire d'un scalaire noté $f(\bar{\sigma})$. Il s'agit donc d'une fonction de l'état de contrainte, qui prend une valeur différente en chaque point d'un système et à chaque instant. On utilise alors la règle suivante : en un point donné et à un instant donné, l'expression $f(\bar{\sigma}) < 0$ équivaut à un comportement élastique. À l'inverse, l'expression $f(\bar{\sigma}) = 0$ correspond à une plastification locale du matériau. On notera que l'expression $f(\bar{\sigma}) > 0$ est une impossibilité physique.

Le critère de plasticité $f(\bar{\sigma})$ définit donc la limite du domaine élastique dans l'espace des contraintes. Si on a $f(\bar{\sigma}) < 0$ on est à l'intérieur du domaine élastique, et si on a $f(\bar{\sigma}) = 0$ on est à la frontière du domaine élastique, et on plastifie le matériau.

La limite élastique $f(\bar{\sigma})$ doit respecter les symétries matérielles. En particulier, dans le cas d'un matériau isotrope, la quantité $f(\bar{\sigma})$ doit être la même dans toute les directions et doit donc être invariante par changement de base. En conséquence, dans un matériau isotrope, $f(\bar{\sigma})$ est fonction des seuls invariants du tenseur de contrainte. On utilise souvent les trois invariants principaux :

$$\begin{cases} \sigma_I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = tr(\bar{\sigma}) \\ \sigma_{II} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 = tr(\bar{\sigma})^2 - tr(\bar{\sigma}^2) \\ \sigma_{III} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = det(\bar{\sigma}) \end{cases} \quad (9.2)$$

On utilise aussi parfois les invariants fondés sur les traces des premières puissances du tenseur des contraintes :

$$\begin{cases} \sigma'_I = tr(\bar{\sigma}) \\ \sigma'_{II} = tr(\bar{\sigma}^2) \\ \sigma'_{III} = tr(\bar{\sigma}^3) \end{cases} \quad (9.3)$$

3. Représentation graphique d'un critère de plasticité.

Avant de présenter en détail plusieurs exemples courants de critères de plasticité, on va ici aborder plusieurs méthodes de représentation graphique de ces critères permettant de les rendre plus facilement compréhensibles.

Puisque la condition $f(\bar{\sigma}) = 0$ délimite un domaine dans l'espace des contraintes, on peut d'abord définir une représentation d'un tel domaine dans le plan de Mohr, qui a été présenté en détail au chapitre 6. Une telle représentation est fournie dans la Fig. 9.3, dans le cas d'un critère de plasticité fictif.

Comme on le voit sur cette figure, un critère de plasticité se représente dans le plan de Mohr sous la forme d'une courbe qui définit la frontière entre un domaine élastique (situé strictement à l'intérieur de cette courbe) et un domaine extérieur. Une telle représentation de critère obéit aux règles suivantes :

- le domaine d'élasticité contient l'origine du repère (on imagine mal en effet un matériau plastifier sous l'effet de contraintes nulles).
- le domaine d'élasticité est convexe.

- le domaine d'élasticité est symétrique par rapport à l'axe horizontal (la direction du cisaillement n'a en effet pas d'importance), mais peut être asymétrique par rapport à l'axe vertical (le matériau ne se comportant pas de la même manière en compression et en traction).

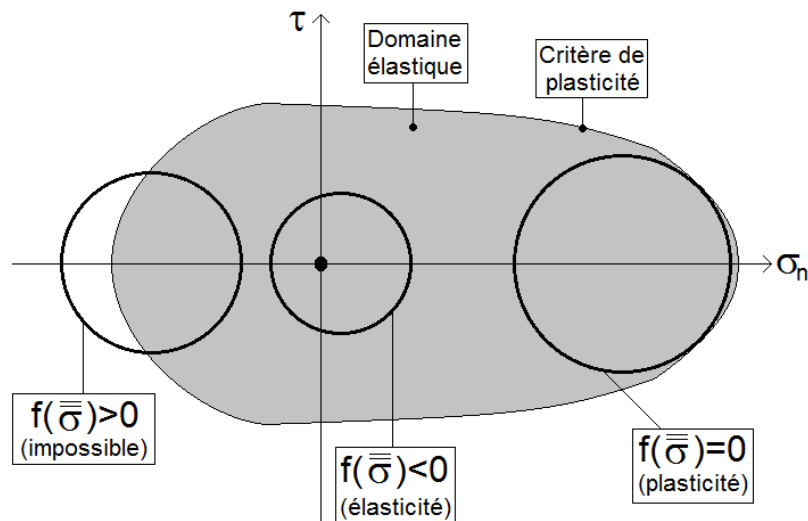


Figure (9.3). Critère de plasticité fictif dans le plan de Mohr

On a montré au chapitre 6 qu'un état de contrainte $\bar{\sigma}$ donné se représentait dans le plan de Mohr par un tricerclé, et en particulier par le grand cercle de Mohr qui représente les états de contrainte dans le plan de cisaillement maximal (\vec{c}_1, \vec{c}_3) défini par les directions de contraintes principales maximale et minimale.

Par définition du critère de plasticité, on peut édicter les règles suivantes :

- Un grand cercle de Mohr contenu strictement à l'intérieur du domaine correspond à un comportement élastique, puisqu'on aura $f(\bar{\sigma}) < 0$ pour toutes les facettes (les états de contraintes de la totalité des facettes pointant dans toutes les directions de l'espace étant inclus à l'intérieur du grand cercle de Mohr).
- Un grand cercle de Mohr tangent au critère de plasticité correspond à un état de plasticité, puisqu'il existe alors exactement deux facettes (correspondant aux deux points de tangence) pour lesquelles l'état de contrainte est en dehors du domaine élastique.
- Un grand cercle de Mohr qui déborde à l'extérieur du domaine élastique correspond à une impossibilité physique.

Reprenons maintenant l'expérience de traction simple décrite au début de ce chapitre et formalisée dans l'équation (9.1). Cette expérience correspond à l'état de contrainte décrit par le tenseur suivant :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

Les contraintes principales minimale et intermédiaire vérifient $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, et la contrainte principale maximale varie de $\sigma_1 = 0$ (état non chargé, correspondant au point O de la Fig. 9.1) à $\sigma_1 = \sigma_{max}$ (limite élastique, correspondant au point B de la Fig. 9.1). A l'état non chargé, le cercle de Mohr se réduit au point d'origine du plan de Mohr, comme dans la Fig. 9.1. Lorsque l'on augmente la contrainte de traction, on introduit des états de contraintes qui correspondent à des cercles de rayons croissants, chacun d'eux correspondant à un point A donné de la Fig. 9.1. De tels cercles sont représentés dans le plan de Mohr dans la Fig. 9.4. Lorsque le cercle est suffisamment grand pour être tangent au critère de plasticité, on atteint la contrainte maximale σ_{max} que le matériau peut reprendre, et on entre en plasticité. Ceci correspond au point B de la Fig. 9.1, et au plus grand cercle de la Fig. 9.4.

Ce cas illustre le côté pratique de la représentation dans le plan de Mohr, qui permet de trouver la valeur maximale de contrainte de traction simple que peut reprendre le matériau en trouvant le cercle de Mohr le plus grand possible parmi les cercles de traction uniaxiale.

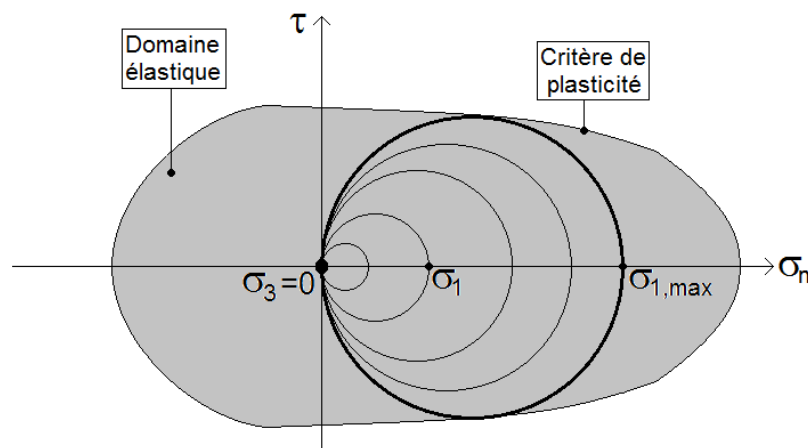


Figure (9.4). Essai de traction uniaxiale jusqu'à la plasticité

Il faut noter que la représentation d'un critère de plasticité dans le plan de Mohr peut-être insuffisante dans le cas de certains critères de plasticité complexes, car elle ne fait jouer aucun rôle à la contrainte principale intermédiaire σ_2 . Chaque grand cercle de Mohr est en effet uniquement défini par les contraintes principales minimale et maximale. La représentation de Mohr est donc bien adaptée aux critères de plasticité de la forme suivante :

$$f(\bar{\sigma}) = f(\sigma_1, \sigma_3) \quad (9.5)$$

Ce type de critère est extrêmement répandu (voir exemples de la section suivante) et la représentation de Mohr suffit le plus souvent.

Dans le cas plus général où σ_2 joue un rôle, une représentation bidimensionnelle n'est alors plus suffisante, et on a coutume de représenter les critères de plasticité dans des repères tridimensionnels, comme représentés dans la Fig. 9.5. Dans ce cas le critère de plasticité n'est plus une courbe dans un plan mais une surface dans l'espace.

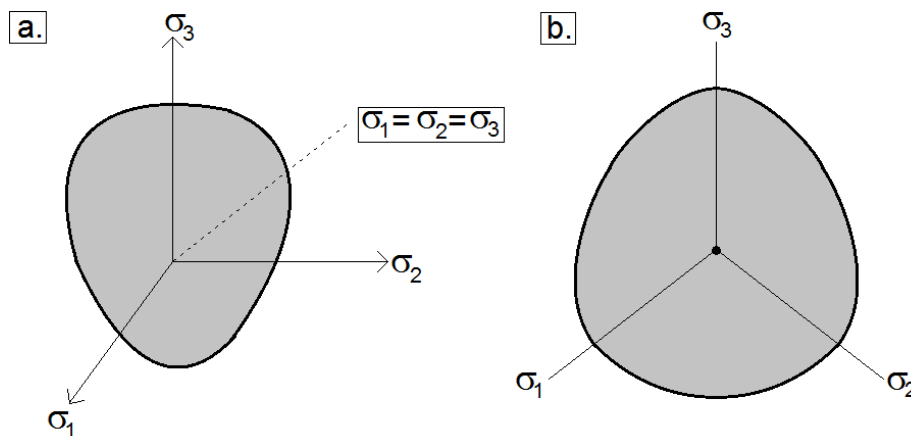


Figure (9.5). Exemples de représentation tridimensionnelles de critères de plasticité :
a. Dans le repère $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$; b. En projection selon l'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

B. Exemples de critères de plasticité

Il existe de très nombreux critères de plasticité adaptés à différentes classes de matériaux. Un bon critère doit être cohérent avec les observations expérimentales, être aussi simple que possible, et être défini par un nombre limité de paramètres qui doivent être faciles à identifier par des essais expérimentaux classiques. On en présente ici un certain nombre sans rentrer dans le détail, car l'objet de ce cours n'est pas de s'intéresser à la mécanique particulière de chaque matériau.

