



INTRODUCTION A LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

PARTIE 1

Guilhem MOLLON

*Polytech Grenoble
Département Géotechnique, Troisième année
Edition 1, 2012-2013*

Table des matières

Table des matières	2
Avertissement au lecteur	4
Séance 1. Introduction, Mathématiques	5
A. Introduction à la MMC	5
1. Quelques définitions	5
2. Positionnement de la MMC au sein de la mécanique	5
3. Hypothèses principales de la MMC	6
4. Typologie des milieux continus	7
5. Applications de la MMC	7
6. Esprit du cours	8
B. Rappels d'algèbre tensorielle	9
1. Espaces	9
2. Notation d'Einstein	9
3. Symboles de Kronecker et de Lévi-Civita	10
4. Tenseurs	11
5. Changements de base, Invariants, Base principale	13
6. Opérations sur les tenseurs	15
C. Rappels d'analyse tensorielle	17
1. Nécessité d'une analyse tensorielle	17
2. Gradient	18
3. Divergence	19
4. Laplacien	19
5. Rotationnel	20
6. Formules de transformations d'intégrales	20
Séance 2. Cinématique	22
A. Définitions	22
B. Points de vue de Lagrange et d'Euler	23
1. Description lagrangienne du mouvement	23
2. Description eulérienne du mouvement	25
3. Relations entre les deux descriptions	26
C. Lignes caractéristiques	26
D. Dérivée particulaire	27
1. Appliquée à un champ scalaire	27
2. Appliquée à un champ vectoriel ou tensoriel	28
3. Appliquée à un domaine matériel	29
4. Appliquée à une intégrale de volume	30
E. Quelques cinématiques particulières	31
1. Le mouvement permanent	31
2. Le mouvement isochore	32
3. Le mouvement plan	33
4. Le mouvement de révolution	33
Séance 3. Déformations	34

A. Point de vue de Lagrange	34
1. Tenseur gradient	34
2. Dilatations et glissements	35
3. Déformations	37
4. Déplacements	38
5. Mouvement rigidifiant	39
B. Point de vue d'Euler	40
Séance 4. Calcul pratique des déformations	42
A. Hypothèse des petites perturbations	42
B. Tenseur des déformations linéarisées	43
C. Valeurs propres et base principale de ϵ	45
D. Etats de déformation particuliers	47
1. Dilatation isotrope	47
2. Extension simple	48
3. Glissement simple	49
4. Déformation plane	50
E. Conditions de compatibilité	51
Séance 5. Relations fondamentales de la mécanique	52
A. Conservation de la masse	52
1. Axiome	52
2. Forme intégrale et forme locale	53
3. Notion de débit-masse	54
B. Principe fondamental de la dynamique	56
1. Notion de contrainte	56
2. Définitions	57
3. Principe fondamental de la dynamique	58
C. Autres principes fondamentaux	61
1. Théorème de l'énergie cinétique	61
2. Principe des puissances virtuelles	62
3. Premier et second principes de la thermodynamique	62
Séance 6. Contraintes	64
A. Théorème de Cauchy	64
B. Directions principales, invariants	65
C. Cercle de Mohr	68
1. Principes	68
2. Contrainte de cisaillement maximal	71
3. Description du grand cercle de Mohr	72
D. Etats de contrainte particuliers	78
1. Traction ou compression hydrostatique	78
2. Traction ou compression simple dans une direction	78
3. Cisaillement simple	80
4. Etat de contrainte triaxial de révolution	81
5. Etat de contrainte plane	82

Avertissement au lecteur

Ce polycopié est un support aux cours de mécanique des milieux continus du département Géotechnique de Polytech Grenoble. Il ne peut pas être considéré comme complet ou exhaustif, et pourra seulement servir de complément aux cours magistraux et d'aide-mémoire. Il introduit les concepts de base, leur signification et leur utilisation, mais ne s'attarde pas sur les démonstrations ni sur les parties les plus complexes de la théorie. Pour une approche plus rigoureuse et plus complète, il est vivement recommandé de se procurer l'un des innombrables ouvrages de MMC disponibles à la bibliothèque universitaire (ou chez tout bon libraire scientifique), ou de chercher un cours sur le net (il y en a beaucoup).

La partie 1 du cours (à peu près 6 séances), développe la partie la plus abstraite de la théorie, en présentant les différentes grandeurs qui caractérisent d'une part les déformations d'un système mécanique, et d'autre part les efforts intérieurs et extérieurs présents dans ce système, sans développer de lien entre ces déformations et ces efforts. Cette tâche sera dévolue à la partie 2 du cours (6 séances également), qui introduira la notion de modèle de comportement et présentera quelques exemples fondamentaux de comportements solides et liquides. Cette seconde partie s'intéressera aussi brièvement aux méthodes de résolution d'un problème concret.

Séance 1. Introduction, Mathématiques

A. Introduction à la MMC

1. Quelques définitions

-Mécanique. Il s'agit de la branche de la physique qui décrit les mouvements et les équilibres d'un système.

-Milieu. On ne parle pas ici de matériau mais de milieu. On est donc en présence d'une théorie « abstraite », qui est dans un premier temps éloigné de la réalité physique et expérimentale. Ceci permet à cette théorie de rester le plus général possible. Elle ne se spécialisera en différentes branches (traitant de différents matériaux) que plus tard dans le cours.

-Continu. La notion de continuité est intimement liée à celle d'échelle. On va présenter une théorie abstraite, mais on doit garder à l'esprit qu'elle sera appliquée au monde physique. Tous les matériaux réels sont discontinus à petite échelle (molécules, cristaux, grains de sables, etc.). Un matériau réel sera donc considéré comme continu (cette notion sera précisée) à condition que l'on soit suffisamment loin, ou suffisamment myope.

D'une manière plus générale, la MMC est une construction mathématique. On dira qu'il s'agit d'une modélisation. En d'autres termes, c'est une représentation abstraite du monde physique qui repose sur des hypothèses que nous savons plus ou moins vraies selon les applications. Comme toujours dans les sciences physiques, le critère royal pour déterminer si la théorie est valide dans un cas donné est bien connu : il s'agit de l'expérimentation.

2. Positionnement de la MMC au sein de la mécanique

La plus simple des mécaniques « modernes » est la mécanique du point (fondée sur les résultats de Newton). Elle permet de déterminer la position, la vitesse et l'accélération d'un « point matériel », c'est-à-dire d'un objet mathématique sans « forme » ni « volume », mais muni d'une masse et soumis à des forces. C'est la théorie utilisée par exemple pour étudier le mouvement des planètes sur leur orbite.

L'étape suivante est la mécanique du solide indéformable. Elle reprend les ingrédients de la mécanique du point, mais ajoute au système d'étude une « forme », et donc un volume et une distribution spatiale de la masse. Cette mécanique introduit les notions de rotation, d'inertie, et de moment. Elle s'applique par exemple très bien à l'étude des systèmes articulés (robotique, etc.) ou à l'étude micromécanique du sable.

L'ajout essentiel de la MMC est d'introduire la possibilité pour le système de se déformer. Bien entendu, ceci complique énormément la théorie, et va notamment rendre nécessaires des outils mathématiques beaucoup plus sophistiqués que pour les deux premières mécaniques.

3. Hypothèses principales de la MMC

La MMC est une mécanique dite « classique », ce qui signifie que :

- l'échelle du problème est très grande devant la taille des particules élémentaires. La MMC n'est donc pas quantique.
- la vitesse de la matière est très faible devant celle de la lumière. La MMC n'est donc pas relativiste.

L'hypothèse principale de la MMC est nommée hypothèse de continuité. Elle stipule que les propriétés de la matière (densité, propriétés mécaniques, etc.) sont continues. Ceci implique qu'elles peuvent être décrites par des objets mathématiques continus et dérivables (au moins par morceaux). On nommera ces objets des champs, et ils dépendront à la fois de l'espace et du temps.

D'une manière générale, cela signifie que la MMC, lorsqu'elle sera appliquée au monde réel, s'intéressera à des moyennes locales. Il est impossible de déterminer le mouvement de chacune des particules élémentaires constituant un système physique (à titre d'exemple, un millimètre cube d'air ambiant comporte environ 10^{18} molécules), donc on devra s'intéresser à un volume suffisamment grand pour le considérer continu. A titre d'exemple, la pression exercée par un fluide sur une paroi solide est due à une multitude d'impact de molécules du fluide sur le solide, et on ne la représentera pourtant que par un scalaire (qui sera l'effet mécanique moyen de ces impacts sur un petit intervalle de temps et sur une petite surface du solide).

Par la suite on introduira progressivement un certain nombre d'autres hypothèses au sein de la théorie (hypothèses des petites perturbations, conservation de la masse, principe fondamental de la dynamique, etc.), lorsque l'on sentira que la théorie est « bloquée » sans l'apport de ces hypothèses.

4. Typologie des milieux continus

La matière que l'on connaît dans le monde physique est souvent considérée comme étant dans l'un des trois états bien connus : solide, liquide, gazeux. Ces trois états peuvent prétendre, sous diverses conditions, au statut de milieu continu (même si c'est moins facile pour l'état gazeux, mais celui-ci intéresse assez peu les géotechniciens après tout).

On peut aussi proposer un grand nombre d'états intermédiaires : fluide, pâteux, mou, épais, plastique, visqueux, etc. Par exemple, un morceau de raclette soumis aux sollicitations thermiques d'un poêlon va passer progressivement de solide à liquide, mais on ne sait pas vraiment définir à quel moment s'opérera exactement la transition. On se rend compte que les frontières entre les trois états classiques de la matière sont finalement assez flou.

La MMC se place au dessus de ces considérations. Dans un premier temps, on va donc mettre de côté toute notion de « consistance », et proposer une modélisation mathématique de la déformation d'un milieu qui ignore complètement cette notion. Ce n'est que dans un deuxième temps que l'on introduira le concept de modèle de comportement, et que l'on imaginera des modèles mathématiques (fondés sur l'expérience et/ou sur des considérations physiques) propres à chaque application dans le monde physique.

5. Applications de la MMC

En tant que théorie de la déformation de la matière, la MMC est absolument omniprésente dans l'ingénierie. Même si tous les ingénieurs ne peuvent pas prétendre la comprendre parfaitement, l'immense majorité d'entre eux s'en servent (parfois sans le savoir), au moins par l'intermédiaire de logiciels de calcul mécanique.

Parmi les applications les plus évidentes, on peut citer :

- Les procédés industriels (emboutissage, usinage, etc.), l'industrie mécanique (automobile, machines-outils, aéronautique, etc.), la biomécanique, les matériaux composites, la micromécanique, la mécatronique, etc.
- Les structures de génie civil, bâtiments, ponts, barrages, routes, en béton, acier, bois, aluminium, etc.
- La mécanique des fluides, l'aérodynamique, les écoulements en canaux et conduites, les écoulements fluviaux et souterrains, etc.
- La géophysique, la mécanique des sols, la mécanique des roches, etc.

- Beaucoup d'autres disciplines scientifiques et techniques.

La MMC est donc l'un (si ce n'est le principal) des langages communs à tous les ingénieurs. Dans les premières parties de sa formulation (comme par exemple ce polycopié), elle a le statut de science. Au cours de ses diverses applications, elle est ensuite déclinée en très nombreuses techniques d'ingénierie propres à chaque discipline.

Pour l'ingénieur géotechnicien, la MMC (couplée à des disciplines secondaires, comme la mécanique des sols ou la mécanique des fluides) intervient directement ou indirectement lorsqu'on doit répondre par exemple aux questions suivantes :

- De combien de millimètres ma fondation va-t-elle tasser sous cette charge ?
- Au bout de combien de temps le tassement final sera-t-il atteint ?
- Quel chargement ce soutènement peut-il supporter avant de céder ?
- Ce talus sera-t-il stable en cas de grosse pluie ?
- Quel débit d'eau va s'infiltrer au travers de ce barrage ?

Il s'agit d'un très petit nombre d'exemples parmi une multitude. D'une manière générale, la MMC interviendra dès que l'on aura à traiter des problèmes de rigidité, de résistance, de stabilité, ou d'écoulement.

6. Esprit du cours

La plupart des équations présentées lors de ce cours sont d'une grande complexité mathématique. Pour la grande majorité d'entre elles, il est impossible de les résoudre analytiquement à la main. D'ailleurs, dans le cadre de ce cours, ce n'est pas nécessaire. Notre intérêt premier dans cette initiation à la MMC sera de poser des équations, et non pas de les résoudre.

Bien entendu, les ingénieurs disposent d'un arsenal de méthodes numériques pour effectuer cette résolution (ce qui est plutôt rassurant quant à l'utilité de la théorie). On abordera rapidement ces méthodes à la fin du module. Néanmoins, pour profiter pleinement des apports de ce cours, il vaut mieux oublier complètement la notion de résolution dans un premier temps. On se concentrera beaucoup plus sur la théorie, et sur les raisons profondes qui nous font poser de tels systèmes d'équations.

B. Rappels d'algèbre tensorielle

La MMC est avant tout une théorie mathématique, et repose sur un formalisme un peu compliqué si on ne l'introduit pas avec clarté. C'est l'objet de cette section (et de la suivante). Il faut bien préciser qu'il ne s'agit en aucun cas d'un cours de maths (le niveau de rigueur n'est pas suffisant pour prétendre à ce statut), mais plutôt d'une caisse à outils pour le mécanicien.

1. Espaces

La mécanique des milieux continus se place dans un cadre à trois dimensions d'espace et une dimension de temps. L'espace de la MMC est un espace affine P_3 (ensemble des « points » de l'espace en 3 dimensions), assorti d'un espace euclidien E_3 (espace vectoriel muni d'un produit scalaire). E_3 est muni d'une base orthonormée :

$$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \quad (1.1)$$

On peut également choisir un point O comme origine, et munir E_3 du repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

La mécanique étant la science du mouvement, il faut introduire le temps. On se place dans le cadre de la mécanique classique, c'est-à-dire que le temps est absolu, et muni d'une structure de droite orientée dont chaque élément est appelé « instant » et noté t .

2. Notation d'Einstein

Pour alléger les notations, on utilise très couramment en calcul tensoriel la convention de notation d'Einstein, également appelée notation indicielle ou convention de l'indice muet. Cette convention précise que, si un indice (indiquant un des axes \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , ou \vec{e}_3 de la base) apparaît deux fois dans un même terme, on lui fera prendre les valeurs 1, 2, 3 et on fera la somme de l'ensemble.

Par exemple, si l'on rencontre le terme $a_i \cdot b_i$ dans une équation, il faut plutôt comprendre $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$. Par conséquent, on aura

$$a_i \cdot b_i = a_j \cdot b_j = a_\beta \cdot b_\beta \quad (1.2)$$

ce qui explique pourquoi cet indice est nommé indice muet : la lettre le représentant n'a aucune importance, la seule chose importante est qu'il est répété et donc qu'il faut faire la somme de 1 à 3.