1. Critère de Rankine

Le critère de Rankine porte sur les limites de contraintes normales. La limite élastique est alors définie par une contrainte normale maximale σ_e (que l'on peut identifier par un essai de traction comme celui présenté en début de chapitre) et une contrainte normale minimale σ'_e (que l'on peut identifier par un essai de compression). Ce critère est représenté dans le plan de Mohr dans la Fig. (9.6).

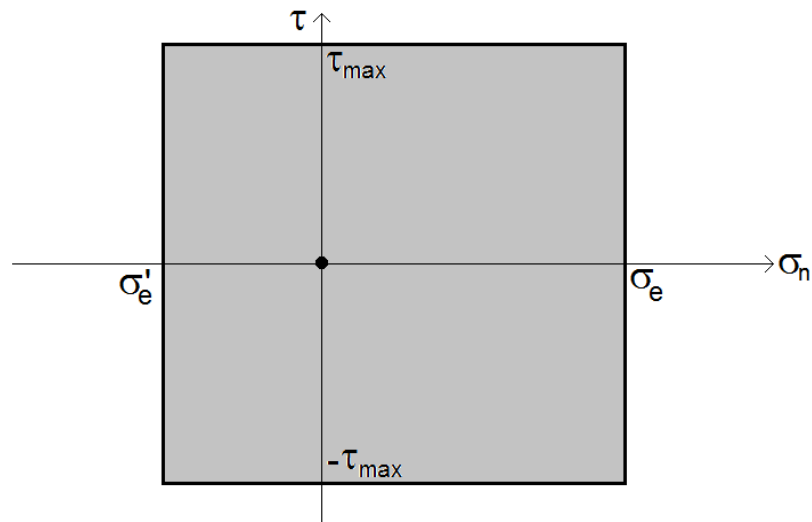


Figure (9.6). Critère de Rankine

On peut le formaliser mathématiquement par l'expression suivante (par exemple) :

$$f(\bar{\sigma}) = \max\{(\sigma_1 - \sigma_e) ; (\sigma'_e - \sigma_3)\} \quad (9.6)$$

Il apparaît bien que le scalaire $f(\bar{\sigma})$ reste strictement négatif tant que la contrainte principale maximale est strictement inférieure à σ_e et tant que la contrainte principale minimale est strictement supérieure à σ'_e .

Comme on le constate, le simple fait de définir des contraintes maximales de traction et de compression permet de limiter également le cisaillement, puisque le plus grand cercle de Mohr admissible à l'intérieur des deux valeurs σ_e et σ'_e définit une contrainte de cisaillement égale à :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_e - \sigma'_e}{2} \quad (9.7)$$

Le critère de Rankine est en général assez imprécis, et il est par exemple très peu probable de trouver un matériau conduisant à la même valeur de τ_{max} que l'équation (9.7) si on le soumet à un essai de cisaillement ou de torsion. Le critère de Rankine est

donc seulement utilisé dans un cadre mécanique où l'on sait que les matériaux étudiés seront principalement soumis à des sollicitations de traction-compression.

Ce critère est parfois utilisé pour les bétons, car il permet de définir une valeur différente des limites en traction et en compression, ce qui constitue une propriété essentielle de ces matériaux (qui sont environ dix fois plus résistants en compression qu'en traction).

2. Critère de Tresca

Contrairement au critère de Rankine, le critère de Tresca s'intéresse à la valeur du cisaillement maximal τ_e , que l'on peut obtenir à partir d'un essai de cisaillement, d'un essai de torsion, ou d'un essai triaxial de révolution selon le matériau étudié.

Ce critère se formalise mathématiquement par :

$$f(\bar{\sigma}) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \tau_e \quad (9.8)$$

On reconnaît dans cette expression le terme $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ qui correspond au rayon du grand cercle de Mohr défini par les contraintes principales maximale et minimale, et qui correspond également au cisaillement maximal décrit par ce cercle de Mohr. Graphiquement, le critère de Tresca est représenté par deux lignes horizontales parallèles, comme sur la Fig. 9.7.

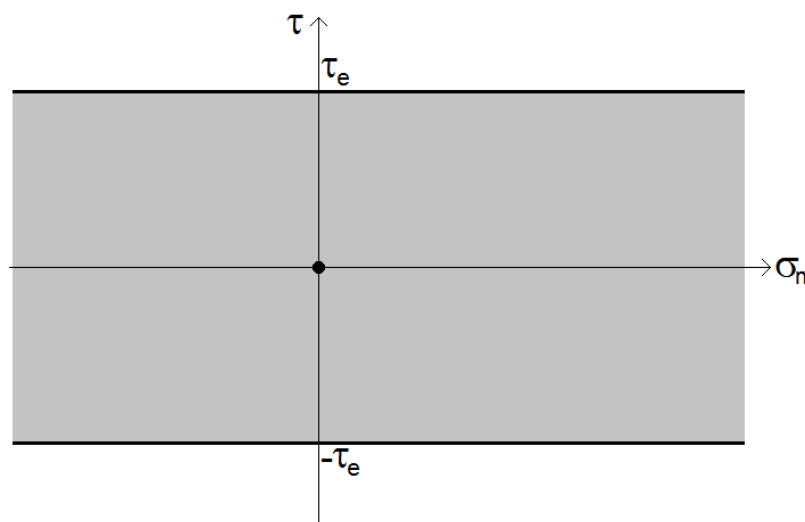


Figure (9.7). Critère de Tresca

Il apparaît sur la Fig. 9.7 que le critère de Tresca délimite un domaine élastique infini selon l'axe horizontal. Un tel matériau ne peut donc pas plastifier par compression hydrostatique ou par traction hydrostatique. Une telle propriété est peu réaliste physiquement. C'est pourquoi on utilise ce critère dans le cas de matériaux soumis à du cisaillement, ou on le combine avec un critère de Rankine convenablement choisi.

Le critère de Tresca est très utilisé en mécanique des sols, car il décrit correctement les limites du comportement élastique des argiles saturées en comportement non-drainé. Dans ce cadre, la valeur maximale de cisaillement τ_e est nommée "cohésion non-drainée" et notée c_u .

3. Critère de Von Mises

Ce critère suppose que seule la partie déviatorique du tenseur de contrainte joue un rôle dans la plastification du matériau. Il se définit mathématiquement par l'expression suivante :

$$f(\bar{\sigma}) = \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] - \sigma_e^2 \quad (9.9)$$

Comme on le voit, le critère de Von Mises fait intervenir un seul et unique paramètre σ_e qui dépend du matériau, mais a en revanche recours aux valeurs des trois contraintes principales et en particulier à la contrainte principale intermédiaire σ_2 . Il est donc impossible de le représenter graphiquement dans le plan de Mohr, et on utilise une représentation 3D, comme dans la Fig. 9.8.

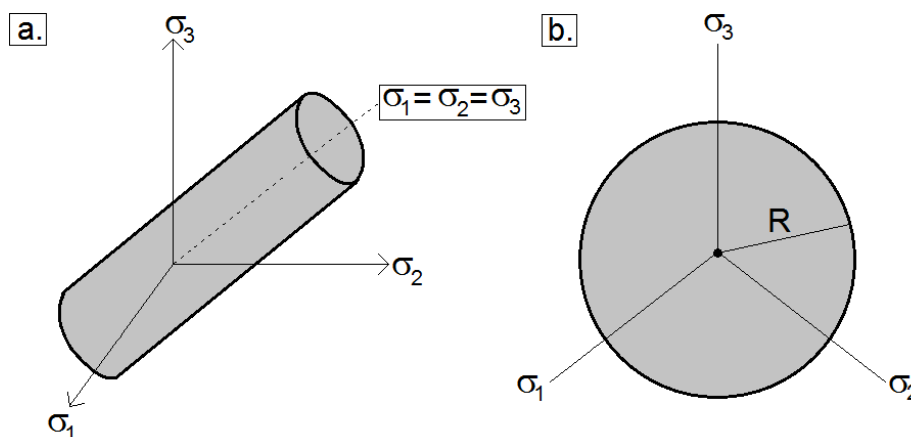


Figure (9.8). Critère de Von Mises : a. Dans le repère $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$; b. En projection selon l'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

Dans l'espace 3D, le critère de Von Mises définit un domaine élastique de forme cylindrique à section circulaire constante, dont l'axe correspond à l'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. En projection dans le plan perpendiculaire à cet axe, ce critère définit donc un cercle dont le rayon est donné par :

$$R = \sigma_e \sqrt{2} \tag{9.10}$$

Ce critère est très souvent utilisé pour les métaux, et notamment pour les aciers.

4. Critère de Mohr-Coulomb

Le critère de Mohr-Coulomb est le critère de plasticité royal de la mécanique des sols. Il dépend de deux paramètres. Le premier est noté φ , s'exprime en degrés, et s'appelle "angle de frottement interne". Le second est noté c , prend les dimensions d'une pression (généralement le kilopascal), et s'appelle "cohésion". Ce critère est défini mathématiquement par :

$$f(\bar{\sigma}) = \sigma_1(1 + \sin\varphi) - \sigma_3(1 + \sin\varphi) - 2c \cdot \cos\varphi \tag{9.11}$$

Puisqu'il ne fait pas intervenir la contrainte principale intermédiaire σ_2 , on peut le représenter dans le plan de Mohr, comme dans la Fig. 9.9.

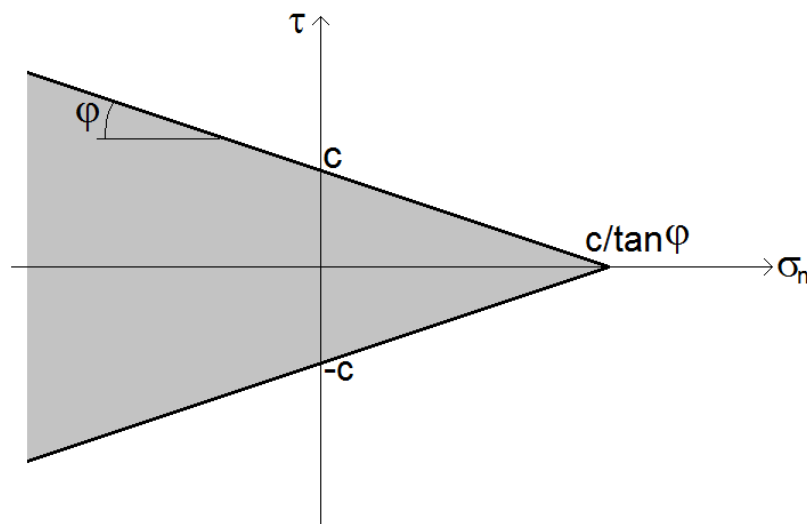


Figure (9.9). Critère de Tresca

Ce critère permet de bien représenter le comportement des matériaux granulaires, de types sables ou argiles. Dans le cas où la cohésion est nulle, le matériau est dit pulvérulent. C'est le cas par exemple du sable sec. Quand l'angle de frottement est nul,

on retrouve le critère de Tresca, qui s'applique avec succès aux argiles en conditions non-drainées.

D'une manière générale, il est nécessaire d'effectuer au moins deux essais triaxiaux de révolution (ou autres essais de cisaillement) pour déterminer la cohésion et l'angle de frottement.

On notera que, dans l'équation (9.11) et dans la Fig. 9.9, on a utilisé les conventions de signes de la mécanique des milieux continus. Dans le cadre de la mécanique des sols où ce critère est utilisé, on utilise généralement la convention inverse, qui compte comme positive une contrainte de compression et négative une traction. Dans ce cas il faut faire basculer la Fig. 9.9 autour de son axe vertical, et il faut également modifier l'équation (9.11). Plus de détails sont disponibles dans n'importe quel cours de mécanique des sols.

Séance 10. Comportement des liquides

A. Généralités sur les liquides

1. Introduction à la mécanique des fluides

L'état liquide fait partie des états fluides, et partage cette caractéristique avec l'état gazeux. Un liquide a la propriété d'être très facilement déformable, mais très peu compressible. On distingue en particulier les liquides des solides par le fait que, si on les soumet à une force constante, ils s'écoulent de manière continue au lieu d'atteindre un nouvel état d'équilibre. Le comportement liquide est donc à rapprocher d'une certaine manière du comportement plastique d'un matériau solide tel qu'il a été défini au chapitre précédent, par cette capacité à subir un déplacement continu sous un effort mécanique constant.

Contrairement au cas des solides où l'on cherche une relation contraintes-déformations, la mécanique des fluides (et en particulier la mécanique des liquides) va donc s'intéresser à mettre en relation contraintes et vitesses de déformation. On parle également de taux de déformation, ce qui incite à se placer dans un cadre eulérien pour lequel ce genre de concept a déjà été présenté au chapitre 3. On préfère également la formulation eulérienne pour de nombreuses autres raisons, et notamment le fait qu'il est très difficile de définir pour un liquide un état de référence parfaitement connu comme nécessaire dans la description lagrangienne.

2. Le fluide parfait

Un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte la notion de viscosité (que l'on définit dans une section ultérieure) et les effets de conductivité thermique. Un tel fluide ne dissipe aucune énergie dans son mouvement, et suit une évolution isentropique (à entropie constante).

Un fluide parfait n'oppose aucune résistance à son écoulement, ne produit aucun frottement sur les solides avec lesquels il entre en contact, et est incapable de transmettre des contraintes de cisaillement. En conséquence, le tenseur de contrainte en tout point d'un fluide parfait a une forme analogue à celui de la contrainte qui règne au sein d'un fluide quelconque au repos : il est sphérique et proportionnel à un scalaire noté p que l'on appelle pression :

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (10.1)$$

Le scalaire p correspond à la valeur locale de la pression, et ne suit pas nécessairement une distribution spatiale proportionnelle à la profondeur comme c'est le cas dans un liquide au repos.

Le fluide parfait est une idéalisation puisqu'aucun fluide réel n'est parfait dans les conditions courantes. Il s'agit donc d'une hypothèse de calcul très pratique et d'usage courant, qui peut rendre service dans certaines conditions particulières. Dans un très grand nombre de cas, néanmoins, cette hypothèse est mise en défaut et on doit introduire la notion de viscosité pour être capable de reproduire de manière réaliste le comportement réel d'un liquide.

3. Notion de viscosité

Imaginons l'expérience suivante : un liquide au repos se trouve entre deux plaques parallèles de grandes dimensions et initialement au repos (Fig. 10.1). On applique alors au temps $t = 0$ à la plaque supérieure une force \vec{F} qui met cette plaque en mouvement à une vitesse constante v_0 . Dans le même temps, la plaque inférieure est maintenue en place à une vitesse nulle.

On considère généralement que des particules liquides (au sens "particules matérielles" et non "particules élémentaires") au contact direct avec un matériau solide ont toujours une vitesse nulle vis-à-vis de ce solide. En appliquant cette hypothèse (soutenue par les résultats expérimentaux) à notre expérience de pensée, on en déduit que les particules de liquide situées en partie supérieure et au contact de la plaque supérieure prennent une vitesse v_0 dès que celle-ci est mise en mouvement (Fig. 10.1). Les particules liquides situées en contact avec la plaque inférieure ont, en revanche, une vitesse identiquement nulle.

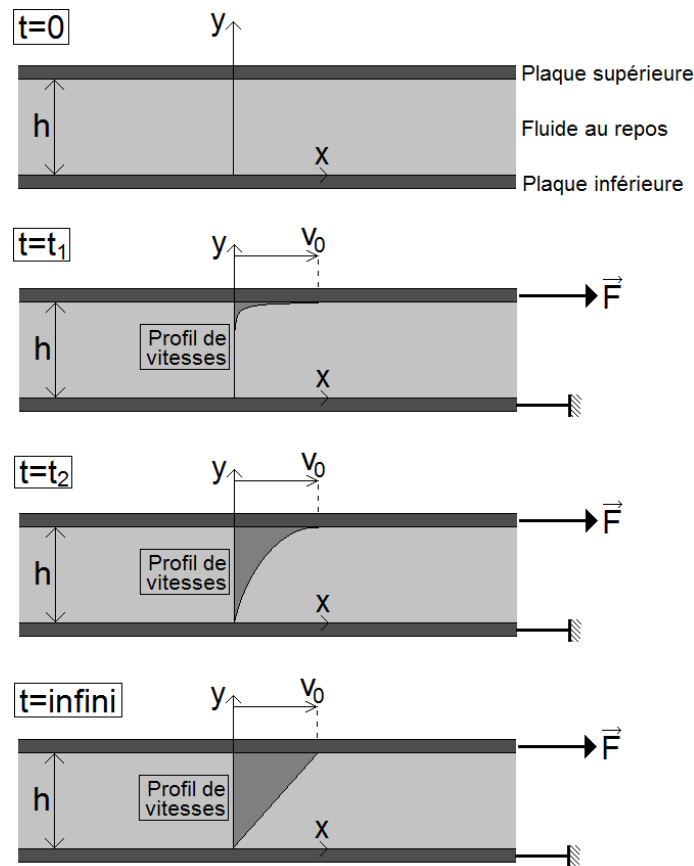


Figure (10.1). Cisaillement d'un liquide

Petit à petit, les particules fluides se déforment et la quantité de mouvement se transmet par cisaillement de haut en bas, entre les couches de liquide successives ($t = t_1$ et $t = t_2$). Au bout d'un certain temps de ce régime transitoire, le profil de vitesses devient linéaire, et la vitesse est donc proportionnelle à la hauteur. Il s'agit du régime stationnaire ($t = \infty$).

Pour maintenir le mouvement à vitesse constante de la plaque supérieure, il est nécessaire d'appliquer constamment la force \vec{F} , sinon le mouvement s'atténue par dissipation d'énergie cinétique au sein du fluide. La viscosité est la propriété du fluide qui définit l'intensité de cette force.

Si on note L la largeur des plaques, la surface cisailée est égale à $A = L \cdot h$, et on peut définir le coefficient de viscosité μ du liquide par l'expression suivante :

$$\frac{\|\vec{F}\|}{A} = \mu \frac{v_0}{h} \quad (10.2)$$

L'unité du coefficient de viscosité est le $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$, que l'on appelle aussi le Poiseuille. La viscosité est donc une résistance du fluide au cisaillement. Pour un

fluide peu visqueux (eau, pétrole, huile) une très faible force est nécessaire à l'entretien du mouvement, tandis que dans un fluide très visqueux (miel, mélasse, goudron) il sera nécessaire d'appliquer une force importante. Pour un fluide parfait, enfin, le cisaillement du fluide n'introduit aucune dissipation d'énergie cinétique, et le mouvement s'entretient donc de lui-même sans qu'il soit nécessaire d'appliquer une quelconque force \vec{F} . Ce comportement est irréaliste physiquement dans le cadre de cette expérience.

En régime stationnaire, le profil de vitesse suit la loi suivante :

$$v_x(y) = v_0 \frac{y}{h} \quad (10.3)$$

On peut écrire que la contrainte de cisaillement introduite dans le liquide par le mouvement de la plaque supérieure est égale à :

$$\tau_{xy} = \frac{\|\vec{F}\|}{L \cdot h} \quad (10.4)$$

Par ailleurs, dans ce cas simple, on peut définir un gradient de vitesse associé au cisaillement par l'expression simple :

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{v_0}{h} \quad (10.5)$$

Finalement, on peut donner une définition plus générale du coefficient de viscosité, en utilisant l'expression suivante :

$$\tau_{xy} = \mu \frac{dv_x}{dy} \quad (10.6)$$

Le coefficient de viscosité est donc le rapport, dans des conditions données, entre le gradient de vitesse lié au cisaillement du liquide et la contrainte de cisaillement qu'il subit. Dans le cadre tridimensionnel d'un écoulement complexe, l'utilisation pratique du coefficient μ est nettement plus compliquée car elle fait intervenir les tenseurs de contraintes et de taux de déformation, mais le principe est le même.

La notion de modèle de comportement dans le cadre de la mécanique des fluides consiste donc à définir la valeur du coefficient de viscosité en fonction de plusieurs paramètres de l'écoulement (température, vitesse de déformation, contrainte subie, etc.). Outre le modèle du fluide parfait, on utilise très souvent un modèle de comportement alternatif : le modèle du fluide newtonien. Celui-ci vérifie la propriété suivante :

$$\mu = \text{constante} \quad (10.7)$$

Le modèle du fluide newtonien donne d'excellent résultats lorsqu'on l'applique à de très nombreux fluides réels, en particulier à l'eau (c'est ce qui fait son succès). De nombreux autres modèles existent pour les fluides plus complexes (sang, gels, béton, boues, cosmétiques, etc.) mais on se concentrera dans ce cours sur les fluides newtoniens uniquement.

B. Application du PFD à un liquide

1. Contraintes dans un liquide

Dans le cas d'un fluide, on a coutume de décomposer le tenseur de Cauchy d'une façon particulière, de manière à faire apparaître la valeur de la pression. On écrit donc :

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + \bar{\tau} \quad (10.8)$$

Dans cette expression, on a fait apparaître le tenseur $\bar{\tau}$, qui est appelé "tenseur des contraintes visqueuses". Ce tenseur est identiquement nul dans deux situations : c'est le cas pour un fluide quelconque au repos (ou pour lequel le mouvement s'effectue sans déformation de cisaillement, c'est-à-dire que toutes les particules fluides se déplacent à la même vitesse), et pour un fluide parfait animé d'un mouvement quelconque.

Pour tout fluide non-parfait soumis à des déformations de cisaillement, en revanche, le tenseur $\bar{\tau}$ n'est pas nul, et on écrit sous forme matricielle dans une base donnée :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (10.9)$$

Sous forme indicielle, on fait intervenir le symbole de Kronecker, et on a :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (10.10)$$

Le tenseur de Cauchy est symétrique, on peut donc déduire des formules précédentes qu'il en est de même pour le tenseur des contraintes visqueuses :

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (10.11)$$

Au chapitre 3 de ce cours, on a défini le tenseur des taux de déformations eulériens $\bar{\bar{D}}$, égal à la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse $\bar{\bar{L}}$:

$$D_{ij} = (\bar{\bar{L}}^S)_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (10.12)$$

On constate que ce tenseur $\bar{\bar{D}}$ a une forme très similaire à celle du tenseur des déformations linéarisées $\bar{\bar{\epsilon}}$, excepté que cette formulation est appliquée au champ de vitesse \vec{V} plutôt qu'au champ de déplacement \vec{U} .