Dans le cas (rare) où on ne voudrait pas répéter l'indice, on a coutume de le souligner, comme par exemple dans le monôme $a_{\underline{i}} \cdot b_{\underline{i}}$. Dans ce cas, l'indice i est nommé indice franc, et prendra la valeur 1, 2, ou 3. Finalement :

$$a_{\underline{i}} \cdot b_{\underline{i}} \neq a_{\underline{j}} \cdot b_{\underline{j}} \neq a_i \cdot b_i = a_j \cdot b_j = \sum_{i=1}^3 a_{\underline{i}} \cdot b_{\underline{i}} \quad (1.3)$$

On combinera souvent les deux types d'indices. Par exemple, dans $a_{ij}b_j$, i est un indice franc et j est un indice muet. Donc :

$$a_{ij}b_j = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \cdot b_{\underline{j}} = a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + a_{i3}b_3 \quad (1.4)$$

Pour exprimer un vecteur \vec{U} dont les coordonnées sont (U_1, U_2, U_3) dans une base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on peut donc tout à fait écrire (et on le fera très souvent) :

$$\vec{U} = U_i \vec{e}_i \quad (1.5)$$

De même, le produit scalaire de deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} va s'écrire :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = U_i V_i \quad (1.6)$$

Cette notation est extrêmement répandue, et beaucoup plus pratique qu'il n'y paraît au premier abord.

3. Symboles de Kronecker et de Lévi-Civita

Deux termes apparaissent souvent dans le calcul tensoriel et permettent aussi d'alléger les notations.

- Le symbole de Kronecker δ_{ij} , qui vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$. En combinant avec la notation d'Einstein, on aura par conséquent :

$$\begin{aligned} \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = \delta_{\underline{ii}} &= 1 \\ \delta_{ii} = \delta_{jj} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} &= 3 \\ \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

- Le symbole de permutation ε_{ijk} , dit symbole de Lévi-Civita, utilisé plus rarement mais très utile pour le calcul des déterminants et des produits vectoriels :

$\varepsilon_{ijk} = 0$ si deux indices sont identiques

$\varepsilon_{ijk} = 1$ si (i,j,k) est une permutation paire de $(1,2,3)$, comme $(2,3,1)$ et $(3,1,2)$

$\varepsilon_{ijk} = -1$ si (i,j,k) est une permutation impaire de $(1,2,3)$

4. Tenseurs

On va d'abord présenter les tenseurs du second ordre, et on précise d'emblée que, dans toute la suite du cours et sauf indication contraire, le mot « tenseur » signifiera implicitement « tenseur d'ordre 2 ».

Pour utiliser des termes d'algèbre linéaire, un tenseur d'ordre 2 est une forme bilinéaire de $E_3 \times E_3$ dans l'espace des réels. Il fait donc correspondre à deux vecteurs quelconques un nombre réel, et est linéaire par rapport à chacun de ses arguments. Un tenseur de second ordre est noté $\bar{\bar{T}}$. Lorsqu'on l'applique à deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} , on obtient le scalaire noté $\bar{\bar{T}}(\vec{U}, \vec{V})$. Dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on appelle composantes de $\bar{\bar{T}}$ les 9 scalaires donnés par :

$$T_{ij} = \bar{\bar{T}}(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \quad (1.8)$$

Par conséquent, dans une base B (et cette précision est très importante), un tenseur peut être représenté par une matrice 3×3 de la manière suivante :

$$\bar{\bar{T}} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Comme dans la notation matricielle classique, dans le terme T_{ij} le premier indice i est un indice de ligne et le deuxième indice j est un indice de colonne.

Il est très important de noter qu'un tenseur n'est pas une matrice. En revanche, si on choisit une base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, un tenseur se représente par une matrice. Mais si on prenait le même tenseur $\bar{\bar{T}}$ et qu'on souhaitait l'exprimer dans une base différente notée $B' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$, alors le terme générique T'_{ij} de la matrice de $\bar{\bar{T}}$ dans cette base n'aurait aucune raison de ressembler au terme T_{ij} de la matrice correspondant à la première base.

Si on reste dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on peut écrire le résultat de $\bar{\bar{T}}$ appliqué à \vec{U} et \vec{V} :

$$\bar{\bar{T}}(\vec{U}, \vec{V}) = T_{pq} U_p V_q \quad (1.10)$$

Si on explicite la notation d'Einstein dans cette expression (et c'est l'une des dernières fois qu'on se donne cette peine dans ce cours), on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{T}(\vec{U}, \vec{V}) = & T_{11}U_1V_1 + T_{12}U_1V_2 + T_{13}U_1V_3 \\ & + T_{21}U_2V_1 + T_{22}U_2V_2 + T_{23}U_2V_3 \\ & + T_{31}U_3V_1 + T_{32}U_3V_2 + T_{33}U_3V_3 \end{aligned} \quad (1.11)$$

On voit bien ici tout l'intérêt de la notation d'Einstein.

Un tenseur d'ordre 2 est une forme bilinéaire, mais c'est aussi une application linéaire de E_3 dans E_3 , c'est-à-dire qu'à tout vecteur \vec{U} il peut faire correspondre un vecteur \vec{V} tel que :

$$\vec{V} = \bar{T}\vec{U} \quad (1.12)$$

Les composantes du vecteur \vec{V} dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont alors données par :

$$V_i = T_{ij}U_j \quad (1.13)$$

On reconnaît ici une vieille connaissance, le produit d'une matrice T par un vecteur colonne U. Finalement, en introduisant le produit scalaire entre deux vecteurs (noté « . »), on peut noter que :

$$\bar{T}(\vec{U}, \vec{V}) = \vec{U} \cdot \bar{T}\vec{V} \quad (1.14)$$

Maintenant que les présentations sont faites, on peut introduire quelques définitions. On notera \bar{T}^T le tenseur transposé de \bar{T} , c'est-à-dire le tenseur tel que :

$$\bar{T}^T(\vec{U}, \vec{V}) = \bar{T}(\vec{V}, \vec{U}) = T_{pq}U_qV_p \quad (1.15)$$

Un tenseur égal à son transposé, c'est-à-dire tel que $\bar{T}^T = \bar{T}$, sera appelé tenseur symétrique. Dans ce cas, sa matrice dans n'importe quelle base B sera également symétrique, et on aura :

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (1.16)$$

En revanche, un tenseur égal à l'opposé de son transposé sera appelé antisymétrique, et sa matrice dans toute base vérifiera :

$$T_{ij} = -T_{ji} \quad (1.17)$$

On note donc que les termes diagonaux d'un tenseur antisymétrique sont nuls dans toute base (car égaux à leur opposé).

Tout tenseur $\bar{\bar{T}}$ peut être décomposé de manière unique en la somme de deux tenseurs dont l'un est symétrique et l'autre antisymétrique. Cette décomposition s'avère souvent très utile car elle permet de « trouver de la physique » dans un objet mathématique. On note :

$$\bar{\bar{T}} = \bar{\bar{T}}^S + \bar{\bar{T}}^A \quad (1.18)$$

Les parties symétrique ($\bar{\bar{T}}^S$) et antisymétrique ($\bar{\bar{T}}^A$) de $\bar{\bar{T}}$ sont alors données par :

$$\bar{\bar{T}}^S = \frac{1}{2}(\bar{\bar{T}} + \bar{\bar{T}}^T) \quad (1.19)$$

$$\bar{\bar{T}}^A = \frac{1}{2}(\bar{\bar{T}} - \bar{\bar{T}}^T) \quad (1.20)$$

Un tenseur est donc un objet mathématique qui ne dépend pas de la base B choisie pour le problème (même si sa matrice, elle, est différente dans chaque base). On retrouve le même type de raisonnement pour un vecteur : il est le même quelle que soit la base d'étude, mais ses coordonnées sont différentes dans chaque base. On peut d'ailleurs généraliser le concept de tenseur à des ordres différents de 2. Un tenseur d'ordre n sera une forme n -linéaire de $(E_3 \times E_3 \times \dots n \text{ fois} \dots \times E_3)$ dans l'ensemble des réels. Un tenseur d'ordre 1 est tout simplement un vecteur, et un tenseur d'ordre 0 est un scalaire. En pratique, on ne rencontrera que très rarement des tenseurs d'ordre supérieur à 2 dans ce cours.

5. Changements de base, Invariants, Base principale

On considère un tenseur $\bar{\bar{T}}$ et un vecteur \vec{U} de coordonnées respectives T_{ij} et U_i dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, et on introduit une autre base notée $B' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$. Dans ce cas on peut écrire (toujours en notation d'Einstein) :

$$\vec{e}'_i = \alpha_{ip} \vec{e}_p \quad (1.21)$$

$$\vec{e}_i = \alpha_{pi} \vec{e}'_p \quad (1.22)$$

La matrice α (qui n'est pas un tenseur !) est la matrice de changement de base entre B et B' . On notera en particulier que le terme générique α_{ij} de cette matrice est la j -ième coordonnée du vecteur \vec{e}_i dans la base B , ce qui signifie que les coefficients de la matrice α sont très faciles à trouver en pratique.

On peut alors trouver les coordonnées respectives T'_{ij} et U'_i de $\bar{\bar{T}}$ et \bar{U} dans la nouvelle base B' par les expressions :

$$T'_{ij} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}T_{pq} \quad (1.23)$$

$$U'_i = \alpha_{ip}U_p \quad (1.24)$$

Il est donc très facile d'exprimer les coordonnées d'un tenseur dans une nouvelle base. Mais il y a encore mieux. Un tenseur peut également être défini par un certain nombre de propriétés qui sont indépendantes de la base, et qu'on appelle donc propriétés intrinsèques du tenseur. Il s'agit de sa carte d'identité, qui le caractérise de manière fixée quelle que soit la base dans laquelle on se trouve. Parmi les propriétés intrinsèques, les plus utilisées sont appelées les trois invariants principaux. Ils sont définis comme étant les coefficients du polynôme caractéristique $det(\bar{\bar{T}} - \lambda\bar{\bar{I}})$. Dans cette expression, « det » signifie déterminant, et $\bar{\bar{I}}$ est le tenseur identité, c'est-à-dire le tenseur dont la matrice s'exprime par $I_{ij} = \delta_{ij}$, δ_{ij} étant le symbole de Kronecker :

$$\bar{\bar{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

On peut montrer que le polynôme caractéristique d'un tenseur s'écrit :

$$det(\bar{\bar{T}} - \lambda\bar{\bar{I}}) = -\lambda^3 + I_I\lambda^2 - I_{II}\lambda + I_{III} \quad (1.26)$$

Avec les trois invariants :

$$I_I = T_{ii} \quad (1.27)$$

$$I_{II} = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) \quad (1.28)$$

$$I_{III} = \varepsilon_{ijk}T_{i1}T_{j2}T_{k3} \quad (1.29)$$

On reconnaît en I_I la trace de la matrice de $\bar{\bar{T}}$ (somme des trois termes diagonaux), et comme c'est un invariant on la nomme trace de $\bar{\bar{T}}$ et on la note $tr\bar{\bar{T}}$. De la même manière, le troisième invariant I_{III} est le déterminant de la matrice de $\bar{\bar{T}}$, et on le nommera donc déterminant de $\bar{\bar{T}}$, noté $det\bar{\bar{T}}$.

Les racines du polynôme caractéristique sont les scalaires λ_1 , λ_2 , et λ_3 tels que :

$$\begin{aligned} det(\bar{\bar{T}} - \lambda\bar{\bar{I}}) &= -\lambda^3 + I_I\lambda^2 - I_{II}\lambda + I_{III} \\ &= -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \end{aligned} \quad (1.30)$$

On appelle ces scalaires valeurs propres du tenseur $\overline{\overline{T}}$. Dans beaucoup de cas, ces valeurs propres auront un sens physique très marqué et seront d'une grande utilité. Nous verrons ça lorsque nous étudierons des tenseurs représentant des grandeurs physiques. Pour l'heure on va rester dans l'abstraction mathématique, et on se contentera de préciser que ces valeurs propres sont intrinsèques au tenseur $\overline{\overline{T}}$ et que l'on a :

$$\begin{cases} I_I = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_{II} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \\ I_{III} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{cases} \quad (1.31)$$

Par ailleurs, chaque valeur propre λ_i permet de définir un vecteur propre \overline{U}_i , tel que :

$$\overline{\overline{T}}\overline{U}_i = \lambda_i\overline{U}_i \quad (1.32)$$

Les trois vecteurs propres \overline{U}_i définissent une base $(\overline{U}_1, \overline{U}_2, \overline{U}_3)$ nommée base principale, dans laquelle la matrice de $\overline{\overline{T}}$ est diagonale et s'exprime :

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

Quand $\overline{\overline{T}}$ est symétrique (ce qui sera souvent le cas en MMC), la base principale est orthonormée et constitue le lieu idéal pour faire des calculs (une matrice diagonale est beaucoup plus facile à manier), on aura donc souvent recours à cette base principale par la suite.

6. Opérations sur les tenseurs

De la même manière qu'on peut effectuer des opérations sur des scalaires (+, -, *, /) ou sur les vecteurs (produit scalaire, produit vectoriel...), on peut également effectuer des opérations sur les tenseurs. Plusieurs nouveaux opérateurs doivent être introduits : le produit tensoriel, le produit contracté, et le produit doublement contracté. Dans la suite, on considérera différents tenseurs et vecteurs et leurs coordonnées dans une base orthonormée quelconque $B = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$. Il est important dans cette section de prendre garde à la notation d'Einstein, qui est appliquée systématiquement.

Le produit tensoriel (noté \otimes) de deux tenseurs d'ordres quelconques produit un tenseur dont l'ordre est la somme des deux ordres initiaux. Par exemple, le produit tensoriel $(\vec{X} \otimes \vec{Y})$ de deux vecteurs \vec{X} et \vec{Y} forme un tenseur d'ordre 2 dont le terme générique est :

$$(\vec{X} \otimes \vec{Y})_{ij} = X_i Y_j \quad (1.34)$$

Le produit tensoriel d'un tenseur de second ordre et d'un vecteur est un tenseur du troisième ordre :

$$(\bar{T} \otimes \vec{X})_{ijk} = T_{ij} X_k \quad (1.35)$$

Plus généralement, le produit tensoriel consiste à créer un nouvel objet en multipliant terme à terme tous les éléments des tenseurs d'origine, selon toutes les combinaisons possibles.

Le produit contracté est un opérateur différent. Appliqué à deux tenseurs quelconques, il va produire un nouveau tenseur dont l'ordre est égal à la somme des deux ordres initiaux moins deux. Le plus élémentaire des produits contractés est le produit scalaire de deux vecteurs :

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = X_i Y_i \quad (1.36)$$

On peut aussi définir le produit contracté \vec{Y} d'un tenseur de second ordre \bar{T} et d'un vecteur \vec{X} :

$$\vec{Y} = \bar{T} \vec{X} \quad \text{et} \quad Y_i = T_{ij} X_j \quad (1.37)$$

On remarque que le produit contracté d'un tenseur est d'un vecteur est en fait le résultat de l'application linéaire de ce tenseur appliqué à ce vecteur. C'est aussi le classique produit d'une matrice carrée par un vecteur colonne. Le produit contracté de deux tenseurs d'ordre 2 est aussi un tenseur d'ordre 2 :

$$\bar{C} = \bar{A} \bar{B} \quad \text{et} \quad C_{ij} = A_{ik} B_{kj} \quad (1.38)$$

On retrouve également ici un air de déjà vu, puisqu'il s'agit d'un banal produit matriciel « lignes par colonnes ».

Le produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre deux se note « : » et produit un scalaire :

$$\bar{A} : \bar{B} = tr(\bar{A} \bar{B}) = A_{ij} B_{ji} \quad (1.39)$$

Enfin, il faut noter que le produit vectoriel de deux vecteurs peut également s'écrire en notation indicielle, avec la complicité du symbole de permutation. Il produit un troisième vecteur de coordonnées :

$$(\vec{U} \wedge \vec{V})_i = \varepsilon_{ipq} U_p V_q \quad (1.40)$$

De la même manière, le produit mixte de trois vecteurs est le scalaire qui se calcule par :

$$(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = \varepsilon_{pqr} X_p Y_q Z_r \quad (1.41)$$

A noter que, dans cette expression, la notation indicielle permet de résumer en un seul terme la somme de 27 monômes.

C. Rappels d'analyse tensorielle

1. Nécessité d'une analyse tensorielle

En mécanique des milieux continus, les tenseurs (de quelque ordre que ce soit) représentent des grandeurs physiques qui sont susceptibles de varier, à la fois en fonction des trois dimensions de l'espace et en fonction du temps. Décrire et quantifier ces variations est essentiel si l'on veut comprendre les mouvements et les équilibres d'un système mécanique, et c'est là qu'intervient l'analyse tensorielle.

On va donc s'intéresser non pas à de simples tenseurs, mais à des champs de tenseurs. Toutes les opérations et propriétés définies dans la section précédente sur les tenseurs le sont également sur les champs. On va y ajouter diverses opérations de dérivation par rapport aux variables spatiales, et introduire des opérateurs aux dérivées partielles. Dans ce cadre, l'hypothèse du milieu continu est essentielle parce qu'elle garantit que ces opérations de dérivations seront licites.

Dans cette section on utilise une base orthonormée quelconque $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Si on y ajoute un point O , on dispose d'un repère $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Si M est un point de l'espace affine P_3 , on note \vec{x} le vecteur position de M défini par :

$$\vec{OM} = \vec{x} = x_p \vec{e}_p \quad (1.42)$$

Il est important de noter que les différents opérateurs proposés ci-après sont exprimés dans le repère R . Il s'agit néanmoins d'opérations invariantes, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas du repère utilisé. Si on effectue les mêmes opérations dans un repère

différent, les champs produits seront absolument identiques. C'est la raison pour laquelle il est toujours intéressant d'essayer de se placer dans le repère dans lequel les calculs seront les plus faciles (en utilisant les formules de changement de base fournies dans une section précédente), puisque ceci n'affecte pas les champs résultats.

2. Gradient

L'opérateur gradient est le plus intuitif. Il peut s'appliquer à des champs de tenseurs de différents ordres. Systématiquement, il produira un champ de tenseurs dont l'ordre sera égal à celui du champ auquel il est appliqué plus un. On dit que l'opérateur gradient augmente l'ordre tensoriel d'une unité.

Le gradient est la traduction tridimensionnelle du concept de « pente » défini sur un champ bidimensionnel. Il quantifie la variation spatiale d'une grandeur dans chaque direction.

Appliqué à un champ de scalaire, le gradient produit donc un champ de vecteurs de coordonnées :

$$(\overrightarrow{\text{grad}} f)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (1.43)$$

La composante du gradient dans une direction est la dérivée partielle du champ scalaire sur cette direction particulière. En conséquence, l'expression du vecteur gradient est :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \vec{e}_3 = \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i \quad (1.44)$$

On peut aussi définir le gradient d'un champ vectoriel, qui est donc un champ tensoriel d'ordre 2 :

$$(\overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}} \vec{U})_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (1.45)$$

Enfin, le gradient d'un champ tensoriel de second ordre sera un champ tensoriel de troisième ordre :

$$(\overrightarrow{\overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}}} \vec{T})_{ijk} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} \quad (1.46)$$

On observera que la notation de l'opérateur gradient (le nombre de « traits » sur le mot « grad ») est différent selon l'ordre du champ de tenseurs auquel on l'applique, ce qui est toujours pratique pour s'y retrouver dans une formule.

3. Divergence

Contrairement au gradient, l'opérateur divergence diminue l'ordre tensoriel d'une unité. Il ne peut donc pas s'appliquer à un champ scalaire (d'ordre 0 par convention). On l'utilise donc le plus souvent en l'appliquant à un champ vectoriel, et le résultat produit est un champ scalaire. Plus précisément, la divergence est la trace du gradient :

$$\operatorname{div} \vec{U} = \operatorname{tr}(\operatorname{grad} \vec{U}) \quad (1.47)$$

Immédiatement, il vient :

$$\operatorname{div} \vec{U} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \quad (1.48)$$

L'opérateur divergence peut aussi s'appliquer à un champ tensoriel d'ordre 2, et produira alors un champ vectoriel :

$$(\overline{\operatorname{div} \vec{T}})_i = \frac{\partial T_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{i3}}{\partial x_3} = \frac{\partial T_{ip}}{\partial x_p} \quad (1.49)$$

4. Laplacien

Le laplacien (noté Δ) est un opérateur qui conserve l'ordre tensoriel, car c'est la composition d'une divergence (qui diminue l'ordre tensoriel d'un) et d'un gradient (qui augmente l'ordre tensoriel d'un). Appliqué à un champ scalaire, on obtiendra donc un autre champ scalaire tel que :

$$\Delta f = \operatorname{div}(\overline{\operatorname{grad} f}) \quad (1.50)$$

On peut facilement calculer (avec la notation indicielle) :

$$\Delta f = \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_p} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \quad (1.51)$$

Si on applique le laplacien à un champ vectoriel, on obtient un autre champ vectoriel :

$$\vec{\Delta U} = \overline{\operatorname{div}(\overline{\operatorname{grad} U})} \quad (1.52)$$

Ses composantes vérifient :

$$(\overrightarrow{\Delta U})_i = \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_p} \right) \quad (1.53)$$

5. Rotationnel

L'opérateur rotationnel est assez complexe, mais intervient couramment en mécanique des fluides (où il est utilisé pour décrire les tourbillons, entre autres). Appliqué à un champ vectoriel, le rotationnel fournit un autre champ vectoriel (il ne modifie donc pas l'ordre) dont les composantes s'écrivent :

$$(\overrightarrow{rot U})_i = \varepsilon_{ipq} \frac{\partial U_q}{\partial x_p} \quad (1.54)$$

De manière plus directe, les trois composantes du rotationnel sont :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{rot U})_1 &= \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \\ (\overrightarrow{rot U})_2 &= \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \\ (\overrightarrow{rot U})_3 &= \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (1.55)$$

Certaines formules classiques d'analyse tensorielle valent le détour car elles peuvent grandement simplifier une expression :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad f}) = \vec{0} \quad (1.56)$$

$$div(\overrightarrow{rot U}) = 0 \quad (1.57)$$

$$\overrightarrow{\Delta U} = \overrightarrow{grad}(div U) - \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot U}) \quad (1.58)$$

6. Formules de transformations d'intégrales

Dans cette section, on définit un domaine tridimensionnel D , borné par une surface extérieure S suffisamment régulière. On note également \vec{n} le champ des vecteurs unitaires normaux à S orientés vers l'extérieur (champ des normales sortantes). Les formules d'Ostrogradski sont utilisées pour passer d'une intégrale sur D à une

intégrale sur S , ou réciproquement. Elles peuvent s'appliquer à des champs scalaires (f), vectoriels (\vec{U}), ou tensoriels (\bar{T}). On les présente ici sans démonstration, leur usage étant détaillé plus loin dans le cours :

$$\int_D \overrightarrow{\text{grad}} f dv = \int_S f \vec{n} dS \quad (1.59)$$

$$\int_D \overrightarrow{\text{grad}} \vec{U} dv = \int_S \vec{U} \otimes \vec{n} dS \quad (1.60)$$

$$\int_D \text{div} \vec{U} dv = \int_S \vec{U} \cdot \vec{n} dS \quad (1.61)$$

$$\int_D \overrightarrow{\text{div}} \bar{T} dv = \int_S \bar{T} \vec{n} dS \quad (1.62)$$

Ces formules peuvent paraître obscures au premier abord, mais elles sont extrêmement puissantes. Elles permettent de faire un lien mathématique rigoureux entre le comportement d'un champ « à l'intérieur » d'un domaine quelconque de l'espace et « à la surface » de ce domaine.

La formule de Stokes effectue une prouesse comparable, mais à une dimension inférieure. Il s'applique sur une surface S quelconque, pas forcément plane, et non fermée (c'est-à-dire qui ne délimite pas un « intérieur » et un « extérieur »), et de frontière C (le « bord » de la surface) définissant un champ de vecteurs tangents \vec{t} . Cette formule stipule que, pour tout champ vectoriel \vec{U} suffisamment régulier, on peut écrire :

$$\int_S (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{U}) \cdot \vec{n} dS = \int_C \vec{U} \cdot \vec{t} dl \quad (1.63)$$

On dit également que le flux du champ $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{U}$ à travers S est égal à la circulation du champ \vec{U} le long de C .

Séance 2. Cinématique

A. Définitions

La cinématique est une description mathématique du mouvement, et consiste à ajouter la variable temporelle à la géométrie. Dans le cadre de la MMC, on s'intéresse à la cinématique d'un système matériel. Ceci appelle plusieurs définitions emboîtées les unes dans les autres.

Un système matériel est un ensemble de particules matérielles. La notion de particule matérielle est importante, et ne doit pas être confondue avec celle de particule élémentaire, plus apparentée à la physique fondamentale. Une particule matérielle représente la quantité de matière contenue dans un volume infinitésimal. Ce volume doit néanmoins être suffisamment grand pour que l'hypothèse de continuité de la matière soit vérifiée. Par conséquent l'échelle de taille de la particule matérielle dépend énormément du matériau. Mathématiquement, une particule matérielle sera représentée par un point de l'espace, que l'on appellera « point matériel ». Un système matériel est donc mathématiquement un ensemble de points matériels.

On peut donc dire qu'un système matériel ε est modélisé par une sous-partie de \mathbb{R}^3 , et qu'il est composé d'un ensemble (une infinité) de points M représentant chacun une particule matérielle.

Au sein d'un système matériel ε , on peut définir un domaine matériel D , qui correspond à une sous-partie de ε composé des mêmes particules matérielles quelque soit l'instant t . Dans un domaine matériel, aucune matière ne rentre ni ne sort, ce qui n'empêche pas ce domaine lui-même d'être en mouvement.

On se doit également de définir la notion classique de référentiel, que l'on peut tout simplement qualifier d'« observateur ». La classe particulière des référentiels galiléens est la plus utile mais n'est pas aisée à définir. Rigoureusement, est qualifié de galiléen n'importe quel référentiel dans lequel est vérifié le principe fondamental de la dynamique (qui sera introduit bien plus tard dans le cours). On ne peut donc pas le définir pour l'instant, et on se contentera de préciser que le référentiel terrestre est supposé suffisamment galiléen pour les applications courantes, et que tout référentiel en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel terrestre sera donc lui aussi considéré comme galiléen.

Un système ε est dit en équilibre par rapport à un référentiel si et seulement si tous les points matériels de ε sont immobiles dans ce référentiel. Dans le cas contraire, ε est dit « en mouvement ». En conséquence, on ne peut parler de mouvement que par rapport à un référentiel lié à l'observateur du mouvement.

Il est important de ne pas confondre les notions de repères et de référentiel. On peut changer de repère au sein d'un référentiel, et ceci ne modifiera pas la nature du mouvement, contrairement au changement de référentiel.

B. Points de vue de Lagrange et d'Euler

Deux points de vue coexistent pacifiquement lorsqu'il s'agit de décrire un mouvement. On appelle ces points de vue les descriptions lagrangienne et eulérienne du mouvement. La première est plus adaptée à la mécanique du solide, et la deuxième à la mécanique des fluides, mais cette distinction n'est pas figée. En réalité, chacune de ces descriptions propose des outils qui simplifieront plus ou moins la définition et la résolution d'un problème en fonction d'un contexte donné. Il est important de comprendre les deux. Dans ce chapitre, on considère un repère R muni d'un centre O et d'une base orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Description lagrangienne du mouvement

Cette description consiste à suivre une particule matérielle (représentée par un point M) dans son mouvement, à partir d'une position d'origine. Il s'agit d'une position connue de la particule pour un temps fixé par convention à $t_0 = 0$, et on appellera cette position \vec{X} . Cette position d'origine peut être comparée à la position « actuelle » de cette même particule, c'est-à-dire la position qu'elle occupe à l'instant t . Cette position sera notée $\vec{x}(t)$.

Le mouvement de la particule sera défini mathématiquement par une fonction bijective notée $\vec{\chi}$ qui décrit la position actuelle de la particule en fonction de sa position d'origine et de l'instant t :

$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t) \quad (2.1)$$

On notera que, par définition, on a :

$$\vec{\chi}(\vec{X}, 0) = \vec{X} \quad (2.2)$$

On suppose que la fonction $\vec{\chi}$ est deux fois continûment dérivable (sauf dans certains cas qui dépassent le cadre de ce cours), de manière à pouvoir calculer des vitesses et des accélérations. La plupart du temps, pour alléger les notations, on n'utilisera pas la fonction χ mais directement son résultat, et on écrira :

$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t) \quad (2.3)$$

Dans cette description, la position d'origine \vec{X} d'une particule est comme une « étiquette », c'est-à-dire qu'elle suffit à la définir entièrement. On comprend donc que la position actuelle \vec{x} de la particule peut se définir uniquement en fonction de \vec{X} (sa carte d'identité) et de l'instant actuel t . Souvent, on omettra même de mentionner t , car on ne comparera que la configuration initiale et la configuration actuelle.

Avant d'aller plus loin, il est utile de définir un objet mathématique qui aura une grande utilité par la suite, le jacobien. Cet objet est en fait le déterminant de la matrice 3×3 dite « jacobienne », de terme général $\partial x_i / \partial X_j$. Le jacobien J se calcule donc par :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

Le jacobien est toujours positif. Il a également un sens physique très marqué. En effet, les éléments de volume élémentaires $dv = dx_1 dx_2 dx_3$ (dans la configuration actuelle) et $dv_0 = dX_1 dX_2 dX_3$ (dans la configuration initiale) sont liés par l'expression :

$$dv = J dv_0 \quad (2.5)$$

C'est la formule classique de changement de variable dans une intégrale de volume. On dit aussi que le jacobien représente la dilatation volumique dv/dv_0 au voisinage de la particule M entre l'instant initial et l'instant actuel.