Une loi de comportement fluide est généralement une expression qui fait correspondre un tenseur de contraintes visqueuses à un tenseur des taux de déformations eulériens, soit une fonction \mathcal{F} telle que :

$$\bar{\bar{\tau}} = \mathcal{F}(\bar{\bar{D}}) \quad (10.13)$$

Dans le cas des fluides newtoniens, la fonction \mathcal{F} est linéaire et isotrope, et on peut montrer (par des raisonnements analogues à ceux utilisés pour définir la loi de Hooke en élasticité linéaire) que l'expression (10.13) se reformule par :

$$\tau_{ij} = 2\mu \cdot D_{ij} - \frac{2}{3} tr(\bar{\bar{D}}) \cdot \delta_{ij} \quad (10.14)$$

On peut également écrire cette équation en fonction des gradients de vitesse en utilisant la formule (10.12) et en mettant à profit la notation d'Einstein :

$$\tau_{ij} = \mu \cdot \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \cdot \delta_{ij} \quad (10.15)$$

2. Conservation de la quantité de mouvement

Dans le chapitre 5, on a donné la forme locale du principe fondamental de la dynamique dans le cas très général d'un milieu continu. On appelle également cette formule l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \vec{\gamma} = \overrightarrow{div} \bar{\bar{\sigma}} + \rho \vec{g} \quad (10.16)$$

En notation indicielle et en utilisant la définition de la divergence d'un tenseur, cette formule peut se réécrire :

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (10.17)$$

On peut alors décomposer le tenseur contrainte en deux composantes, l'une liée à la pression et l'autre aux contraintes visqueuses :

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \quad (10.18)$$

A partir de cette expression, on rebascule en notation intrinsèque pour écrire la formule très générale :

$$\rho \vec{\gamma} = \overrightarrow{div}(\vec{\tau}) - \overrightarrow{grad}(p) + \rho \vec{g} \quad (10.19)$$

Dans le cas simplifié d'un fluide parfait, on peut supprimer le terme lié aux contraintes visqueuses puisque celles-ci sont nulles par définition. On aboutit alors à la formule suivante, que l'on nomme équation d'Euler :

$$\rho \vec{\gamma} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{grad}(p) \quad (10.20)$$

Dans beaucoup de problèmes fluides à géométries complexes, on utilise une hypothèse simplificatrice permettant d'appliquer cette formule simple. On considère que le fluide est newtonien au voisinage proche de structures solides immergées (paroi d'un tube d'écoulement, aile d'un avion en vol, coque d'un bateau), et on suppose que la majorité des phénomènes de dissipation énergétique par cisaillement du fluide se déroulent dans cette zone, que l'on nomme "couche limite". On applique dans cette zone des règles propres aux écoulements visqueux cisailés. Dans tout le reste du système, le cisaillement est négligé, et on peut considérer le fluide comme parfait et appliquer l'équation d'Euler. Cette méthode ne peut s'appliquer que sous certaines hypothèses qui sortent du cadre de ce cours d'introduction.

3. Equation de Navier-Stokes

Lorsque le fluide est newtonien, la relation entre les contraintes visqueuses et les taux de déformations eulériens est linéaire et isotrope, comme on l'a vu à la section précédente. On peut introduire cette propriété dans les équations d'équilibre précédentes, et faire intervenir la viscosité directement dans la conservation de quantité de mouvement.

En appliquant le principe d'un fluide newtonien, et notamment l'équation (10.15), on peut réécrire l'un des termes de l'équation (10.18) de la manière suivante :

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu \Delta V_i + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\text{div } \vec{V}) \quad (10.21)$$

Finalement, en réintroduisant cette expression dans (10.18), on a :

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = \mu \Delta V_i + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\text{div } \vec{V}) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \quad (10.22)$$

En écrivant cette expression sous forme intrinsèque, on obtient la célèbre équation de Navier-Stokes :

$$\rho \vec{\gamma} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) + \rho \vec{g} + \mu \Delta \vec{V} + \frac{\mu}{3} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{V}) \quad (10.23)$$

Cette équation est une des formules les plus étudiées de la science contemporaine, puisqu'elle résume en une ligne le comportement d'un fluide newtonien. On peut en détailler les termes :

- $\rho \vec{\gamma}$ est la quantité d'accélération en un point donné.

- $-\overrightarrow{\text{grad}}(p)$ est la variation spatiale de la pression, qui est en quelque sorte le moteur de l'écoulement (car un fluide a toujours tendance à s'écouler des hautes pressions vers les basses pressions).

- $\rho \vec{g}$ est le poids de la particule fluide, et peut être négligée dans les écoulements à forte pression. Il s'agit des écoulements pour lesquels le fluide se déplace plus du fait des gradients de pressions que du fait de la gravité qu'il subit.

- $\mu \Delta \vec{V}$ est la variation spatiale de la vitesse, et est donc une description cinématique de l'écoulement résultant des forces de gravité et de pression. Comme on le voit, c'est en particulier sur ce terme que s'exerce la viscosité μ .

- $\frac{\mu}{3} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{V})$ fait intervenir la divergence de la vitesse, et est donc lié à la variation de volume de la particule fluide. Ce terme est donc égal à zéro si on fait l'hypothèse du fluide incompressible.

Si on fait l'hypothèse d'un mouvement permanent et isochore (fluide incompressible) pour lequel les effets de la gravité sont négligeables, on aboutit à une forme très simplifiée de l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \vec{\gamma} = \mu \Delta \vec{V} - \overrightarrow{\text{grad}}(p) \quad (10.23)$$

Par ailleurs, dans le cas d'un fluide au repos, la quantité d'accélération est nulle ainsi que le champ de vitesse, et on peut écrire :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \rho \vec{g} \quad (10.24)$$

En intégrant cette expression, on retrouve immédiatement l'équation donnant la pression au sein d'un fluide au repos à la profondeur H (Loi de Pascal) :

$$p = \rho g H \quad (10.25)$$

C. Théorème de Bernoulli

1. Forme générale

Lorsque certaines conditions sont réunies, on peut proposer une solution de l'équation de Navier-Stokes applicable à un certain nombre de cas pratiques. Il s'agit du théorème de Bernoulli. Ce théorème est applicable aux écoulements d'un fluide parfait (dénué de viscosité), dont la masse volumique est constante dans le temps et dans l'espace (fluide incompressible homogène) et qui est soumis aux seules forces volumiques de gravité.

Ces conditions sont très souvent vérifiées en pratique, ce qui rend le théorème de Bernoulli utilisable dans un grand nombre de situations. Dans certains cas où les forces visqueuses ne peuvent être négligées, il est même possible d'adapter le théorème de Bernoulli en ajoutant certains termes issus de l'expérience.

Dans le cas d'un fluide parfait et incompressible, on peut réécrire l'équation de Navier-Stokes de la manière suivante :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) + \rho \vec{g} \quad (10.26)$$

Dans un fluide incompressible, le terme de gravité peut se réécrire de la manière suivante, où z représente la coordonnée dans la direction verticale :

$$\rho \vec{g} = -\rho \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(gz) \quad (10.27)$$

Le signe "-" provient du fait que l'axe z est orienté vers le haut. On en déduit :

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}(p) - \overrightarrow{grad}(gz) \quad (10.28)$$

Après un certain nombre d'opérations de calcul tensoriel que l'on ne détaille pas ici, on peut faire disparaître la dérivée matérielle du premier terme, qui est la plus difficile à intégrer, et la remplacer par une expression qui semble plus complexe, mais qui ne fait intervenir que des grandeurs eulériennes :

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) + (rot\vec{V}) \wedge \vec{V} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}(p) - \overrightarrow{grad}(gz) \quad (10.29)$$

Comme le fluide est incompressible la masse volumique est une constante, et on peut écrire :

$$\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}(p) = \overrightarrow{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) \quad (10.30)$$

On définit également la notion de vecteur tourbillon $\vec{\omega}$, tel que :

$$\vec{\omega} = rot\vec{V} \quad (10.31)$$

On rassemble tous les gradients de l'expression (10.29) sous le même opérateur, et on obtient :

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) + \vec{\omega} \wedge \vec{V} = \vec{0} \quad (10.32)$$

Si l'écoulement est permanent, on peut supprimer la dérivée eulérienne du premier terme du premier membre. Par ailleurs, si on définit une direction \vec{s} colinéaire à la vitesse du fluide (qui définit donc la notion de "ligne de courant"), on peut projeter en chaque point l'équation (10.32) sur cette direction et obtenir :

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) \cdot \vec{s} + (\vec{\omega} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{s} = 0 \quad (10.33)$$

Le terme $(\vec{\omega} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{s}$ est un produit mixte qui s'annule car \vec{s} et \vec{V} sont colinéaires (par définition d'une ligne de courant), et on obtient finalement :

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0 \quad (10.34)$$

Le long d'un "filet fluide", le terme dans la parenthèse est donc une constante. Le théorème de Bernoulli peut donc s'énoncer comme suit : dans tout écoulement

permanent et isochore d'un fluide parfait, la quantité $\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz$ est une constante sur une ligne de courant. Cette constante (que l'on appelle parfois constante de Bernoulli) dépend généralement de la ligne de courant.

2. Cas particuliers

Le théorème de Bernoulli trouve la majorité de ses applications dans une classe particulière d'écoulements, appelés écoulements "irrotationnels". Il s'agit des écoulements pour lesquels le vecteur tourbillon est nul, et pour lesquels on a donc :

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{V} = \vec{0} \quad (10.35)$$

Dans ce cas, on peut réécrire l'équation (10.32) de la manière suivante :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = \vec{0} \quad (10.36)$$

Si par ailleurs l'écoulement est permanent, on peut alors écrire :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = \vec{0} \quad (10.37)$$

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{constante} \quad (10.38)$$

On en déduit que, dans un écoulement permanent irrotationnel, la quantité $\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz$ est une constante dans la totalité de l'écoulement.

Les écoulements irrotationnels permanents les plus utilisés sont les écoulements en conduite, qui vérifient souvent ces hypothèses. On fait donc souvent une utilisation intensive de l'équation (10.38) dans les cours d'hydraulique appliqués aux réseaux de conduites, au pompage, etc. Cette équation est l'équivalente hydrodynamique de la loi de Pascal des fluides au repos. Elle traduit la conservation de l'énergie dans l'écoulement du fait de l'absence de viscosité.

Dans de nombreux cas, on ne pourra pas se contenter de l'hypothèse du fluide parfait dans des écoulements en conduite. Plutôt que d'essayer d'intégrer l'équation de Navier-Stokes en prenant en compte les termes visqueux, on utilisera l'équation (10.38) qui exprime une conservation d'énergie, sauf qu'on y ajoutera des termes de dissipation

énergétiques formulés de manière simple, et calés sur des résultats expérimentaux connus. Il s'agira par exemple des dissipations énergétiques dues au frottement du fluide le long de la paroi de la conduite, ou lors d'un rétrécissement brutal de la section d'écoulement. On appellera ces dissipations énergétiques des "pertes de charge".

Séance 11. Techniques de résolution

Dans ce dernier chapitre de cours, on aborde quelques techniques de résolution approchées qui se prêtent bien à une implémentation sous environnement numérique. On va d'abord introduire brièvement la méthode des différences finies, qui est la plus simple d'un point de vue conceptuel. Cette méthode présente néanmoins certains inconvénients qui font qu'on lui préfère souvent la méthode des éléments finis, plus complexe mais beaucoup plus générale et flexible. Dans une dernière partie, on présentera une alternative numérique à la MMC dans le cas d'un matériau granulaire : la modélisation discrète.

A. Méthode des différences finies

1. Principes

Dans les chapitres précédents on a présenté de très nombreuses équations permettant de représenter mathématiquement les relations entre différentes grandeurs au sein d'un matériau continu : déplacements, déformations, contraintes, conditions aux limites (en déformations et en contraintes). Ces équations se présentent toutes sous la forme d'équations aux dérivées partielles (EDP), c'est-à-dire d'équations liant plusieurs variables entre elles par l'intermédiaire de leurs dérivées (ou de leurs dérivées secondes ou d'ordre supérieur) par rapport à plusieurs paramètres spatiaux et temporels. On connaît des solutions d'EDP très simples (EDP linéaires elliptiques, paraboliques, ou hyperboliques, etc.), mais celles qui sont présentées dans le cadre de la MMC sont bien plus complexes.

La méthode des différences finies se propose de produire une solution approchée de ces EDP, en passant par une discrétisation des variables spatiales et temporelles sur le domaine d'étude du milieu continu. On se limitera ici au cas où l'HPP est vérifiée.

2. Discrétisation des dimensions

Imaginons un problème de dimension $n_s + n_t$ (n_s dimensions spatiales + n_t dimensions temporelles). Pour un problème 3D de mécanique des fluides instationnaire, on aura par exemple $n_s = 3$ et $n_t = 1$, tandis que pour un problème d'élasticité plane à l'équilibre on aura par exemple $n_s = 2$ et $n_t = 0$.

Chaque dimension spatiale et chaque dimension temporelle va être discrétisée en intervalles constants. Si on reprend l'exemple de l'élasticité plane, on va donc travailler sur une "grille" qui représentera le milieu continu. Au lieu de chercher à exprimer les vecteurs déplacements et les tenseurs de contraintes et de déformations en tout point du milieu, on va chercher à les exprimer seulement au niveau des nœuds de la grille.

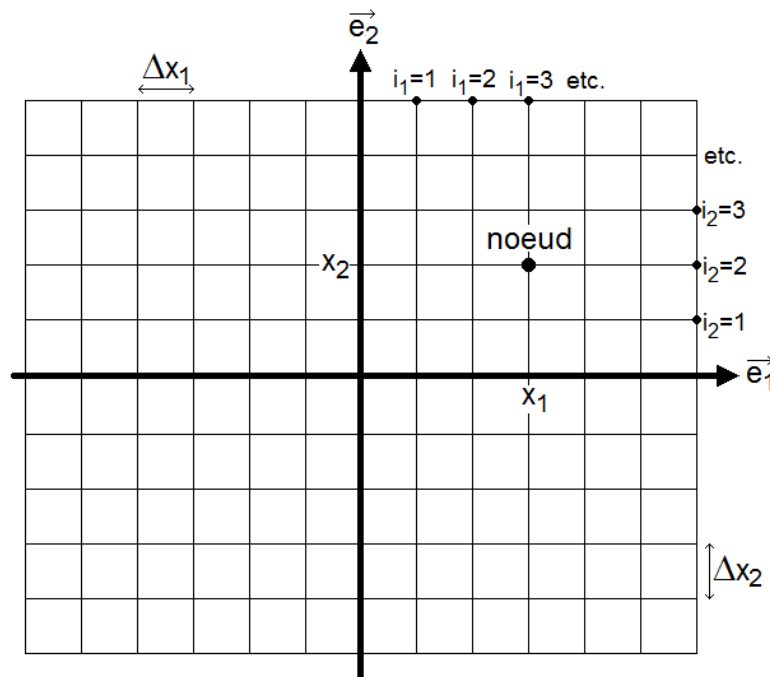


Figure (11.1). Maillage en différences finies (DF)

La figure (11.1) présente un exemple de maillage DF. Les coordonnées d'un nœud peuvent s'exprimer de manière discrète par l'expression suivante :

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 = (i_1 \cdot \Delta x_1) \vec{e}_1 + (i_2 \cdot \Delta x_2) \vec{e}_2 \quad (11.1)$$

Pour le nœud dessiné sur la figure (11.1), on a :

$$\begin{cases} i_1 = 3 \\ i_2 = 2 \end{cases} \quad (11.2)$$

Et on écrira simplement :

$$\vec{x} = 3\Delta x_1 \vec{e}_1 + 2\Delta x_2 \vec{e}_2 = \vec{x}(i_1, i_2) = \vec{x}(3,2) \quad (11.3)$$

La position d'un point de la grille est donc ici entièrement défini par un couple d'indices entiers. Comme l'HPP est vérifiée, on peut supposer que la grille est fixe au cours de la déformation, et que ce système de coordonnées est valable à la fois à l'état initial et à l'état actuel. Dans ces conditions, chaque grandeur exprimée en un point donné de la grille est également défini entièrement par deux indices entiers. Ainsi, au nœud marqué sur la figure, on va avoir un vecteur déplacement $\vec{U}(i_1, i_2) = \vec{U}(3,2)$, un tenseur des déformations linéarisées $\bar{\bar{\epsilon}}(i_1, i_2) = \bar{\bar{\epsilon}}(3,2)$ et un tenseur de Cauchy $\bar{\bar{\sigma}}(i_1, i_2) = \bar{\bar{\sigma}}(3,2)$, entre autres grandeurs intéressantes.

Si on travaille en 3 dimensions il faut rajouter une dimension à la grille, et la position d'un point est donc définie par trois indices entiers, ainsi que chaque grandeur exprimée en ce point. Par ailleurs, si on travaille avec un processus variable dans le temps, la variable temporelle est elle aussi discrétisée en intervalles constants, et chaque instant discret est défini par :

$$t = i_t \cdot \Delta t \quad (11.4)$$

Ainsi, dans le cas d'un problème 3D avec variation temporelle, le déplacement en un point donné sera exprimé ainsi, à l'aide de 4 indices entiers :

$$\vec{U} = \vec{U}(i_1, i_2, i_3, i_t) \quad (11.5)$$

On aura des représentations analogue pour chacune des grandeurs du problème. L'avantage de cette représentation discrète est que, au lieu de travailler avec des quantités infinies d'inconnues (en chaque point de l'espace et du temps), on travaille maintenant avec une quantité finie (chaque point de la grille à chaque instant discret). Même si ces inconnues sont en très grand nombre, le fait qu'elles soient en nombre fini simplifie énormément le problème.

3. Discrétisation des EDP

La méthode des différences finies consiste à remplacer les opérateurs différentiels par des opérateurs discrets équivalents. Considérons par exemple une fonction $f(x)$ dans un espace 1D, qui dépend donc uniquement de la coordonnée x . On peut exprimer de manière discrète sa dérivée sous les formes suivantes :

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (11.6)$$

$$f'(x) \cong \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (11.7)$$

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (11.8)$$

Si la distance h est suffisamment faible, ces formules fournissent une approximation satisfaisante de la pente de f au voisinage d'un point x , donc de $f'(x)$. Les formules (11.6) et (11.7) s'appellent respectivement les approximations à gauche et à droite de f' , et leur précision (l'erreur produite par cette approximation) est de l'ordre de h . La formule (11.8) s'appelle l'approximation centrée de f' , et sa précision est de l'ordre de h^2 . Elle est donc beaucoup plus précise.

En suivant ce raisonnement, on peut écrire l'approximation centrée de la dérivée seconde de f , qui est également de précision h^2 :

$$f''(x) \cong \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \quad (11.9)$$

Il s'agit d'une approximation de la courbure de f au voisinage du point x .

Les formules (11.6) à (11.9), issues de développements de Taylor, peuvent être utilisées dans le cadre d'un maillage DF si on utilise comme paramètre h la largeur de maille correspondante. Ainsi, dans le cas bidimensionnel présenté sur la Fig. (11.1), on peut considérer une grandeur scalaire $u(x_1, x_2)$ et écrire en n'importe quel nœud :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) \cong \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1 - \Delta x_1, x_2)}{2\Delta x_1} \quad (11.10)$$

Il s'agit simplement d'une approximation centrée de la dérivée partielle de u au point (x_1, x_2) . On peut écrire plus généralement en utilisant les indices de position :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(i_1, i_2) \cong \frac{u(i_1 + 1, i_2) - u(i_1 - 1, i_2)}{2\Delta x_1} \quad (11.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(i_1, i_2) \cong \frac{u(i_1, i_2 + 1) - u(i_1, i_2 - 1)}{2\Delta x_2} \quad (11.12)$$

On note qu'on aurait aussi bien pu utiliser les approximations à droite et à gauche si nécessaire. Par ailleurs, on peut calculer une dérivée temporelle de la même façon, en

utilisant le pas de temps Δt à la place du pas d'espace. Par ce type d'opération, on peut remplacer une dérivée par une relation très simple entre des points voisins. Ceci s'étend à tous les opérateurs différentiels présentés dans le cours (gradients, divergences, rotationnels, laplaciens), puisqu'ils s'expriment tous à partir de dérivées partielles.

Finalement, n'importe quelle équation aux dérivées partielles de grande complexité peut se réduire à des relations entre grandeurs exprimées sur les points d'une grille. C'est le cas par exemple du principe fondamental de la dynamique appliquée au milieu en équilibre :

$$\overrightarrow{div\bar{\sigma}} + \rho\vec{g} = \vec{0} \quad (11.13)$$

C'est également le cas de l'équation de Navier-Stokes du fluide newtonien :

$$\rho\vec{\gamma} = -\overrightarrow{grad}(p) + \rho\vec{g} + \mu\Delta\vec{V} + \frac{\mu}{3}\overrightarrow{grad}(div\vec{V}) \quad (11.14)$$

Des équations complexes comme celles-ci se réduisent en systèmes d'équations linéaires de la forme (11.11) ou (11.12) appliquées en chaque nœud de la grille (en espace et en temps). La résolution de ces systèmes linéaires est alors facilement abordable par différentes techniques mathématiques.

On distingue les schémas de résolution implicites des schémas explicites. Un schéma implicite consiste à mettre toutes les équations d'un système sous forme matricielle. La résolution s'effectue alors "d'un bloc", en passant par une inversion de matrice.

A l'inverse, un schéma de résolution explicite cherche à résoudre les équations "de proche en proche". Il s'agit en général de partir d'une ou plusieurs conditions aux limites, puis d'utiliser les équations discrètes au voisinage de ces limites pour déterminer les valeurs des inconnues dans les points voisins, et ainsi de suite jusqu'à avoir couvert la totalité des points du maillage.