Dans la description lagrangienne, on est en mesure de définir rigoureusement la notion de vitesse d'une particule M : il s'agit de la dérivée du vecteur position \vec{x} , pour \vec{X} fixé (c'est-à-dire en suivant une particule donnée, identifiée par son « étiquette » \vec{X}) :

$$\vec{V}(\vec{X}, t) = \left. \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right|_{\vec{X}} (\vec{X}, t) \quad (2.6)$$

Dans cette expression, $\left. \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right|_{\vec{x}}$ désigne la dérivée partielle par rapport au temps, les variables X_1 , X_2 , et X_3 étant fixées.

De la même manière l'accélération de la particule M à l'instant t est définie par le vecteur :

$$\vec{\gamma}(\vec{X}, t) = \left. \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2} \right|_{\vec{x}} (\vec{X}, t) = \left. \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right|_{\vec{x}} (\vec{X}, t) \quad (2.7)$$

La description lagrangienne est bien adaptée à la mécanique du solide, parce qu'elle permet de comparer deux états (un état initial et un état final). Ce genre de démarche se prête bien à l'étude d'un système avant et après mise en charge. C'est beaucoup moins facile dans le cas d'un fluide, qui n'a pas une position bien définie à un quelconque instant passé. On a alors recours à la description eulérienne.

2. Description eulérienne du mouvement

Le point de vue d'Euler est radicalement différent de celui de Lagrange. On ne considère plus d'instant initial, et on n'essaie même plus de suivre une particule matérielle dans son mouvement. On aurait en effet du mal, en regardant par exemple le mouvement d'une rivière dans son lit, à définir un instant initial pour lequel les positions de toutes les particules matérielles sont parfaitement connues. Par ailleurs, les particules ont tendance à se déplacer beaucoup et il sera difficile de les suivre (contrairement au cas d'un solide, pour lequel les déplacements de particules restent limités).

On décide donc de se fixer un instant t (l'instant actuel), et une position donnée \vec{x} qui restera fixe. La description du mouvement d'un système du point de vue d'Euler consistera alors à définir le champ de vitesse \vec{V} des particules occupant une position donnée à un instant donné :

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{x}, t) \quad (2.8)$$

Comme on le voit, il n'est nullement fait mention ici d'une configuration initiale.

3. Relations entre les deux descriptions

Si on récapitule, on peut écrire que :

-Les variables de Lagrange d'un point M sont les coordonnées de la position initiale et l'instant actuel (X_1, X_2, X_3 , et t), et les inconnues de Lagrange sont les coordonnées de la position actuelle (x_1, x_2 , et x_3).

-Les variables d'Euler d'un point M sont les coordonnées de la position actuelle et l'instant actuel (x_1, x_2, x_3 , et t), et les inconnues d'Euler sont les coordonnées du vecteur vitesse à l'instant actuel (V_1, V_2 , et V_3).

Les relations entre les deux points de vue reposent sur les deux expressions suivantes :

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = \vec{V}(\vec{x}(\vec{X}, t), t) = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (2.9)$$

$$\vec{x}(\vec{X}, 0) = \vec{X} \quad (2.10)$$

C. Lignes caractéristiques

Trois classes de lignes caractéristiques peuvent être définies lors du mouvement d'un domaine matériel : les trajectoires, les lignes d'émissions, et les lignes de courant.

On appelle trajectoire d'une particule M dans un référentiel donné le lieu des positions successives M_t de M au cours du temps. Une trajectoire est définie en variables de Lagrange par l'équation :

$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t) \quad (2.11)$$

Il y a donc une trajectoire pour chaque particule (définie par la position initiale \vec{X}). En variables d'Euler, l'équation de la trajectoire s'obtient en intégrant le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_1(x_1, x_2, x_3, t)} \frac{dx_1}{dt} &= 1 \\ \frac{1}{V_2(x_1, x_2, x_3, t)} \frac{dx_2}{dt} &= 1 \\ \frac{1}{V_3(x_1, x_2, x_3, t)} \frac{dx_3}{dt} &= 1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le concept de ligne d'émission est moins intuitif. La ligne d'émission d'un point M à un instant t est le lieu des positions à l'instant t des particules qui sont passées en M à des instants antérieurs à t . Ce type de ligne est donc caractéristique d'un point fixe M et d'un instant t .

Enfin, une ligne de courant, à un instant t fixé, est une courbe qui admet, en chacun de ses points, une tangente parallèle au vecteur vitesse en ce point et à l'instant t .

D. Dérivée particulaire

1. Appliquée à un champ scalaire

La dérivée particulaire (également appelée dérivée matérielle) est une opération mathématique propre à la mécanique des milieux continus. Elle consiste à dériver par rapport au temps une grandeur attachée à une particule matérielle, en suivant cette particule dans son mouvement. Ceci est radicalement différent d'une dérivée temporelle classique qui s'intéresse à la variation d'une grandeur en un point fixe.

D'une manière générale, on peut donc dire que la dérivée particulaire (notée $\frac{D}{Dt}$) est une dérivation temporelle à \vec{X} constant (c'est-à-dire en considérant une particule donnée, identifiée par son « étiquette » \vec{X}), tandis que la dérivée temporelle classique (notée $\frac{\partial}{\partial t}$) est une dérivation à \vec{x} constant (c'est-à-dire en un point fixe).

On appelle f une grandeur physique définie par un champ sur le domaine matériel (il peut s'agir de n'importe quelle grandeur, telle que la masse volumique, la vitesse, etc.). La grandeur $f(\vec{x}, t)$ en un point donné et à un instant donné correspond également à la valeur de f attachée à la particule qui se trouve à ce point en cet instant.

L'exemple classique est celui de l'automobiliste qui part de Grenoble pour aller à Lyon, et qui jette régulièrement un œil au thermomètre de sa voiture. Le champ de température dépend à la fois de l'espace (à un instant donné, il ne fait pas la même température à Voiron et à Bourgoin) et du temps (à un endroit donné, la température varie au cours de la journée). La dérivée particulaire est un outil qui permet de calculer la variation de la température autour de la voiture en la suivant dans son mouvement (cette variation étant celle qui intéresse en priorité le voyageur). Si on ne disposait pas de cet outil, l'automobiliste ne disposerait d'aucun moyen simple pour déterminer cette variation, puisque la température dépend à la fois de l'espace et du temps.

En notation de Lagrange, il s'agit d'une notion élémentaire, puisque cette dérivée matérielle n'est rien d'autre que la dérivation par rapport au temps à \vec{X} fixé (\vec{X} étant la plaque d'immatriculation de la voiture). C'est nettement plus compliqué en eulérien, puisque cette configuration de référence \vec{X} n'existe pas.

En notations d'Euler, on connaît en revanche assez facilement la dérivée partielle « classique » par rapport au temps, puisque celle-ci se calcule à \vec{x} fixé (ce qui est, rappelons-le, la définition même du point de vue eulérien). Sans démonstration, on propose directement la formule suivante :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f \quad (2.13)$$

Cette formule fondamentale permet de distinguer les deux sources de variations de la grandeur f attachée à la particule dans son mouvement : le terme $\frac{\partial f}{\partial t}$ décrit la variation locale (purement temporelle, souvent appelée "terme instationnaire") de f , et le terme $\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f$ (souvent appelé « terme convectif ») fait intervenir la variation purement spatiale de f (par l'intermédiaire de l'opérateur gradient).

En notation d'Einstein dans une base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, la dérivée particulière de f s'écrit :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + V_p \frac{\partial f}{\partial x_p} \quad (2.14)$$

Au risque de se répéter, on précisera que cette dérivation représente la variation de f en suivant dans son mouvement la particule qui se trouve au point de coordonnées \vec{x} à l'instant t .

2. Appliquée à un champ vectoriel ou tensoriel

On a présenté la dérivée matérielle appliquée à une grandeur scalaire attachée à une particule suivie dans son mouvement, mais la dérivée matérielle peut être appliquée dans des cas plus complexes. Si on considère par exemple un champ vectoriel \vec{U} , on peut écrire sa dérivée particulière de la façon suivante :

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{U}) \vec{V} \quad (2.15)$$

On peut ainsi définir de manière précise les notions de vitesse et d'accélération d'une particule matérielle, car la vitesse est la variation temporelle de la position d'une particule donnée et l'accélération est la variation de vitesse de cette même particule :

$$\vec{V} = \frac{D\vec{x}}{Dt} \quad (2.16)$$

$$\vec{\gamma} = \frac{D\vec{V}}{Dt} \quad (2.17)$$

On en déduit en particulier :

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\overline{\text{grad}} \vec{V}) \vec{V} \quad (2.18)$$

Pour un champ tensoriel d'ordre deux noté $\overline{\overline{T}}$, la dérivée particulaire s'écrit :

$$\frac{D\overline{\overline{T}}}{Dt} = \frac{\partial \overline{\overline{T}}}{\partial t} + (\overline{\overline{\text{grad}}} \overline{\overline{T}}) \vec{V} \quad (2.19)$$

3. Appliquée à un domaine matériel

On peut suivre une particule matérielle dans son mouvement, mais il est souvent beaucoup plus intéressant de suivre un domaine matériel. Au cours du mouvement, le volume d'un domaine matériel peut varier, par l'intermédiaire de ce qu'on appelle le « transport convectif ». Un volume initial (dans la configuration lagrangienne d'origine) dv_0 va se transformer au cours du mouvement en un volume dv , avec la relation que l'on a déjà introduite et qui fait intervenir le jacobien de la transformation :

$$dv = J dv_0 \quad (2.20)$$

Cette notation lagrangienne n'est pas pratique du point de vue d'Euler, ce qui nous pousse à utiliser la formule suivante (donnée sans démonstration) :

$$\frac{Ddv}{Dt} = dv \cdot \text{div} \vec{V} \quad (2.21)$$

Cette expression permet de donner un sens physique à l'opérateur divergence : la divergence d'un champ de vitesse représente exactement le taux de dilatation volumique d'un domaine matériel suivi dans son mouvement.

4. Appliquée à une intégrale de volume

Très souvent en physique, on est amené à utiliser des grandeurs scalaires définies comme l'intégrale d'un champ scalaire sur un domaine matériel. Par exemple, la grandeur scalaire « masse » est équivalente à l'intégrale sur un domaine matériel du champ scalaire « masse volumique ». Il est parfois intéressant de calculer la variation d'un tel scalaire. Si on note F le scalaire intégré et f un tel champ, on va donc parfois être amené à calculer :

$$\frac{D}{Dt} F(t) = \frac{D}{Dt} \int_{D(t)} f(\vec{x}, t) dv \quad (2.22)$$

Dans cette expression, $D(t)$ est la position du domaine matériel à l'instant t , qui est donc variable dans le temps. Comme expliqué dans la section précédente, dv est également variable. On doit donc calculer la variation d'une intégrale de volume sur un domaine d'intégration et avec une variable d'intégration qui sont tous les deux variables, ce qui n'a rien d'évident. On peut montrer que :

$$\frac{DF}{Dt} = \int_{D(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f\vec{V}) \right) dv \quad (2.23)$$

En utilisant la formule d'Ostrogradski, on peut sortir la divergence de l'intégrale de volume et transformer celle-ci en intégrale de surface (sur la surface extérieure $S(t)$ du domaine matériel, munie d'une normale sortante \vec{n}) :

$$\frac{DF}{Dt} = \int_{D(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{S(t)} f\vec{V} \cdot \vec{n} dS \quad (2.24)$$

Cette formule un peu compliquée a le mérite d'isoler deux termes expliquant la variation temporelle de F (qui est, rappelons-le l'intégrale de f dans le domaine matériel) : $\int_{D(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dv$ représente la variation temporelle de la grandeur f à l'intérieur du domaine, et $\int_{S(t)} f\vec{V} \cdot \vec{n} dS$ représente le terme de débit de f au travers de la surface extérieure du domaine (il s'agit donc du terme d'échange avec l'extérieur).

E. Quelques cinématiques particulières

Dans de nombreux cas, la pratique de la MMC appliquée à des cas réels s'effectue par l'intermédiaire de cas simplifiés (reposant donc sur des hypothèses) qui permettent de mieux comprendre les phénomènes physiques en allégeant les notations mathématiques. On présente ici plusieurs classes de ces mouvements particuliers.

1. Le mouvement permanent

Le mouvement d'un milieu continu est dit permanent (ou stationnaire) si toutes les grandeurs caractéristiques de ce mouvement sont indépendantes du temps en description eulérienne. Tous les champs scalaires, vectoriels et tensoriels vérifient donc :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \vec{0} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \bar{\bar{T}}}{\partial t} = \bar{\bar{0}} \quad (2.27)$$

Dans ce cas particulier (que l'on rencontrera très souvent), les trois classes de lignes caractéristiques (trajectoires, lignes d'émission et lignes de courant) sont confondues.

Ces définitions appellent deux remarques importantes :

- Un mouvement est permanent par rapport à un référentiel donné, et non de manière absolue
- On a précisé « en description eulérienne », c'est la raison pour laquelle on a utilisé le symbole de dérivation classique $\frac{\partial}{\partial t}$. Ainsi, toutes les grandeurs sont constantes en un point fixe \vec{x} donné. En revanche, il n'y a aucune raison pour que les dérivées particulières de ces grandeurs soient nulles, puisqu'elles sont attachées à des particules qui se déplacent. Tout au plus peut-on préciser que les dérivées particulières se résument uniquement à leurs termes convectifs.

Dans beaucoup de phénomènes physiques, on peut obtenir un mouvement permanent (aussi appelé régime stationnaire) si l'on attend suffisamment longtemps pour que le système trouve un « point d'équilibre » dans son fonctionnement. Le comportement du système avant le régime permanent est appelé « régime transitoire ».

2. Le mouvement isochore

Dans certaines classes de mouvement, le volume de tout domaine matériel reste constant au cours du temps. Dans ce cas, le mouvement est qualifié d'isochore, et le milieu est considéré comme incompressible. Il faut bien comprendre qu'aucun matériau n'est incompressible, pour peu qu'on y mette l'effort nécessaire. L'incompressibilité n'est donc pas une propriété du milieu, mais une description de son comportement dans des conditions données. On estime souvent, par exemple, que l'eau a un comportement incompressible dans la plupart des applications classiques. Pourtant, l'eau liquide est bien un matériau compressible, même s'il faut mettre en œuvre des variations de pression très élevées avant de pouvoir observer un changement de densité notable.