Une alternative intéressante est d'utiliser un schéma implicite en espace (à un instant donné on résout un système matriciel complet en couvrant tous les points du maillage spatial) et explicite en temps (la situation à chaque instant est déduite exactement à partir de la situation à l'instant précédent, de proche en proche).

Malgré sa simplicité conceptuelle, la méthode des différences finies est peu utilisée en MMC car il est difficile de l'appliquer à des conditions aux limites complexes. Il est par exemple difficile de mettre en place une grille régulière si le système d'étude a une géométrie très complexe et tourmentée. On a beaucoup plus souvent recours à la méthode des éléments finis, car elle est beaucoup plus flexible vis-à-vis de la géométrie.

B. Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis sort très largement du cadre de la MMC. Il s'agit d'une méthode numérique de résolution d'équations aux dérivées partielles sur des domaines de géométries complexes, qui peut s'appliquer à un grand nombre de situations et de comportements. On la présente ici de manière très sommaire.

1. Formulations forte et faible

On rappelle les équations caractérisant un problème élastique linéaire en HPP sur un domaine D de surface extérieure $S = S_D \cup S_U$:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{grad}} \vec{U} + (\overline{\text{grad}} \vec{U})^T \right) \quad \forall M \in D \quad (11.15)$$

$$\overline{\text{div}} \bar{\sigma} + \rho \vec{g} = \vec{0} \quad \forall M \in D \quad (11.16)$$

$$\bar{\sigma} = \lambda \cdot \text{tr}(\bar{\varepsilon}) \cdot \bar{I} + 2\mu \cdot \bar{\varepsilon} \quad \forall M \in D \quad (11.17)$$

$$\vec{U} = \vec{U}_D \quad \forall M \in S_U \quad (11.18)$$

$$\bar{\sigma} \vec{n} = \vec{T}_D \quad \forall M \in S_T \quad (11.19)$$

L'équation (11.15) est l'équation de compatibilité entre le champ de déplacement et le champ de déformations. L'équation (11.16) est le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'état actuel déformé (et donc à l'équilibre). L'équation (11.17) est la loi de Hooke de l'élasticité linéaire isotrope. Les équations (11.18) et (11.19) sont des conditions aux limites, en déplacements et en contrainte respectivement.

Les 5 équations que l'on vient de présenter forment ce qu'on appelle la formulation forte du problème élastique. La plupart du temps, un problème de MMC se présente sous la forme d'une géométrie (domaine D muni d'une surface extérieure S) et de conditions aux limites appliquées sur les deux parties complémentaires de S . Ces éléments forment les données du problème, et à partir de ces données on cherche l'expression de trois champs en tout point du domaine : le champ de déplacement, le champ de déformations, et le champ de contraintes. Grâce à l'équation (11.15) on peut

facilement calculer les déformations à partir des déplacements, et grâce à l'équation (11.17) on peut facilement calculer les contraintes à partir des déformations. Une des méthodes de résolution est donc de se concentrer uniquement sur la recherche du champ de déplacement \vec{U} , puisque les autres champs recherchés s'en déduisent facilement.

Pour effectuer cette résolution, on définit ce qu'on appelle la formulation faible du problème élastique. Celle-ci fait intervenir le principe des puissances virtuelles. On peut montrer que les 5 équations (11.15) à (11.19) peuvent être résumées sous la forme de l'équation unique suivante :

$$\vec{U} = \operatorname{argmin}_{\vec{u} \in \mathcal{C}(U_D)} P(\vec{u}) \quad (11.20)$$

avec :

$$P(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_D \varepsilon R \varepsilon^T dV - \int_D \rho \vec{g} \cdot \vec{u} dV - \int_{S_T} \vec{T}_D \cdot \vec{u} dS \quad (11.21)$$

Cette expression est d'une certaine complexité et demande quelques commentaires. L'opérateur *argmin* signifie "valeur qui minimise". L'équation (11.20) exprime donc le fait que l'on cherche un champ de déplacement \vec{u} qui minimise la valeur de la fonction scalaire $P(\vec{u})$. Si on obtient ce champ et qu'on est certain que c'est celui pour lequel la fonction $P(\vec{u})$ ne peut pas être plus faible, alors ce champ \vec{u} est égal au champ \vec{U} solution du problème élastique.

La difficulté provient de la partie située sous le *argmin*, c'est-à-dire : $\vec{u} \in \mathcal{C}(U_D)$. Cette partie de la formule stipule que le champ \vec{u} doit être recherché parmi les champs de déplacement qui sont conformes aux déplacements imposés par l'équation (11.18). On dit qu'il s'agit de la classe $\mathcal{C}(U_D)$ des champs cinématiquement admissibles.

L'équation (11.21), qui est le terme que l'on cherche à minimiser, correspond en fait à une énergie potentielle liée à la déformation élastique. Comme souvent en physique, cette formule exprime que le système soumis à des conditions de chargement va chercher à tendre vers un état d'équilibre dans lequel l'état d'énergie est minimum, ce qui explique pourquoi on veut minimiser l'énergie potentielle élastique du système.

La dernière complexité de l'équation correspond au terme $\varepsilon R \varepsilon^T$ apparaissant sous la première intégrale de l'équation (11.21). Dans ce terme, ε correspond au tenseur des déformations calculé à partir du champ \vec{u} , et mis sous la forme d'un vecteur colonne comme dans l'équation (7.10). On a donc :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (11.22)$$

La matrice R est la matrice des raideurs élastiques définie dans la loi de Hooke au chapitre 7 :

$$R = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu \end{bmatrix} \quad (11.23)$$

Le terme $\varepsilon R \varepsilon^T$ est donc bien un scalaire qui dépend de \vec{u} et que l'on intègre sur le domaine. Tous les autres termes de la formule (11.21) nous sont déjà connus.

Pour résumer, on cherche désormais un champ \vec{u} tel que le scalaire $P(\vec{u})$ soit le plus petit possible.

Par le développement de cette formulation faible, on a donc transformé un problème représenté par 5 équations en un nouveau problème qui consiste à trouver le minimum d'une fonctionnelle. Ce problème n'est a priori pas plus simple, mais on va pouvoir proposer des méthodes approchées de résolution.

2. Méthode de minimisation de Galerkin

La méthode de Galerkin est une méthode analytique de résolution approchée du problème de minimisation que l'on vient de construire. On va d'abord la présenter en détails, car la méthode des éléments finis en est une variante.

Le principal problème de la formulation faible telle qu'elle a été formulée dans l'équation (11.20) est que l'espace dans lequel on recherche \vec{u} minimisant $P(\vec{u})$ est de dimension infinie. Il recouvre en effet la totalité des champs de déplacements cinématiquement admissibles.

On imagine bien à quel point il est compliqué de trouver un minimum dans un tel espace. La méthode de Galerkin se propose de restreindre l'espace de recherche. Plutôt que chercher à minimiser $P(\vec{u})$ dans $C(U_D)$, on se limitera à le minimiser dans l'espace plus réduit des champs de déplacements qui s'expriment de la manière suivante :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{u}^D(\vec{x}) + \sum_{k=1}^N \alpha_k \vec{\varphi}_k(\vec{x}) \quad (11.24)$$

On cherche à exprimer \vec{u} comme la somme d'une solution particulière \vec{u}^D (cinématiquement admissible avec les données en déplacement) et d'une combinaison linéaire de fonctions $\vec{\varphi}_k$ (cinématiquement admissibles à un déplacement nul sur la partie S_U de la surface extérieure du domaine).

Concrètement, cela signifie que l'on va choisir judicieusement avant la résolution un champ \vec{u}^D et un certain nombre de champs $\vec{\varphi}_k$ qui vont composer notre base de recherche, et que l'on va s'attacher à trouver les coefficients α_k permettant, dans cette base de recherche, de minimiser l'énergie potentielle $P(\vec{u})$. On a donc transformé un problème de minimisation sur un espace de dimension infinie en un problème approché équivalent, de minimisation sur un espace de dimension finie et égale à N . La qualité de l'approximation sera très largement dépendante du nombre et de la qualité des champs élémentaires \vec{u}^D et $\vec{\varphi}_k$ de la base de recherche.

On peut montrer que la minimisation de $P(\vec{u})$ dans l'espace des champs de déplacements définis par l'équation (11.24) est équivalente à la résolution du système matriciel suivant :

$$K\alpha = F \quad (11.25)$$

Le vecteur colonne α a la dimension $N \times 1$. Il est l'inconnue du problème, et contient tous les coefficients inconnus α_k de la formule (11.24). La matrice carrée K a la dimension $N \times N$ et s'appelle matrice de rigidité. Ses termes se calculent par la formule suivante :

$$K_{ij} = \int_D \varepsilon(\vec{\varphi}_i) \cdot R \cdot \varepsilon^T(\vec{\varphi}_j) dV \quad (11.26)$$

Dans cette expression, le terme $\varepsilon(\vec{\varphi}_i)$ correspond au champ de déformation calculé à partir du champ de déplacement élémentaire $\vec{\varphi}_i$.

Enfin, le vecteur colonne F a la dimension $N \times 1$ et s'appelle vecteur des forces généralisées. Ses termes se calculent par :

$$F_i = \int_D \varepsilon(\vec{u}^D) \cdot R \cdot \varepsilon^T(\vec{\varphi}_i) dV + \int_D \rho \vec{g} \cdot \vec{\varphi}_i dV + \int_{S_T} \vec{T}_D \cdot \vec{\varphi}_i dS \quad (11.27)$$

Par conséquent, pour résoudre un problème d'élasticité avec la méthode de Galerkin, il faut suivre les étapes suivantes :

1. Définir un champ de déplacement $\overline{u^D}$ cinématiquement admissible vis-à-vis des déplacements imposés sur la surface extérieure. Définir également une collection de champs de déplacement $\overline{\varphi_k}$ cinématiquement admissibles à zéro (c'est-à-dire égaux à zéro sur la partie S_U de la surface extérieure au domaine).
2. Calculer les différentes intégrales (de volume ou de surface) permettant de remplir les termes de la matrice de rigidité K et du vecteur des forces généralisées F .
3. Inverser la matrice K
4. Calculer les coefficients α_k par la formule suivante :

$$\alpha = K^{-1}F \quad (11.28)$$

5. Remplacer ces coefficients dans la formule (11.24) et obtenir le champ de déplacement solution du problème.
6. Calculer les champs de déformations et de contraintes correspondant à ce champ de déplacement.

Les étapes les plus compliquées sont évidemment les étapes 1 et 2. Dans l'étape 1, il est souvent extrêmement compliqué de trouver un choix judicieux de champs qui soient compatibles avec les conditions énoncées, surtout lorsqu'on est en présence d'un domaine de géométrie compliquée. Dans ce cas, les intégrales de l'étape 2 peuvent également être impossibles à calculer puisqu'elles sont formulées sur le domaine ou sa surface.

La méthode des éléments finis se propose de lever ces deux difficultés, en mettant en place une méthode systématique de choix des champs de déplacement élémentaires $\overline{u^D}$ et $\overline{\varphi_k}$ et en permettant un calcul simple des intégrales de l'étape 2.