Ces précautions étant prises, quel est le meilleur moyen pour représenter mathématiquement le fait qu'un domaine matériel ne change pas de volume au cours de son mouvement ? Ce moyen a été présenté dans la section précédente, il s'agit de la dérivée particulaire. Le volume d'un domaine matériel est la somme des volumes élémentaires, on a donc :

$$v = \int_D dv \quad (2.28)$$

Un mouvement isochore doit donc vérifier, pour tout domaine matériel :

$$\frac{Dv}{Dt} = 0 \quad (2.29)$$

En utilisant les résultats de la section précédente, on peut retrouver :

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (2.30)$$

Un mouvement est isochore (et un milieu incompressible) si et seulement si la divergence de son champ de vitesse est nulle. Ceci est cohérent avec la proposition formulée plus haut, qui stipule que la divergence de la vitesse représente le taux de variation volumique.

3. Le mouvement plan

Le mouvement plan représente une simplification très courante des problèmes de MMC. Il consiste à réduire le nombre de dimensions spatiales du problème de 3 à 2. On dit qu'un mouvement est plan dans un référentiel donné et dans un plan Π donné, si et seulement si à chaque instant tous les vecteurs vitesse sont parallèles à Π , et si ces vecteurs sont invariants par translation normale à Π .

Si on se place dans une base adéquate $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, de telle manière qu'un mouvement soit plan par rapport à (\vec{e}_1, \vec{e}_2) On va donc avoir :

$$V_3 = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x_3} = \vec{0} \quad (2.32)$$

4. Le mouvement de révolution

Le mouvement de révolution est analogue au mouvement plan, mais en coordonnées cylindriques. On dit qu'un mouvement est de révolution autour d'un axe fixe Δ dans un référentiel donné si et seulement si à chaque instant chaque vecteur vitesse appartient à un plan méridien (plan perpendiculaire à Δ), et si le champ de vitesse est invariant par rotation autour de Δ .

Par conséquent, en adoptant un système de coordonnées cylindriques, on aura :

$$V_\theta = 0 \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x_\theta} = \vec{0} \quad (2.34)$$

Ces différentes classes de mouvement peuvent être combinées : on peut par exemple imaginer un mouvement plan, permanent, et isochore, ce qui représente une simplification sensible de la réalité. Ce sera même courant en mécanique des fluides, et la plupart du temps ça ne suffira pas à rendre possible une résolution du problème à la main.

Séance 3. Déformations

La notion de déformation d'un système matériel naît de la comparaison entre une configuration dite « initiale » et une configuration dite « finale » (ou actuelle). Elle est donc plus facile à appréhender du point de vue lagrangien, et c'est celui que nous allons adopter pendant la majorité de ce chapitre. Le point de vue eulérien sera couvert plus succinctement à la fin du chapitre.

Cette séance va introduire un grand nombre de tenseurs permettant de décrire les déformations d'un milieu continu dans le cas le plus général, et donc le plus compliqué. Une simplification très courante (et très utile) sera effectuée au chapitre suivant, par l'intermédiaire de l'hypothèse des petites perturbations.

A. Point de vue de Lagrange

1. Tenseur gradient

Intuitivement, on peut définir une déformation comme un changement dans les distances et les angles à l'intérieur d'un système matériel entre l'instant initial (à $t = 0$) et l'instant final t .

On se place dans un référentiel, dans lequel on choisit un point origine O et une base orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On va s'intéresser à un domaine matériel D , et plus particulièrement à la comparaison entre sa configuration initiale D_0 et sa configuration actuelle D_t . Du fait du caractère bijectif de la fonction χ , on peut faire correspondre à toute particule matérielle du domaine initial D_0 (définie mathématiquement par un point M_0) la même particule matérielle dans le domaine final D_t (définie par un point M_t). On peut alors écrire, en notation typiquement lagrangienne :

$$\overrightarrow{OM_0} = \vec{X} = X_p \vec{e}_p \quad (3.1)$$

$$\overrightarrow{OM_t} = \vec{x} = x_p \vec{e}_p \quad (3.2)$$

Par ailleurs, on sait que l'on peut effectuer le changement de variable correspondant à la transformation :

$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t) = \vec{x}(\vec{X}, t) \quad (3.3)$$

Pour décrire de la manière la plus générale la déformation d'un système, on introduit le tenseur gradient de la transformation, aussi nommé tenseur gradient $\bar{\bar{F}}$:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (3.4)$$

Les éléments de la matrice de $\bar{\bar{F}}$ dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont donc les neuf dérivées partielles des grandeurs $x_1, x_2, \text{ et } x_3$ par rapport aux grandeurs $X_1, X_2, \text{ et } X_3$. Avec cette définition de $\bar{\bar{F}}$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{dx} = \bar{\bar{F}} \overrightarrow{dX} \quad (3.5)$$

Le tenseur $\bar{\bar{F}}$ apparaît donc comme l'application linéaire qui à un vecteur élémentaire de la configuration d'origine, fait correspondre le même vecteur élémentaire après la déformation. Il est important d'insister sur le mot « élémentaire » (qui signifie ici infinitésimal) dans la phrase précédente, car elle ne s'applique pas à un vecteur de longueur quelconque. On appelle parfois $\bar{\bar{F}}$ l'application linéaire tangente à la transformation.

Le déterminant de $\bar{\bar{F}}$ nous est déjà connu, il s'agit du jacobien J . Le tenseur $\bar{\bar{F}}$ permet donc également de déterminer directement la variation d'un volume élémentaire entre les instants initial et actuel :

$$dv = Jdv_0 \quad (3.6)$$

2. Dilatations et glissements

La dilatation λ d'un vecteur élémentaire correspond à la variation relative de sa norme, et peut se calculer de la façon suivante :

$$\lambda(\overrightarrow{dX}) = \frac{\|\overrightarrow{dx}\|}{\|\overrightarrow{dX}\|} = \frac{\sqrt{\bar{\bar{C}}(\overrightarrow{dX}, \overrightarrow{dX})}}{\|\overrightarrow{dX}\|} \quad (3.7)$$

Dans cette expression, on a introduit le tenseur symétrique $\bar{\bar{C}}$ appelé tenseur des dilatations de Cauchy-Green, et qui se calcule aisément à partir de $\bar{\bar{F}}$:

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{F}}^T \bar{\bar{F}} \quad (3.8)$$

On a donc :

$$C_{ij} = F_{pi} F_{pj} = \frac{\partial x_p}{\partial X_i} \frac{\partial x_p}{\partial X_j} \quad (3.9)$$

La connaissance de $\bar{\bar{C}}$ en un point M_0 de la configuration de référence permet donc d'évaluer la dilatation (variation relative de longueur) de n'importe quel vecteur élémentaire \overrightarrow{dx} en ce point au cours de la transformation. En particulier, la dilatation d'un vecteur de la base $B = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ peut directement s'écrire à partir du terme diagonal correspondant de la matrice de $\bar{\bar{C}}$:

$$\lambda(\overrightarrow{e}_i) = \sqrt{C_{ii}} \quad (3.10)$$

Pour aller plus loin, imaginons, en un point M_0 dans la configuration de référence (initiale), deux vecteurs \overrightarrow{dX} et \overrightarrow{dX}' formant un angle droit. Au cours de la déformation, ces deux vecteurs vont être transformés en deux vecteurs \overrightarrow{dx} et \overrightarrow{dx}' de la configuration actuelle, qui n'ont *a priori* aucune raison de former un angle droit. Si on note α l'angle formé par ces deux vecteurs transformés, on va appeler glissement des deux directions orthogonales \overrightarrow{dX} et \overrightarrow{dX}' l'angle défini par :

$$\gamma(\overrightarrow{dX}, \overrightarrow{dX}') = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (3.11)$$

Puisque l'angle initial entre \overrightarrow{dX} et \overrightarrow{dX}' valait $\pi/2$, l'angle γ est en fait la variation de cet angle entre les configurations initiale et finale. Au même titre que les dilatations, celui-ci peut s'obtenir à partir du tenseur $\bar{\bar{C}}$:

$$\sin[\gamma(\overrightarrow{dX}, \overrightarrow{dX}')] = \frac{\bar{\bar{C}}(\overrightarrow{dX}, \overrightarrow{dX}')}{\lambda(\overrightarrow{dX})\lambda(\overrightarrow{dX}')} \quad (3.12)$$

Si on applique cette formule à deux vecteurs \overrightarrow{e}_i et \overrightarrow{e}_j de la base $B = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ (avec $i \neq j$), on peut même écrire encore plus simplement :

$$\sin[\gamma(\overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_j)] = \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}C_{jj}}} \quad (3.13)$$

On voit donc ici tout l'intérêt du tenseur $\bar{\bar{C}}$, qui permet de calculer à la fois les variations de longueur et d'angles au cours d'une transformation.

3. Déformations

On appelle tenseur des déformations de Green-Lagrange le tenseur symétrique de second ordre $\bar{\bar{E}}$ défini par :

$$\bar{\bar{E}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{I}}) = \frac{1}{2}(\bar{\bar{F}}^T \bar{\bar{F}} - \bar{\bar{I}}) \quad (3.14)$$

Dans cette expression, $\bar{\bar{I}}$ est le tenseur identité. Comme le tenseur $\bar{\bar{C}}$, $\bar{\bar{E}}$ permet d'exprimer la variation de longueur d'un vecteur élémentaire et le glissement de deux directions orthogonales :

$$\frac{\|\vec{dx}\|^2 - \|\vec{dX}\|^2}{\|\vec{dX}\|^2} = 2\bar{\bar{E}}(\vec{dX}, \vec{dX}) \quad (3.15)$$

$$\sin[\gamma(\vec{dX}, \vec{dX}')] = \frac{2\bar{\bar{E}}(\vec{dX}, \vec{dX}')}{\sqrt{[1 + 2\bar{\bar{E}}(\vec{dX}, \vec{dX})][1 + 2\bar{\bar{E}}(\vec{dX}', \vec{dX}')]}} \quad (3.16)$$

En particulier, si on considère deux vecteurs \vec{e}_i et \vec{e}_j de la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (avec $i \neq j$), on aura :

$$\lambda(\vec{e}_i) = \sqrt{1 + 2E_{ii}} \quad (3.17)$$

$$\sin[\gamma(\vec{e}_i, \vec{e}_j)] = \frac{2E_{ij}}{\sqrt{1 + 2E_{ii}} \cdot \sqrt{1 + 2E_{jj}}} \quad (3.18)$$

L'utilisation pratique de $\bar{\bar{E}}$ est peu aisée. En revanche, on verra dans le chapitre suivant que sa version linéarisée dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations est d'une très grande utilité.

4. Déplacements

Le déplacement de la particule matérielle est défini par le vecteur \vec{U} tel que :

$$\vec{U} = \overline{M_0 M_t} = \vec{x} - \vec{X} \quad (3.19)$$

Le champ \vec{U} est donc le champ des vecteurs reliant les positions d'origine et actuelle des particules matériels du système. Par ailleurs, on appelle tenseur gradient du déplacement le tenseur de second ordre :

$$\overline{\overline{H}} = \overline{\overline{Grad}} \vec{U} \quad (3.20)$$

La majuscule de l'opérateur gradient indique que celui-ci s'applique par rapport aux variables spatiales de Lagrange, par conséquent on a :

$$H_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \quad (3.21)$$

On remarque également que l'on a $\overline{\overline{H}} = \overline{\overline{F}} - \overline{\overline{I}}$.

Comme tout tenseur du second ordre, $\overline{\overline{H}}$ peut se décomposer en une partie symétrique (notée $\overline{\overline{\varepsilon}}$) et une partie antisymétrique (notée $\overline{\overline{\omega}}$), qui ont toutes les deux une signification physique importante (que l'on présentera au chapitre suivant) :

$$\overline{\overline{H}} = \overline{\overline{\varepsilon}} + \overline{\overline{\omega}} \quad (3.22)$$

On a, par définition des composantes symétriques et antisymétriques d'un tenseur :

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{H}} + \overline{\overline{H}}^T) \quad (3.23)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \quad (3.24)$$

$$\overline{\overline{\omega}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{H}} - \overline{\overline{H}}^T) \quad (3.25)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} - \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \quad (3.26)$$

Compte tenu de toutes ces équations, on peut écrire la relation entre le tenseur des déformations et le tenseur gradient de déplacement :

$$\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{\epsilon}} + \frac{1}{2} \bar{\bar{H}}^T \bar{\bar{H}} \quad (3.27)$$

Cette expression, sous ses allures banales, sera particulièrement utile dans le chapitre suivant car on se permettra, sous certaines hypothèses, d'annuler le second terme du second membre. On pourra alors écrire que le tenseur des déformations est égal à la partie symétrique du tenseur gradient de déplacement.

La partie antisymétrique de $\bar{\bar{H}}$ est le tenseur rotation noté $\bar{\bar{\omega}}$ (qui exprime la vitesse et l'orientation de la rotation locale de chaque particule matérielle). Le vecteur dual $\vec{\omega}$ de ce tenseur vérifie :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} \quad (3.28)$$

5. Mouvement rigidifiant

La classe particulière des mouvements dits « rigidifiants » est celle appliquée dans le cadre de la mécanique des solides indéformables, mais il peut aussi caractériser un milieu déformable qui ne se déforme pas au cours de son mouvement. Par définition, un mouvement rigidifiant conserve les distances et les angles en tout point d'un domaine matériel, et on peut dans ce cas écrire :

$$\vec{x} = \bar{\bar{R}}(t) \vec{X} + \vec{K}(t) \quad (3.29)$$

Dans cette expression, $\bar{\bar{R}}$ est un tenseur orthogonal (dont l'inverse est égal à la transposée), qui représente la rotation globale du domaine matériel, à ne pas confondre avec la rotation locale de chaque particule qui s'exprime par $\bar{\bar{\omega}}$. \vec{K} est un vecteur translation. On constate dans cette expression que \vec{K} et $\bar{\bar{R}}$ dépendent du temps, mais sont uniformes dans l'espace.

En conséquence, dans ce type de mouvement, un vecteur élémentaire \overrightarrow{dx} s'obtient à partir de \overrightarrow{dX} en lui appliquant successivement une rotation et une translation. Dans ce cas on a $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{R}}$, donc le tenseur gradient se résume à la rotation. Par définition d'un tenseur orthogonal, on a $\bar{\bar{R}}^T \bar{\bar{R}} = \bar{\bar{I}}$, ce qui va conduire à $\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{I}}$ et $\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{0}}$. Les déformations sont donc nulles au cours d'un mouvement rigidifiant, ce qui est rassurant pour la cohérence de la théorie.

B. Point de vue d'Euler

Dans la section précédente, on n'a jamais parlé du temps, puisqu'on s'est uniquement intéressé à la comparaison entre une configuration initiale et une configuration actuelle. C'est tout à fait acceptable en description lagrangienne, mais pas en description eulérienne. Celle-ci est en effet fondée sur la notion de vitesse, qui nécessite de réintroduire le temps. Comme souvent en description eulérienne, la formulation explicitée dans cette section est surtout utilisée par les mécaniciens des fluides, et ne s'applique que rarement aux solides.

On s'intéresse donc à la dérivée particulière du tenseur des déformations $\frac{D\bar{\bar{E}}}{Dt}$, puisqu'on suit un domaine matériel dans son mouvement. Ce tenseur est appelé tenseur des taux de déformation lagrangien. Il est pratique d'introduire également le tenseur gradient de vitesse \bar{L} , défini par :

$$\bar{L} = \overline{\text{grad}} \vec{V} \quad (3.30)$$

L'opérateur gradient est inscrit avec un « g » minuscule, donc cet opérateur s'applique sur les variables d'Euler, et :

$$L_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (3.31)$$

Comme on l'a fait à la section précédente pour \bar{H} , on va considérer la partie symétrique du tenseur \bar{L} , et l'appeler tenseur des taux de déformation eulérien, noté \bar{D} . On a donc :

$$D_{ij} = (\bar{L}^S)_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.32)$$

Ecrire que $\bar{D} = \bar{0}$ est équivalent à écrire que le mouvement est rigidifiant. Pour passer d'une description à l'autre, il est possible de démontrer la formule suivante :

$$\frac{D\bar{\bar{E}}}{Dt} = \bar{F}^T \bar{D} \bar{F} \quad (3.33)$$

La partie antisymétrique de \bar{L} est le tenseur taux de rotation noté $\bar{\Omega}$ (qui exprime la vitesse et l'orientation de la rotation de chaque particule matérielle). On a :

$$\Omega_{ij} = (\bar{L}^A)_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.34)$$

De manière analogue au tenseur déformation en lagrangien, le tenseur taux de déformation permet de calculer les variations de longueurs et d'angles dans le système matériel au cours de la transformation. Soit \overrightarrow{dx} un vecteur élémentaire quelconque, qui peut donc être écrit sous la forme $\overrightarrow{dx} = dl \cdot \vec{u}$, \vec{u} étant un vecteur unitaire, on peut décrire la variation de la norme dl de \overrightarrow{dx} par l'intermédiaire du taux d'allongement unitaire noté $\frac{1}{dl} \frac{D}{Dt} dl$ et fourni par la formule suivante :

$$\frac{1}{dl} \frac{D}{Dt} dl = \overline{D}(\vec{u}, \vec{u}) \quad (3.35)$$

De la même manière, on considère deux vecteurs élémentaires orthogonaux \overrightarrow{dx} et \overrightarrow{dx}' , de normes respectives dl et dl' et définis par les vecteurs unitaires (orthogonaux également) \vec{u} et \vec{u}' , tels que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{dx} = dl \cdot \vec{u} \\ \overrightarrow{dx}' = dl' \cdot \vec{u}' \end{cases} \quad (3.36)$$

Si on note γ le glissement relatif des directions orthogonales définies par \overrightarrow{dx} et \overrightarrow{dx}' , on peut introduire le taux de glissement, noté $\frac{D\gamma}{Dt}$, et défini par l'expression suivante :

$$\frac{D\gamma}{Dt} = 2\overline{D}(\vec{u}, \vec{u}') \quad (3.37)$$

On remarque que les éléments lagrangiens et eulériens correspondent deux à deux :

- vecteur déplacement \vec{U} et vecteur vitesse \vec{V}
- tenseur gradient du déplacement $\overline{H} = \overline{Grad} \vec{U}$ (de composantes $H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$) et tenseur gradient de vitesse $\overline{L} = \overline{grad} \vec{V}$ (de composantes $L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$)
- décomposition lagrangienne $\overline{H} = \overline{\varepsilon} + \overline{\omega}$ et décomposition eulérienne $\overline{L} = \overline{D} + \overline{\Omega}$

Ces deux familles sont liées par la formule $\frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{V}$.

Le chapitre suivant est une étude détaillée du tenseur $\overline{\varepsilon}$, qui sera notre principal outil de description de la déformation dans les cas pratiques.

Séance 4. Calcul pratique des déformations

A. Hypothèse des petites perturbations

Les notions assez complexes présentées au chapitre précédent peuvent être considérablement simplifiées si on pose un postulat appelé « hypothèse des petites perturbations », aussi noté HPP. Cette hypothèse suppose que la configuration finale d'un système est très peu éloignée de la configuration d'origine. C'est donc une notion plutôt applicable au point de vue lagrangien, et qui fonctionne souvent très bien dans le cadre de la mécanique des solides. En fait, cette hypothèse est généralement souhaitable dans le champ du génie civil : on préfère par exemple qu'un pont ne change pas trop de forme lorsqu'un camion lui passe dessus.

Il faut distinguer une hiérarchie dans les différentes hypothèses. La moins restrictive est l'hypothèse des petites déformations, qui stipule que la norme du tenseur des déformations de Green-Lagrange est négligeable devant 1. Cette norme s'écrit mathématiquement par :

$$\|\bar{\bar{E}}\| = \left(\sum_{p,q=1}^3 E_{pq}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

C'est donc la racine de la somme des carrés de tous les termes de la matrice de $\bar{\bar{E}}$ dans n'importe quelle base (la norme est un invariant). Plus simplement, ceci implique que chacun des termes de cette matrice doit rester infinitésimal dans toute base.

On peut également citer l'hypothèse des petits déplacements, qui énonce que la norme du vecteur déplacement \vec{U} est négligeable devant les dimensions du système. Autrement dit, « à vue d'œil », le système n'a pas changé de forme.

Il est important de noter que, dans ces hypothèses, on a utilisé les termes « négligeable devant » et « infinitésimal », et non pas « égal à zéro ». Si c'était le cas, on serait en solide indéformable et on ne serait plus dans le cadre de la MMC.

La plupart du temps on considère (bien que ça ne soit pas une vérité mathématique) que de petits déplacements impliquent de petites déformations, et on regroupe l'ensemble sous le terme « petites perturbations », d'où l'HPP. Ces hypothèses sont très fécondes et ont été validées des millions de fois par l'expérience dans le cas de la mécanique du solide « faiblement déformé ». Pour la mécanique des fluides c'est plus délicat, puisque les déplacements sont très importants par nature.

Une autre conséquence de l'HPP est que les vecteurs \vec{X} et \vec{x} sont quasiment identiques. Par conséquent, les points de vue de Lagrange et d'Euler sont confondus.

B. Tenseur des déformations linéarisées

De l'HPP, on déduit :

$$\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \bar{\bar{H}}^T \bar{\bar{H}} \cong \bar{\bar{\varepsilon}} \quad (4.2)$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange est donc égal à la partie symétrique du tenseur gradient de déplacement. Ce tenseur $\bar{\bar{\varepsilon}}$ sera donc nommé tenseur des déformations linéarisées, et même très souvent tenseur des déformations quand l'HPP sera appliquée de manière implicite (c'est-à-dire presque tout le temps en mécanique du solide). On aura également :

$$\bar{\bar{C}} \cong \bar{\bar{I}} + 2\bar{\bar{\varepsilon}} \quad (4.3)$$

On va s'attarder sur le tenseur $\bar{\bar{\varepsilon}}$, qui sera notre principal outil de description de la déformation dans toute la suite du cours. Dans une base orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, le terme général de sa matrice est :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \quad (4.4)$$

Cette matrice est donc symétrique ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$) et a l'allure générale :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \right) & \frac{\partial U_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_2} \right) & \frac{\partial U_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

On remarque que les termes de $\bar{\bar{\epsilon}}$ peuvent se calculer très facilement pour peu que l'on connaisse le champ vectoriel de déplacement \vec{U} . Ces termes ont tous une signification géométrique très concrète dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

- chaque terme diagonal ϵ_{ij} représente l'allongement relatif dans la direction de \vec{e}_i , et permet donc de calculer la dilatation λ_i dans cette direction :

$$\lambda_i = 1 + \epsilon_{ii} \quad (4.6)$$

- chaque terme non diagonal ϵ_{ij} fournit facilement le glissement de \vec{e}_i vers \vec{e}_j (ou de \vec{e}_j vers \vec{e}_i , du fait de la symétrie) :

$$\gamma(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \gamma(\vec{e}_j, \vec{e}_i) = 2\epsilon_{ij} \quad (4.7)$$

Les termes diagonaux représentent donc des changements de distances, et les termes non-diagonaux des changements d'angles. Plus généralement, si on souhaite connaître la dilatation λ dans une direction quelconque définie par un vecteur unitaire \vec{u}_0 , il suffit d'appliquer l'expression :

$$\lambda(\vec{u}_0) = 1 + \bar{\bar{\epsilon}}(\vec{u}_0, \vec{u}_0) \quad (4.8)$$

De la même manière, si on choisit deux directions orthogonales quelconques définies par deux vecteurs unitaire \vec{u}_0 et \vec{v}_0 , le glissement de ces deux directions s'obtient directement par :

$$\gamma(\vec{u}_0, \vec{v}_0) = 2\bar{\bar{\epsilon}}(\vec{u}_0, \vec{v}_0) \quad (4.9)$$

Par ailleurs, on peut également démontrer assez facilement que le jacobien de la transformation peut s'exprimer à partir de $\bar{\bar{\epsilon}}$:

$$J = 1 + tr \bar{\bar{\epsilon}} = 1 + div \vec{U} \quad (4.10)$$

La trace du tenseur $\bar{\bar{\epsilon}}$ (qui, on le rappelle, vaut ϵ_{ii} , en notation d'Einstein dans toute base orthonormée) est égale à la divergence du champ de déplacement $div \vec{U}$ et représente donc la variation relative de volume, aussi appelée dilatation volumique.

La connaissance des termes de la matrice de $\bar{\bar{\epsilon}}$ (facilement calculable à partir de \vec{U}) en un point M permet donc de définir entièrement tous les types de déformations se déroulant autour de M . Ceci fait de $\bar{\bar{\epsilon}}$ un outil particulièrement puissant.

C. Valeurs propres et base principale de $\bar{\bar{\epsilon}}$

Comme tout tenseur symétrique, le tenseur de déformations $\bar{\bar{\epsilon}}$ peut être exprimé dans une base orthonormée particulière, dite base principale ou base propre, dans laquelle sa matrice sera diagonale. Dans ce cas, les trois termes diagonaux de la matrice de $\bar{\bar{\epsilon}}$ seront appelés valeurs propres, et notées ϵ_1 , ϵ_2 , et ϵ_3 . On les appelle généralement déformations principales, et elles sont valables en un point M et à un instant t donné (tout comme le tenseur $\bar{\bar{\epsilon}}$). Cette matrice peut alors s'écrire :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

La base principale est formée de trois vecteurs propres \vec{b}_1 , \vec{b}_2 , et \vec{b}_3 , orthogonaux deux à deux, et qui correspondent chacun à une des trois valeurs propres.

Tout l'intérêt de la base principale de déformation réside dans le fait que les termes non-diagonaux sont nuls. Par conséquent, les angles droits existants entre les vecteurs \vec{b}_1 , \vec{b}_2 , et \vec{b}_3 (deux à deux) vont rester des angles droits au cours de la déformation. Par ailleurs, chacune des valeurs propres représente la variation relative de longueur du vecteur propre correspondant au cours de la déformation. Par exemple, si le vecteur \vec{b}_i se transforme en un vecteur \vec{b}'_i au cours de la déformation, on peut écrire :

$$\vec{b}'_i = (\epsilon_i + 1)\vec{b}_i \quad (4.12)$$

En pratique, retrouver les vecteurs propres et les valeurs propres d'un tenseur symétrique quelconque à la main n'a rien d'évident, et implique de calculer un déterminant, de trouver les racines d'un polynôme de degré 3 et de résoudre trois systèmes d'équations un peu rébarbatifs. Beaucoup de logiciels de calculs peuvent effectuer directement cette diagonalisation. Certains tenseurs ont également une matrice suffisamment simple pour y arriver rapidement à la main.

Comme expliqué dans le chapitre consacré à l'algèbre tensorielle, les trois valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique du tenseur, qui s'exprime en ϵ par :

$$\det(\bar{\bar{\epsilon}} - \epsilon\bar{\bar{I}}) = -\epsilon^3 + \epsilon_I\epsilon^2 - \epsilon_{II}\epsilon + \epsilon_{III} \quad (4.13)$$

Dans cette expression, les termes ε_I , ε_{II} , et ε_{III} sont les trois invariants principaux du tenseur $\bar{\varepsilon}$

$$\begin{cases} \varepsilon_I = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{II} = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 \\ \varepsilon_{III} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \end{cases} \quad (4.14)$$

En particulier, ε_I est la trace de $\bar{\varepsilon}$, et ε_{III} est son déterminant. Les valeurs propres de $\bar{\varepsilon}$ sont donc celles qui vérifient :

$$\begin{aligned} \det(\bar{\varepsilon} - \varepsilon \bar{I}) &= -\varepsilon^3 + \varepsilon_I \varepsilon^2 - \varepsilon_{II} \varepsilon + \varepsilon_{III} \\ &= -(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon - \varepsilon_3) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ils s'obtiennent en trouvant les racines d'un polynôme de degré trois, ce qui n'est jamais facile à la main. On notera en revanche que c'est très facile si ce polynôme est de degré deux, ce qui nous incitera toujours autant que possible à étudier des systèmes bidimensionnels (en « déformations planes », comme expliqué dans la section suivante).

Pour trouver les vecteurs propres, il faut ensuite résoudre trois systèmes d'équations (un par valeur propre), définis par :

$$\bar{\varepsilon} \vec{b}_i = \varepsilon_i \vec{b}_i \quad (4.16)$$

Chacun de ces systèmes comporte trois équations et trois inconnues (qui sont les trois coordonnées du vecteur propre \vec{b}_i). Tout comme les valeurs propres, les trois vecteurs propres sont valables en un point M et à un instant t donné.

Lorsque deux valeurs propres sont égales et différentes de la troisième, on dit que $\bar{\varepsilon}$ est un tenseur cylindrique. Dans ce cas, la matrice de $\bar{\varepsilon}$ dans sa base principale ressemble à :

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_a & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_a & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_b \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Si les trois valeurs propres sont égales, le tenseur $\bar{\varepsilon}$ est alors qualifié de sphérique, et peut s'écrire :

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_m \bar{I} \quad (4.18)$$

On notera qu'il est toujours possible de décomposer un tenseur de déformation en la somme d'un tenseur sphérique et d'un tenseur $\bar{\varepsilon}^d$ à trace nulle, que l'on appellera déviateur :

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_m \bar{I} + \bar{\varepsilon}^d \quad (4.19)$$

Le scalaire ε_m est appelé allongement unitaire moyen, et vaut :

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3} \varepsilon_I = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \quad (4.20)$$

Le déviateur a pour matrice dans la base principale :

$$\bar{\varepsilon}^d = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

On peut donc dire que le déviateur $\bar{\varepsilon}^d$ est la partie « non-sphérique » du tenseur $\bar{\varepsilon}$, et on en déduira qu'un tenseur sphérique est toujours de déviateur nul.