3. Introduction aux éléments finis

Dans cette section, on va se limiter à présenter la méthode des éléments finis (MEF, ou FEM pour "Finite Element Modelling") dans le cas de l'élasticité linéaire isotrope, car c'est un des cas d'application les plus simples de la méthode.

La méthode des éléments finis consiste d'abord à discrétiser le domaine d'étude par un maillage, c'est-à-dire à le partitionner en un grand nombre de petits éléments. En deux dimensions il s'agira de polygones (triangles, rectangles, etc.), et en trois dimensions il s'agira de polyèdres (tétraèdres, parallélépipèdes, etc.). Le maillage doit obéir à certaines règles relatives à la forme des éléments (celle-ci ne doit pas être trop allongée, par exemple), et à leur taille (on ne doit pas juxtaposer des éléments de tailles trop différentes, etc.), afin de garantir la stabilité du calcul. On a coutume d'utiliser des éléments de plus petite taille dans les zones où de grandes variations de contraintes ou de déformations sont attendues, car il s'agit généralement des zones critiques d'un système. D'une manière générale, le choix du bon maillage doit être un compromis entre la précision désirée (maillage suffisamment fin) et le coût en termes de temps de calcul (maillage pas trop fin). La figure (11.2) donne trois exemples de ce genre de maillage.

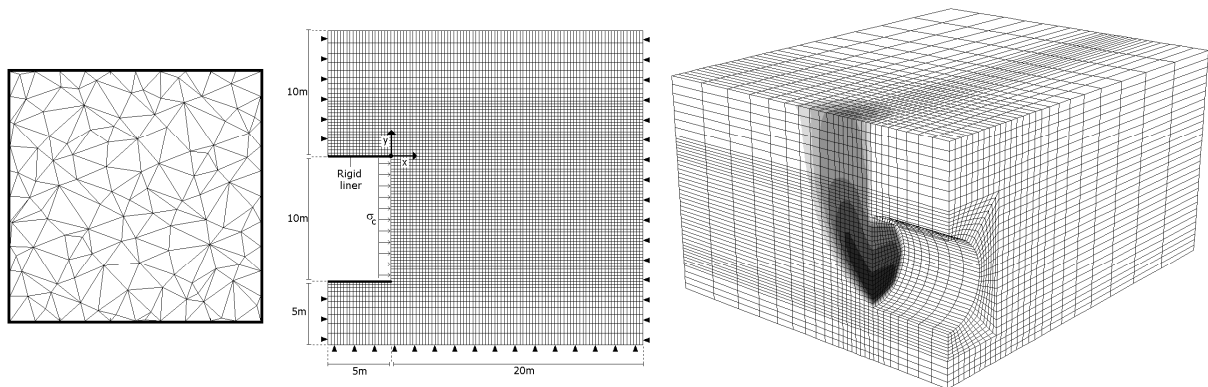


Figure (11.2). Gauche : maillage triangulaire d'un domaine carré ; Milieu : maillage 2D d'un front de taille de tunnel ; Droite : maillage 3D d'un front de taille de tunnel (avec champ de déplacements à l'effondrement)

D'une manière générale, la méthode des éléments finis se propose de lever les difficultés soulevées dans les étapes 1 et 2 de la méthode de Galerkin présentée dans la section précédente. Il s'agit donc d'une technique permettant de postuler une famille de champs de déplacement admissibles pertinente (étape 1), et de rendre aisément calculables les intégrales des expressions (11.26) et (11.27) (étape 2).

Un maillage est défini par un certain nombre de degrés de liberté, qui sont associés aux déplacements de chacun des nœuds du maillage. Si on se place par exemple dans un problème de déformation plane dans lequel la structure étudiée a été discrétisée par un maillage comprenant N_n nœuds, alors son nombre de degrés de liberté est égal à $N_d = 2 * N_n$: chacun des nœuds peut se déplacer selon les deux directions de l'espace.

Parmi ces N_d degrés de liberté, certains sont bloqués : il s'agit des déplacements imposés par l'équation (11.18), qui correspondent aux conditions aux limites en déplacement du problème. Ces degrés bloqués sont au nombre de N_{ab} (ce nombre dépend à la fois du problème et de son maillage). Les autres degrés de liberté sont

parfaitement libres, et constituent les inconnues du problème. Ils sont au nombre de $N_{dl} = N_d - N_{db}$.

Grâce au maillage, on est en mesure de définir un grand nombre de champs de déplacements cinématiquement admissibles, chacun d'eux correspondant à un degré de liberté. On définit par exemple le champ \vec{u}^D , qui apparaît dans la formule (11.27). Dans la méthode de Galerkin, il est stipulé que ce champ doit être cinématiquement admissible avec les conditions aux limites en déplacement imposées au problème. Dans le cadre du maillage, on définit donc ainsi le champ \vec{u}^D : c'est celui pour lequel les N_{db} degrés de liberté bloqués sont déplacés conformément aux conditions aux limites imposées, et pour lequel les N_{dl} degrés de liberté restants sont intacts (déplacements nuls des nœuds concernés dans les directions concernées).

La méthode de Galerkin demande également de définir une collection de champs de déplacements élémentaires notés $\vec{\varphi}_k$, qui doivent être cinématiquement admissibles à un déplacement nul au niveau des conditions limites imposées (surface S_U). Dans le cadre des éléments finis, chacun des ces champs $\vec{\varphi}_k$ est associé à un des N_{dl} degrés de libertés libres du maillage. On définit donc chacun de ces champs $\vec{\varphi}_k$ comme un déplacement unitaire d'un nœud donné dans une direction donnée (ce nœud et cette direction ne devant pas être bloqués par les conditions aux limites), tous les autres degrés de liberté restant intacts. Si on reprend l'équation (11.24) de la méthode de Galerkin, on peut la reformuler et établir que le champ de déplacement recherché est donné par :

$$\vec{u} = \vec{u}^{Db} + \sum_{k=1}^{N_{dl}} \alpha_k \vec{\varphi}_k \quad (11.29)$$

On voit bien que cette formulation comprend la totalité des degrés de liberté du maillage : les N_{db} degrés bloqués au sein du champ \vec{u}^{Db} , et chacun des N_{dl} degrés libres au sein des champs élémentaires $\vec{\varphi}_k$. Les inconnues du problème sont toujours présentes, il s'agit des coefficients inconnus α_k qui sont au nombre de N_{dl} et correspondent à chacun des degrés de libertés libres.

Dans la formule (11.29), la formulation est néanmoins incomplète, car le champ \vec{u}^{Db} et les champs $\vec{\varphi}_k$ sont uniquement définis aux nœuds du maillage. Or les intégrales (11.26) et (11.27) sont définies sur tout le domaine, et on doit donc définir le champ \vec{u}^{Db} et tous les champs $\vec{\varphi}_k$ en chaque point \vec{x} du domaine. Pour ce faire, on a recours à un procédé d'interpolation au sein de chaque élément. Ainsi, le déplacement d'un point quelconque à l'intérieur d'un élément se calcule par interpolation entre les déplacements de tous les nœuds de cet élément, par l'intermédiaire d'une fonction d'interpolation appelée fonction de forme. Celle-ci a en général une forme simple, qui dépend des caractéristiques de chaque élément (dimension, nombre de nœuds, etc.).

Grace à ce procédé d'interpolation, on peut enfin écrire le champ de déplacement recherché sous la forme souhaitée dans la méthode de Galerkin :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{u}^{Db}(\vec{x}) + \sum_{k=1}^{N_{dl}} \alpha_k \vec{\varphi}_k(\vec{x}) \quad (11.30)$$

Suivant la méthode de Galerkin, on va chercher une combinaison des déplacements de chacun des nœuds libres (définie par les coefficients α_k) telle que l'énergie potentielle $P(\vec{u})$ soit minimale. On a déjà écrit que ceci passait par la résolution matricielle du système suivant :

$$K\alpha = F \quad (11.31)$$

La difficulté réside dans le calcul des intégrales (11.26) et (11.27), afin de "remplir" la matrice K et le vecteur colonne F . C'est là qu'intervient la beauté de la méthode des éléments finis. On va tirer parti du fait que les champs $\vec{u}^{Db}(\vec{x})$ et $\vec{\varphi}_k(\vec{x})$ sont définis de manière locale, à partir de déplacements nodaux. De ce fait, les intégrales des formules (11.26) et (11.27) ne sont pas à calculer sur l'ensemble du domaine (qui peut être de géométrie très complexe), mais sur un nombre réduit de petits éléments de formes simples. Généralement, ces intégrales seront calculées numériquement à partir d'une méthode de Gauss, et prenant en compte l'interpolation des champs de déplacements élémentaires au sein des éléments (les fameuses fonctions de formes). Ces intégrales automatisées sont très rapides.

On peut dès lors calculer chacun des termes de la matrice de rigidité K et du vecteur des forces nodales F . Les deux étapes les plus complexes de la méthode de Galerkin sont réalisées. Il reste alors à inverser la matrice K , ce qui constitue généralement la partie la plus coûteuse de la méthode en termes de temps de calculs. De nombreuses méthodes numériques efficaces existent pour cette inversion. On en tire ensuite les déplacements nodaux α_k , qui conduisent à la définition de la totalité du champ de déplacement par l'intermédiaire de l'interpolation de la formule (11.30). Les champs de déformation et de contrainte s'obtiennent ensuite à partir de l'équation de compatibilité (11.15) et de la loi de Hooke (11.17) respectivement.

La méthode des éléments finis est certes plus complexe que la méthode des différences finies, mais elle est d'usage beaucoup plus général car elle s'adapte à tout type de géométrie complexe par l'intermédiaire du maillage. Pour cette raison, la méthode des éléments finis est absolument universelle dans les sciences de l'ingénieur.

C. Méthode des éléments discrets

Comme on l'a démontré dans les premiers chapitres du cours, la mécanique des milieux continus repose sur un certain nombre d'hypothèses qui permettent de transposer dans le monde mathématique certaines observations et intuitions issues de l'observation expérimentale de matériaux réels. L'une de ces hypothèses repose sur la continuité des différents champs de quantités physiques, et en particulier sur la continuité des champs de déplacements.

On peut voir d'emblée deux exemples flagrants de violation de cette hypothèse :

- fissuration, fracturation, et rupture d'un matériau sous certaines sollicitations, bien qu'il ait été continu lors de son fonctionnement avant rupture.

- matériau granulaire, composé d'un très grand nombre de particules distinctes et indépendantes, et donc discontinu par nature.

Le deuxième cas est celui qui nous intéresse ici, car c'est celui le plus souvent rencontré par les ingénieurs géotechniciens qui composent la cible de ce cours. La majorité des sols meubles (sols non-rocheux et non-cimentés) sont en effet des matériaux granulaires qui, à petite échelle, peuvent difficilement être considérés comme continus.

La MMC a depuis longtemps été appliquée à ces matériaux, avec un succès variable selon les cas. Il est souvent nécessaire, en particulier, de pallier cette faiblesse intrinsèque de la théorie en introduisant des modèles de comportement extrêmement complexes afin de rendre compte d'un grand nombre de phénomènes expérimentaux, au prix de paramètres nombreux et pas toujours faciles à déterminer. L'élasticité linéaire, par exemple, est loin d'être suffisante pour décrire le comportement d'un sable ou d'une argile, même dans des conditions courantes.