D. Etats de déformation particuliers

1. Dilatation isotrope

Une dilatation isotrope est une transformation pour laquelle on a :

$$\vec{x} = \lambda \vec{X} \quad (4.22)$$

Soit :

$$\begin{cases} x_1 = \lambda X_1 \\ x_2 = \lambda X_2 \\ x_3 = \lambda X_3 \end{cases} \quad (4.23)$$

Dans ces expressions, λ est un scalaire positif. Par conséquent, les différents tenseurs décrivant cette transformation prennent les formes suivantes :

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\bar{\bar{E}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

On remarque que cette déformation est effectivement une dilatation si $\lambda > 1$, mais peut également être appelé une « contraction » dans le cas contraire. $\bar{\bar{\varepsilon}}$ est sphérique, donc toute direction peut être considérée comme direction principale de déformation. Quelque soit le vecteur \vec{u}_0 , on a donc :

$$\lambda(\vec{u}_0) = \lambda \quad (4.28)$$

2. Extension simple

Un mouvement d'extension simple dans la direction de \vec{e}_1 est défini par :

$$\begin{cases} x_1 = \lambda X_1 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \quad (4.29)$$

λ est un scalaire positif. On a donc :

$$\bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\bar{\bar{E}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Ce mouvement est donc un « étirement » (ou une contraction, si $\lambda < 1$) dans la direction de \vec{e}_1 , les deux autres directions n'étant pas affectées.

On remarque que, dans sa base principale et en un point donné, toute déformation peut être considérée comme la superposition de trois extensions simples, selon les trois vecteurs propres de cette base.

3. Glissement simple

Le glissement simple est plus complexe que les deux autres exemples. Il se définit par les expressions :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + 2\nu X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \quad (4.34)$$

On en déduit les différents tenseurs représentant la transformation :

$$\bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 2\nu & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2\nu & 0 \\ 2\nu & 1 + 4\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\bar{\bar{E}} = \begin{bmatrix} 0 & \nu & 0 \\ \nu & 2\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\bar{\bar{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & \nu & 0 \\ \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$\bar{\bar{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \nu & 0 \\ -\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Si on travaille selon l'HPP, on peut supposer que ν est petit, et donc que ν^2 est négligeable, ce qui conduit bien à $\bar{\bar{E}} = \bar{\varepsilon}$. Le polynôme caractéristique de ce tenseur s'écrit :

$$\det(\bar{\varepsilon} - \varepsilon \bar{I}) = \begin{vmatrix} -\varepsilon & \nu & 0 \\ \nu & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon(\varepsilon^2 - \nu^2) \quad (4.41)$$

Par conséquent, les trois valeurs propres de cette transformation sont $\varepsilon_1 = \nu$, $\varepsilon_2 = -\nu$, et $\varepsilon_3 = 0$. Les trois vecteurs propres correspondants sont :

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \\ \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \\ \vec{b}_3 = \vec{e}_3 \end{cases} \quad (4.42)$$

La matrice de $\bar{\varepsilon}$ dans la base $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ est donc :

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Par conséquent, les directions principales sont les bissectrices des angles droits formés par \vec{e}_1 et \vec{e}_2 , et les deux déformations principales dans ces directions sont opposées : le milieu se dilate autant dans une direction qu'il se contracte dans l'autre.

On peut montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le tenseur $\bar{\varepsilon}$ définisse un glissement simple est que l'une de ses déformations principales soit nulle et que les deux autres soient opposées. Par ailleurs, une telle déformation s'effectue à volume constant, puisque la trace de $\bar{\varepsilon}$ est nulle.

4. Déformation plane

Une déformation plane est une déformation engendrée par un mouvement plan, qui a été défini dans le chapitre 2 et qui se définit comme suit :

$$\begin{cases} x_1 = x_1(X_1, X_2, t) \\ x_2 = x_2(X_1, X_2, t) \\ x_3 = X_3 \end{cases} \quad (4.44)$$

Les matrices des tenseurs $\bar{\bar{F}}$ et $\bar{\bar{C}}$ sont donc de la forme :

$$\begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Les matrices des tenseurs $\bar{\bar{E}}$, $\bar{\bar{H}}$, $\bar{\bar{\varepsilon}}$ et $\bar{\bar{\omega}}$ auront l'allure :

$$\begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

La base principale d'une telle déformation n'est pas difficile à trouver. On sait que l'un des vecteurs propres sera \bar{e}_3 (et que la valeur propre correspondante sera nulle), et pour trouver les deux autres il suffit de trouver les racines d'un polynôme de degré deux (ce que tout bon lycéen sait faire) et de résoudre deux systèmes avec chacun deux équations et deux inconnues. La matrice de $\bar{\bar{\varepsilon}}$ dans cette base principale aura l'allure :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

E. Conditions de compatibilité

On a vu qu'il est très simple de calculer $\bar{\bar{\varepsilon}}$ si l'on connaît l'expression du champ vectoriel de déplacement \bar{U} . L'inverse n'est pas vrai, car un champ tensoriel $\bar{\bar{\varepsilon}}$ quelconque n'est pas toujours « intégrable » sous la forme d'un champ vectoriel. En effet, $\bar{\bar{\varepsilon}}$ représente la déformation "locale" du milieu. Si le milieu continu était un puzzle, alors $\bar{\bar{\varepsilon}}$ représenterait la déformation de chaque pièce.

Or, si l'on déforme de manière arbitraire toutes les pièces d'un puzzle et qu'on essaie ensuite de le reconstituer, on n'a à peu près aucune chance d'y arriver : les pièces ne vont plus correspondre, leurs formes ne pourront plus s'emboîter. Il apparaît donc que, pour être un véritable champ de déformation de milieu continu, $\bar{\bar{\varepsilon}}$ doit vérifier certaines conditions, qu'on appelle conditions de compatibilité.

Mathématiquement, ceci va se formuler par un théorème. Celui-ci expose qu'un champ de tenseurs symétrique $\bar{\bar{\varepsilon}}$, donné au voisinage d'un point M , peut s'interpréter comme la partie symétrique du tenseur $\bar{\bar{H}} = \overline{\overline{\text{grad}}} \bar{U}$ si et seulement si les six relations suivantes, dites de compatibilité, sont vérifiées :

$$2 \left(\overline{\overline{\text{grad}}} (\overline{\overline{\text{div}}} \bar{\varepsilon}) \right) - \Delta \bar{\varepsilon} - \overline{\overline{\text{grad}}} \left(\overline{\overline{\text{grad}}} (\text{tr} \bar{\varepsilon}) \right) = \bar{0} \quad (4.48)$$

Séance 5. Relations fondamentales de la mécanique

Dans les chapitres précédents, on a décrit en détail les mouvements et déformations d'un milieu abstrait, qui n'était jusqu'ici qu'un objet mathématique. On ne s'est, en particulier, pas intéressé encore aux raisons de ces déformations. Dans ce chapitre, on va introduire plusieurs notions (masses, quantités de mouvement, contraintes, etc.) qui vont nous permettre de nous rapprocher un peu plus du monde physique. Ceci va nous permettre d'énoncer les grandes lois fondamentales de la mécanique, qui sont les principaux axiomes de la théorie.

A. Conservation de la masse

1. Axiome

On va, à partir de maintenant, considérer que le milieu déformable que l'on étudie est muni d'une masse. Plus particulièrement, on va définir un champ scalaire, noté ρ et dépendant de l'espace et du temps, que l'on appellera masse volumique. Ce champ sera supposé continu sur l'ensemble du système matériel. Pour tout domaine matériel D_t , la masse de ce domaine s'écrira donc :

$$m(D_t) = \int_{D_t} dm = \int_{D_t} \rho(\vec{x}, t) dv \quad (5.1)$$

On peut donc dire que la masse d'un domaine est égale à l'intégrale du champ "masse volumique" sur ce domaine.

L'axiome de conservation de la masse traduit le fait que la masse d'un domaine matériel (c'est-à-dire d'un domaine constitué à tout instant des mêmes particules matérielles) est une constante dans le temps. Elle ne dépend donc pas des différentes positions occupées par ce domaine au cours du temps. Ceci est finalement assez logique physiquement, puisque si un domaine est constitué en permanence des mêmes particules de matière, il n'y a pas de raison que sa masse soit variable.

On peut donc énoncer : la masse de tout domaine matériel reste constante si on suit ce domaine dans son mouvement.

Il s'agit du premier grand principe de la mécanique. Cette hypothèse implique que l'on s'intéresse à un problème purement mécanique. On exclura donc toutes les questions liées aux réactions chimiques, à la radioactivité, aux mélanges, etc.

2. Forme intégrale et forme locale

L'outil mathématique permettant de formaliser le fait qu'une grandeur est constante en suivant un domaine matériel dans son mouvement est déjà forgé : il s'agit de la dérivée particulaire. On peut donc écrire :

$$\frac{D}{Dt} [m(D_t)] = 0 \quad \text{et donc} \quad \frac{D}{Dt} \int_{D_t} \rho dv = 0 \quad (5.2)$$

Après quelques développements mathématiques, on arrive sur :

$$\int_{D_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) \right] dv = 0 \quad (5.3)$$

ou son équivalent en dérivée lagrangienne:

$$\int_{D_t} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \text{div}(\vec{V}) \right] dv = 0 \quad (5.4)$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky, on peut sortir la divergence de l'intégrale de volume et la transformer en intégrale de surface. On introduit donc S_t , la surface extérieure à l'instant t du domaine matériel D_t , et de normale sortante \vec{n} :

$$\int_{D_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{S_t} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (5.5)$$

Cette expression a le mérite d'exprimer que la variation de masse d'un domaine est due à la somme de deux termes (un terme instationnaire de variation dans le domaine exprimé par la dérivée partielle "eulérienne", et un terme convectif dû au mouvement du domaine par l'intermédiaire du champ de vitesses), et que cette variation est nulle pour un domaine matériel.

Il est intéressant d'observer plus en détail les équations (5.3) et (5.4). Elles énoncent que l'intégrale d'une quantité est nulle sur un domaine matériel quelconque. Puisqu'on a supposé que les différents champs étudiés sont continus, cela signifie très exactement que les termes situés sous l'intégrale sont également nuls.

On peut donc énoncer les formes locales de l'axiome de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (5.6)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (5.7)$$

Ces équations sont également appelées parfois équations intrinsèques de l'axiome. En reformulant la dernière équation, on retrouve :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (5.8)$$

Ceci nous donne une nouvelle signification physique de l'opérateur divergence appliqué à la vitesse : il s'agit de l'opposé de la variation relative de masse volumique en un point.

3. Notion de débit-masse

Dans cette section, on ne s'intéresse plus à un domaine matériel D_t suivi dans son mouvement, mais à un domaine fixe D , de surface extérieure S munie d'une normale sortante \vec{n} .

On appelle débit-masse à travers la frontière S de D à l'instant t la grandeur q_m définie par :

$$q_m = \int_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS \quad (5.9)$$

On a posé que \vec{n} est une normale sortante, ce qui signifie qu'un débit-masse positif signifiera une perte de matière dans le domaine fixe D . On rencontre parfois la convention inverse (convention de la normale rentrante), et il est important de savoir dans quel cas on se place.

Il est important de comprendre que ce débit n'est pas lié à un domaine matériel, sinon il serait égal à zéro (un domaine matériel est par définition toujours constitué des mêmes particules, et ne laisse donc ni entrer ni sortir de la matière).

Pour un domaine fixe, on peut écrire :

$$\frac{\delta m_t}{\delta t} + q_m = 0 \quad (5.10)$$

Ceci signifie que la variation de masse à l'intérieur d'un domaine fixe est opposée au débit-masse à travers sa surface extérieure. On trouve un cas particulier très intéressant de cette expression dans le cas d'un mouvement permanent. Dans ce cas, toute dérivée eulérienne ($\frac{\delta}{\delta t}$) par rapport au temps est égale à zéro, et on a :

$$q_m = 0 \quad (5.11)$$

On peut donc en déduire que le débit-masse à travers la surface extérieure d'un domaine fixe est toujours nul dans le cas d'un mouvement permanent.

L'équation locale $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \text{div } \vec{V} = 0$ fait également apparaître un cas particulier en présence d'un mouvement isochore (c'est-à-dire dans le cas d'un milieu incompressible), puisque l'on sait que dans ce cas-là :

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (5.12)$$

On en déduit que, dans ce type de mouvement, on vérifie en tout point :

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (5.13)$$

La dérivée particulaire de la masse volumique est nulle dans tout mouvement isochore. Par conséquent, la masse volumique de chaque particule matérielle est constante si on la suit dans son mouvement. Ceci ne veut pas dire que la masse volumique est constante dans le milieu, puisqu'elle peut varier d'une particule à l'autre.

C'est pourquoi on introduit la notion de milieu incompressible homogène. Un tel milieu suit un mouvement isochore et sa masse volumique est constante dans l'espace et le temps. Cette hypothèse s'applique très bien au comportement de l'eau liquide dans les applications courantes.

On peut montrer que, sous cette hypothèse, le débit-masse au travers de la surface extérieure à un domaine fixe est toujours nul, même si le mouvement n'est pas permanent.

On peut donc récapituler en disant qu'un débit masse à travers une surface fixe et fermée est nul si le mouvement est permanent, si le milieu est incompressible homogène, ou si ces deux conditions sont remplies.

Le cours d'hydraulique de terrain montrera beaucoup d'applications très pratiques de cette observation.

B. Principe fondamental de la dynamique

1. Notion de contrainte

On s'intéresse ici au mouvement d'un domaine matériel D , muni comme toujours de sa surface extérieure S de normale sortante \vec{n} . Comme d'habitude également, on se place dans un repère R muni d'un centre O et d'une base orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. M désigne un point matériel appartenant à D .

On va ici s'intéresser à l'action des efforts extérieurs appliqués à l'ensemble des particules matérielles qui composent D . Ces efforts se répartissent de manière classique en deux catégories :

- les efforts de volume, qui s'appliquent à tout point M situé à l'intérieur de D . On les appelle également "efforts à distance", et dans l'immense majorité des cas il ne s'agira que de la gravité \vec{g} .