Dans cette dernière section du cours, on propose une ouverture en sortant du cadre de la MMC. Comme alternative à la complexification croissante des modèles de comportement, on introduit une méthode de résolution plus récente, et d'application pour l'instant limitée : la modélisation discrète. Si de premiers outils professionnels commencent à voir le jour, cette méthode est pour l'instant majoritairement confinée au champ de la recherche. L'avenir dira si ses caractéristiques propres (avantages et inconvénients) en feront un jour une alternative courante à la modélisation continue dans le champ géotechnique.

1. Principes de la modélisation discrète

La méthode des éléments discrets (MED, aussi appelée DEM, pour "Discrete Element Method"), repose sur des bases totalement différentes de celles de la MMC. Au lieu de considérer un milieu continu, on va en effet s'intéresser à la cinématique propre de chacune des particules composant le milieu granulaire. Ces particules en elles-mêmes ne vont pas subir de déformation, mais leurs déplacements relatifs au sein du système étudié va conduire, par changement d'échelle, à des déformations globales du matériau.

Dans sa version la plus courante, la MED fait l'hypothèse que les particules composant le milieu sont de forme sphérique. Lorsqu'on réalise une modélisation bidimensionnelle, on adopte alors des formes circulaires. Modéliser un milieu granulaire va donc revenir à suivre la cinématique (déplacements et rotations) de toutes les particules qui le composent, et qui peuvent également interagir entre-elles.

L'équation principale régissant le mouvement de chacune de ces particules est la deuxième loi de Newton, dans sa formulation adaptée à un solide indéformable :

$$m \cdot \frac{d^2 \vec{x}}{dt} = \vec{F} \quad (11.32)$$

Dans cette équation, \vec{x} représente le vecteur position du centre de la particule, et \vec{F} représente la somme des forces qui lui sont appliquées. Il faut noter qu'une équation similaire à (11.32) existe pour tenir compte de la rotation de la particule (elle fait en particulier intervenir la somme des couples qui lui sont appliqués), mais nous n'entrerons pas dans le détail ici.

A un instant donné, une particule est soumise à la gravité \vec{g} , mais peut également être soumise à plusieurs autres forces si elle entre en contact avec d'autres particules. La force totale \vec{F} que subit une particule est donc une grandeur qui est très variable dans le temps, ce qui va conduire à des trajectoires d'une grande complexité pour chaque particule, au gré de ses collisions ou frottements avec ses particules voisines. Si on s'intéresse à une particule (notée i) en particulier, on peut écrire :

$$m_i \cdot \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt} = \vec{F}_i \quad (11.33)$$

Dans ce cas, la force subie par la particule i est donnée par :

$$\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{g} + \sum_j \vec{F}_{ij} \quad (11.34)$$

La somme qui apparaît dans cette expression s'effectue à partir des efforts de contacts développés par toutes les particules (notées j) qui sont en contact avec la particule i à un instant donné, et qui appliquent donc les forces de contact \vec{F}_{ij} sur la particule i .

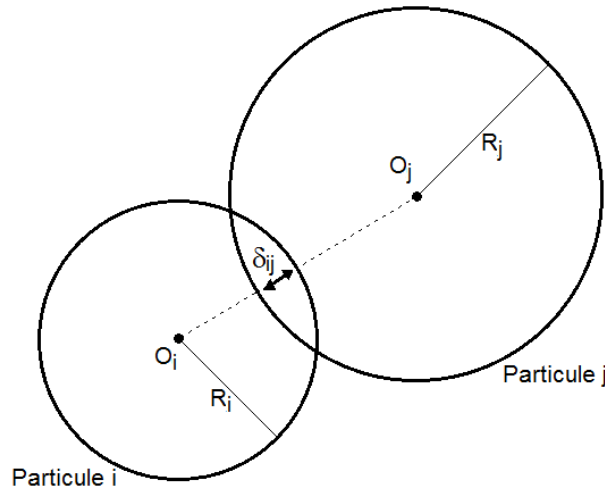


Figure (11.3). Situation d'interpénétration entre deux particules

Le calcul de ces forces de contact est la difficulté majeure de cette méthode. Considérons par exemple la situation décrite dans la figure (11.3). Comme on le constate, il s'agit de deux particules circulaires qui sont, du fait de leurs histoires respectives, entrées en contact. On a posé comme hypothèse que les particules étaient indéformables, on voit donc apparaître une zone de recouvrement entre les deux particules. Cette zone est une approximation des déformations respectives que les deux particules auraient connues si elles étaient déformables. On définit alors une grandeur appelée "distance d'interpénétration entre les particules i et j ", qui s'obtient par la formule suivante :

$$\delta_{ij} = \|\vec{O_i O_j}\| - R_i - R_j \tag{11.35}$$

Si cette grandeur est positive, alors les particules ne sont pas en contact. Si elle est négative, en revanche, elles sont en contact, et une force de répulsion va se développer entre les deux particules afin de les séparer. Une modélisation classique consiste à imaginer que cette répulsion est effectuée par un ressort de raideur k , et que la force répulsive est donc proportionnelle à la distance d'interpénétration. En suivant ce schéma, on peut décrire mathématiquement la force appliquée par la particule j sur la particule i :

$$\vec{F}_{ij} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } \delta_{ij} \geq 0 \\ -k \cdot \delta_{ij} \cdot \vec{n}_{ij} & \text{si } \delta_{ij} < 0 \end{cases} \tag{11.36}$$

Dans cette expression, \overrightarrow{n}_{ij} représente le vecteur unitaire joignant les centres des particules, dirigée de j vers i , et dont l'expression est :

$$\overrightarrow{n}_{ij} = \frac{\overrightarrow{O_j O_i}}{\|\overrightarrow{O_j O_i}\|} \quad (11.37)$$

On rappelle que, selon le principe d'action-réaction la force appliquée par la particule i sur la particule j est donnée par :

$$\overrightarrow{F}_{ji} = -\overrightarrow{F}_{ij} \quad (11.38)$$

Cette situation est relativement simple lorsqu'elle ne concerne que deux particules, mais devient très complexe dès lors que le nombre de particules augmente et que chaque particule est en contact avec plusieurs autres particules. On peut toujours appliquer la formule (11.34) pour calculer la force totale subie à un instant donné par chacune des particules, mais on ne peut plus résoudre l'équation fondamentale (11.33) analytiquement. On va donc faire appel pour cette résolution à une méthode des différences finies explicite, c'est-à-dire qu'on va progresser par petits pas de temps et observer l'évolution du système complet au cours du temps. La MED est donc exclusivement numérique.

2. Algorithme principal

On présente ici le fonctionnement global de l'algorithme principal d'une modélisation discrète. Le but de cet algorithme est de réaliser une résolution explicite de l'équation fondamentale (11.33) par pas de temps successifs. Le schéma de résolution repose sur le fait qu'on ne peut pas résoudre analytiquement cette formule sur un grand intervalle de temps (car les forces subies par les particules varient en permanence du fait des mouvements des particules), mais qu'on peut la résoudre sur un très petit intervalle de temps (car les forces n'auront pas le temps de varier).

Si on se place ainsi à un instant t , on peut calculer la résultante de force appliquée à une particule donnée i , et donc calculer son accélération en appliquant l'équation (11.33). A partir de cette accélération, on peut alors en déduire la nouvelle position de la particule à un instant $t + \Delta t$ très proche de l'instant précédent, en intégrant le premier terme de l'équation (11.33). On peut effectuer cette opération sur chacune des particules composant le système, et ensuite passer au pas de temps suivant, etc.

De proche en proche, on peut ainsi faire s'écouler le temps, et suivre l'évolution du système et la cinématique de chacune des particules qui le composent. De manière plus formelle, l'algorithme principal est fourni dans la figure (11.4).

1. Définir les N particules (tailles, positions, etc.)
2. Définir un pas de temps Δt
3. Définir à quel instant t_{fin} la simulation s'arrêtera
4. Initialiser le temps : $t = 0$
5. Tant que $t < t_{fin}$, faire tourner la boucle principale suivante :
 6. Pour tous les grains i , de 1 à N :
 7. Initialiser la force totale subie par i : $\vec{F}_i = \vec{0}$
 8. Pour tous les grains j , de 1 à N :
 9. Calculer δ_{ij} , l'interpénétration entre i et j
 10. Calculer \vec{F}_{ij} , force appliquée par j sur i
 11. Mettre à jour la force totale reçue par i : $\vec{F}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{ij}$
 12. Fin de la boucle sur j
 13. Calculer l'accélération de la particule i à partir de la force \vec{F}_i subie
 14. Fin de la boucle sur i
 15. Pour tous les grains i , de 1 à N :
 16. Calculer la nouvelle position de la particule i
 17. Fin de la boucle sur i
 18. Avancer dans le temps : $t = t + \Delta t$
 19. Fin de la boucle principale

Figure (11.4). Algorithme général d'une modélisation discrète

Comme on le voit, cet algorithme consiste principalement en trois boucles imbriquées les unes dans les autres : la boucle temporelle principale, et une double boucle qui couvre tous les contacts potentiels entre chaque paire de particule. Ces trois boucles sont le point faible principal de cette méthode : comparée aux approches continues, ses temps de calculs sont immenses, et sont par fois totalement hors de portée pour des systèmes contenant un grand nombre de particules.

3. Versions améliorées de la méthode

La méthode de simulation discrète telle qu'elle a été présentée dans la section précédente reste assez grossière, et ne peut pas prétendre représenter correctement la réalité d'un milieu granulaire complexe tel qu'un sable ou une argile. En pratique, des versions nettement plus complexes de la méthode sont utilisées.

Les lois de contact entre différentes particules sont par exemple souvent plus complexes que la simple loi élastique qui a été présentée plus haut. On doit également

tenir compte de forces tangentielles entre les particules, liées au fait qu'elles ne peuvent pas glisser librement les unes sur les autres du fait de leurs rugosités de surface. Elles peuvent parfois glisser mais vont alors développer des forces de frottement. On doit donc définir une loi de contact tangentielle, de la même manière qu'on a défini une loi de contact normale dans les sections précédentes. Toutes ces lois peuvent aussi être munies d'un paramètre d'amortissement pour tenir compte des dissipations d'énergie lors des contacts. Enfin, on utilise parfois des lois de contact non-linéaires.

La deuxième source possible d'amélioration tient à l'introduction de particules non-circulaires (ou non-sphériques, si on travaille en 3D). Cette introduction peut s'effectuer par l'intermédiaire de "clumps" (assemblages de disques parfaitement rigides), ou de polygones, voir même de sphéropolygones (assemblages de polygones et de disques).

Des approches modernes consistent à ajouter un paramètre de cohésion (similaire à de la "colle" mise en place entre les particules) ou à prendre en compte l'interaction entre les particules et un fluide environnant. Ces approches visent à modéliser respectivement les milieux cohésifs et les milieux granulaires saturés.

Enfin, une piste d'amélioration très suivie consiste à optimiser l'algorithme principal de la section précédente (en introduisant des techniques de détection de voisinage, ou des méthodes de gestion judicieuse de la mémoire informatique) afin de pallier autant que possible au principal défaut de la méthode : les temps de calcul.