- les efforts de surface, qui s'appliquent à tout point M appartenant à la surface extérieure S du domaine matériel. On les nomme également "efforts de contact", et on les représente par une densité surfacique de forces notée \vec{T} . Cette densité surfacique s'apparente à une pression (c'est-à-dire une force par unité de surface), et dépend de la position \vec{x} de M , de l'instant t , et de l'orientation de la surface S au voisinage du point M , cette orientation étant définie par le vecteur \vec{n} . On a donc :

$$\vec{T} = \vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n}) \quad (5.13)$$

On appelle \vec{T} le vecteur contrainte au point M , à l'instant t , et dans la direction de \vec{n} . Si on s'intéresse de très près au petit élément de la surface S concentrée autour du point M , on s'aperçoit que l'on peut décomposer \vec{T} en deux vecteurs distincts :

- une composante normale, colinéaire au vecteur \vec{n} , que l'on appellera "contrainte normale", et définie par l'expression :

$$\vec{T}_n = T_n \vec{n} \quad (5.14)$$

- une composante tangentielle, normale à \vec{n} et appartenant donc au plan tangent à la surface S au point M , que l'on nommera "contrainte tangentielle" ou "contrainte de cisaillement" et qu'on notera \vec{T}_t . Il existe donc un vecteur \vec{t} appartenant à ce plan tangent, tel que :

$$\vec{T} = T_n \vec{n} + T_t \vec{t} \quad (5.15)$$

2. Définitions

On va ici définir un ensemble de notions qui seront ensuite utilisées dans le principe fondamental de la dynamique. On définit d'abord la notion de torseur des efforts extérieurs appliqués à un domaine matériel, dont la résultante et le moment en un point A quelconque sont donnés respectivement à l'instant t par :

$$\vec{\mathcal{F}} = \int_{S_t} \vec{T} dS + \int_{D_t} \rho \vec{g} dv \quad (5.16)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \int_{S_t} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{T} dS + \int_{D_t} \overrightarrow{AM} \wedge \rho \vec{g} dv \quad (5.17)$$

Ce torseur est donc un "récapitulatif" des efforts à la fois volumiques et surfaciques appliqués à D à l'instant t .

On appelle quantité de mouvement associée à D à l'instant t le vecteur :

$$\vec{\mathcal{P}} = \int_{D_t} \vec{V}(M, t) dm = \int_{D_t} \rho(M, t) \cdot \vec{V}(M, t) dv \quad (5.18)$$

$\vec{\mathcal{P}}$ est parfois également appelé résultante cinétique. Comme le montre cette dernière expression, la quantité de mouvement d'un point matériel est le produit de sa masse par sa vitesse, et la quantité de mouvement d'un domaine matériel est la somme des quantités de mouvements de toutes les particules qui le composent.

De la même manière, on appelle moment de quantité de mouvement au point A , associé à D à l'instant t le vecteur :

$$\vec{\sigma}_A = \int_{D_t} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M, t) dm = \int_{D_t} \rho(M, t) \cdot \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M, t) dv \quad (5.19)$$

$\vec{\sigma}_A$ est également appelé moment cinétique. Le torseur admettant $\vec{\mathcal{P}}$ comme résultante et $\vec{\sigma}_A$ comme moment en un point A est appelé torseur cinétique, ou torseur des quantités de mouvement.

On désigne par $\vec{\gamma}$ l'accélération d'un point matériel, tel que $\vec{\gamma} = D\vec{V}/Dt$. On appelle alors quantité d'accélération à D à l'instant t le vecteur :

$$\vec{\mathcal{A}} = \int_{D_t} \vec{\gamma}(M, t) dm = \int_{D_t} \rho(M, t) \cdot \vec{\gamma}(M, t) dv \quad (5.20)$$

D'une manière similaire à la quantité de mouvement, la quantité d'accélération d'une particule matérielle est le produit de sa masse et de son accélération, et la quantité d'accélération d'un domaine matériel est la somme des quantités d'accélération de toutes les particules le composant. Ce vecteur est aussi appelé résultante dynamique.

On définit aussi le moment de quantité d'accélération au point A , associé à D à l'instant t par le vecteur :

$$\vec{\delta}_A = \int_{D_t} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}(M, t) dm = \int_{D_t} \rho(M, t) \cdot \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}(M, t) dv \quad (5.21)$$

Ce vecteur est également appelé moment dynamique. Le tenseur admettant $\vec{\mathcal{A}}$ comme résultante et $\vec{\delta}_A$ comme moment en un point A est appelé torseur dynamique, ou tenseur des quantités d'accélération.

Il est important de rappeler que les grandeurs $\vec{\mathcal{P}}$, $\vec{\sigma}_A$, $\vec{\mathcal{A}}$, et $\vec{\delta}_A$ sont propres à un domaine matériel D suivi dans son mouvement au cours du temps. Comme toute grandeur attachée à un tel domaine, leurs variations sont donc à la fois dues à un terme instationnaire (variation des grandeurs en un point fixe) et à un terme de convection (dû au mouvement du domaine matériel). On notera que l'on peut écrire :

$$\frac{D\vec{\mathcal{P}}}{Dt} = \vec{\mathcal{A}} \quad (5.22)$$

$$\frac{D\vec{\sigma}_A}{Dt} = \vec{\delta}_A \quad (5.23)$$

3. Principe fondamental de la dynamique

La loi fondamentale de la dynamique énonce qu'il existe au moins un référentiel, dit galiléen, tel que pour tout domaine matériel D , le torseur dynamique associé à D est égal au torseur des efforts extérieurs s'appliquant sur D .

Cette formulation un peu alambiquée est en réalité une définition de la notion de référentiel galiléen, mentionné en introduction de ce cours. Un référentiel galiléen est tout simplement un référentiel dans lequel le principe fondamental de la dynamique (PFD) s'applique.

Ce principe est une version plus élaborée de la deuxième loi de Newton, celle que tous les lycéens ont découvert sous la formule classique $\vec{F} = m\vec{\gamma}$, même si Newton aurait sans doute du mal à reconnaître son travail traduit dans un formalisme contemporain.

La forme intégrale de cet axiome s'énonce sous la forme de deux expressions :

$$\frac{D\vec{\mathcal{P}}}{Dt} = \vec{\mathcal{F}} \quad (5.24)$$

$$\frac{D\vec{\sigma}_0}{Dt} = \vec{\mathcal{M}}_0 \quad (5.25)$$

Ces expressions s'appellent respectivement loi de bilan de quantité de mouvement et loi de bilan de moment de quantité de mouvement, et ont le même statut d'axiome fondamental que la loi de conservation de la masse. Elles peuvent se reformuler par :

$$\frac{D}{Dt} \int_{D_t} \rho \vec{V} dv = \int_{S_t} \vec{T} dS + \int_{D_t} \rho \vec{g} dv \quad (5.26)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{D_t} \overline{OM} \wedge \rho \vec{V} dv = \int_{S_t} \overline{OM} \wedge \vec{T} dS + \int_{D_t} \overline{OM} \wedge \rho \vec{g} dv \quad (5.27)$$

On va ici introduire un nouveau personnage, qui aura une importance capitale dans la suite du cours. Il s'agit du tenseur de contraintes de Cauchy, que l'on notera $\vec{\sigma}$. Ce tenseur est une généralisation du vecteur contrainte $\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n})$. Quand on a introduit ce vecteur, on a précisé qu'il dépendait de la position du point M où il est appliqué (\vec{x}), de l'instant t , et du vecteur unitaire normal à la facette élémentaire (située autour du point M) sur laquelle il est appliqué (\vec{n}). La notion de tenseur de Cauchy permet de s'affranchir de ce dernier vecteur, et de définir de manière complète l'état de contrainte en un point M et à un instant t . Il pourra donc être noté $\vec{\sigma}(\vec{x}, t)$, et il permettra de retrouver le vecteur contrainte sur une facette \vec{n} quelconque par la formule suivante :

$$\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n}) = \vec{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n} \quad (5.28)$$

Ce tenseur sera étudié en détail dans le chapitre suivant. Il est néanmoins nécessaire de l'introduire dans cette partie du cours, car il permet une reformulation intéressante du PFD. On peut en effet écrire :

$$\frac{D}{Dt} \int_{D_t} \rho \vec{V} dv = \int_{S_t} \vec{\sigma} \vec{n} dS + \int_{D_t} \rho \vec{g} dv \quad (5.29)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{D_t} \overline{OM} \wedge \rho \vec{V} dv = \int_{S_t} \overline{OM} \wedge (\vec{\sigma} \vec{n}) dS + \int_{D_t} \overline{OM} \wedge \rho \vec{g} dv \quad (5.30)$$

On a simplement remplacé le vecteur \vec{T} par son expression en fonction du tenseur de contraintes. L'intérêt de cette permutation est que l'on a fait apparaître la normale sortante \vec{n} , et que l'on peut maintenant appliquer le théorème d'Ostrogradski.

On va donc transformer l'intégrale de surface $\int_{S_t} \bar{\sigma} \vec{n} dS$ en intégrale de volume. Par ailleurs, on peut écrire les relations suivantes qui font intervenir l'accélération :

$$\frac{D}{Dt} \int_{D_t} \rho \vec{V} dv = \int_{D_t} \rho \vec{\gamma} dv \quad (5.29)$$

En combinant tous ces résultats, l'équation (5.29) peut être réécrite :

$$\int_{D_t} \rho \vec{\gamma} dv = \int_{D_t} \overrightarrow{\text{div}} \bar{\sigma} dv + \int_{D_t} \rho \vec{g} dv \quad (5.30)$$

L'application du théorème d'Ostrogradski permet d'écrire l'ensemble des termes sous forme d'intégrales de volume définies sur le même domaine. Ils peuvent donc être rassemblés sous la même intégrale, et puisque le domaine d'intégration est quelconque, on peut écrire :

$$\rho \vec{\gamma} = \overrightarrow{\text{div}} \bar{\sigma} + \rho \vec{g} \quad (5.31)$$

Cette expression est appelé la forme locale du bilan de quantité de mouvement. Dans le cas d'un milieu au repos ou de vitesse constante, on aura par conséquent :

$$\overrightarrow{\text{div}} \bar{\sigma} + \rho \vec{g} = \vec{0} \quad (5.32)$$

Dans ces derniers développements, on a mis de côté le bilan de moment de quantité de mouvement, exprimé par les équation (5.25) et (5.30). Les développements permettant d'aboutir à une forme locale de ce bilan sont un peu plus compliqués mathématiquement et ne seront pas détaillés ici. On va en revanche citer sans démonstration une conséquence fondamentale de ce bilan : la symétrie du tenseur de Cauchy. On peut en effet écrire :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^T \quad \text{et} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (5.32)$$

Ce cadeau nous est fait par le bilan de moment de quantité de mouvement, qui traduit en quelques sortes le PFD sous la forme d'un équilibre en rotation d'une particule matérielle. Le tenseur de Cauchy en sera beaucoup plus facile à manier.

C. Autres principes fondamentaux

On a déjà cité le principe de conservation de la masse et le principe fondamental de la dynamique (qui contient à la fois le bilan de quantité de mouvement et le bilan de moment de quantité de mouvement). Outre ces deux axiomes, il en existe d'autres qui sont au delà de la portée de ce cours, mais dont il est utile de mentionner l'existence.

1. Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique est une conséquence directe du PFD (c'est pourquoi il a le droit d'être nommé "théorème", et pas seulement "principe"). Il introduit à la fois la notion d'énergie cinétique d'un domaine matériel (scalaire noté K), et la notion d'efforts intérieurs à ce domaine.

Ce théorème s'écrit :

$$\frac{DK}{Dt} = \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_e \quad (5.33)$$

Dans cette expression, K est l'énergie cinétique contenue à l'intérieur d'un domaine matériel, \mathcal{P}_i est la puissance développée par les efforts intérieurs au domaine, et \mathcal{P}_e est la puissance des efforts extérieurs (qui sont, on le rappelle, des forces de volume et des forces de surface). Ces termes peuvent s'expliciter par :

$$K = \int_{D_t} \frac{1}{2} \rho V^2 dv \quad (5.34)$$

$$\mathcal{P}_i = \int_{D_t} \bar{\sigma} : \bar{D} dv \quad (5.35)$$

$$\mathcal{P}_e = \int_{S_t} \vec{T} \cdot \vec{V} dS + \int_{D_t} \rho \vec{g} \cdot \vec{V} dv \quad (5.36)$$

Finalement, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit de manière complète par :

$$\frac{D}{Dt} \int_{D_t} \frac{1}{2} \rho V^2 dv = \int_{D_t} \bar{\sigma} : \bar{D} dv + \int_{S_t} \vec{T} \cdot \vec{V} dS + \int_{D_t} \rho \vec{g} \cdot \vec{V} dv \quad (5.37)$$

On remarque que la puissance des efforts intérieurs fait intervenir le tenseur taux de déformation \bar{D} , et que la puissance des efforts extérieurs se compose comme prévu d'un terme volumique et d'un terme surfacique.

Le théorème de l'énergie cinétique exprime tout simplement le fait que la variation d'énergie cinétique à l'intérieur d'un domaine matériel est égale à la somme des puissances développées par les efforts extérieurs et intérieurs.

2. Principe des puissances virtuelles

Le principe des puissances virtuelles (PPV) est une loi fondamentale très générale qui implique le principe fondamental de la dynamique. Si le PPV est postulé, alors le principe fondamental de la dynamique peut prétendre au titre de théorème.

L'utilisation du PPV dans le cadre de la MMC est complexe, mais il rendra de grands services pratiques dans le cadre de certaines théories dérivées, telles que la théorie des poutres. Il est également au centre de certaines méthodes numériques de résolution des problèmes de MMC. On se bornera ici à le citer sans aller plus loin.

Ce principe énonce qu'il existe au moins un référentiel dit galiléen tel que, à tout instant t et pour tout domaine matériel D :

- La puissance virtuelle des efforts intérieurs dans tout mouvement virtuel rigidifiant est nulle.
- Dans tout mouvement virtuel de D , la puissance virtuelle des quantités d'accélération est égale à la somme de la puissance virtuelle des efforts extérieurs et de la puissance virtuelle des efforts intérieurs

Même si cette formulation peut paraître un peu obscure, il s'agit en fait d'une généralisation du théorème de l'énergie cinétique à une classe de mouvements dits "virtuels". Ceci permet d'exprimer des équilibres énergétiques avec des considérations purement physiques, sans faire appel à toutes les hypothèses mathématiques que l'on a fait jusqu'à présent dans ce cours pour définir un grand nombre de champs tensoriels et vectoriels.

3. Premier et second principes de la thermodynamique

Les principes de la thermodynamique permettent d'introduire de nouvelles grandeurs énergétiques, telles que l'énergie interne, l'enthalpie, l'entropie, etc. On ne donnera pas ici un cours de thermodynamique. Ces principes sont néanmoins très utiles au mécanicien dans certaines situations qui font intervenir de la chaleur (échauffement d'un outil d'usinage, dilatation thermique d'un milieu soumis à un gradient de température, etc.).

Le premier principe stipule que, pour tout domaine matériel D , la dérivée particulière de l'énergie interne associée à D est égale, à chaque instant, à la somme de la puissance des efforts extérieurs s'exerçant sur D et du taux de chaleur reçue par D . Il s'agit donc d'exprimer l'équilibre énergétique d'un domaine soumis uniquement à un travail (actions mécaniques) et à de la chaleur.

Le second principe énonce que, dans toute évolution de D , le taux de production interne d'entropie est positif ou nul. L'entropie est une expression physique de ce qu'on pourrait appeler le "désordre". De façon imagée et non rigoureuse, le second principe est donc notre explication au fait que, par exemple, lorsqu'on verse du lait dans une tasse de café on obtient un mélange (état désordonné) plutôt que le café d'un côté et le lait de l'autre (état ordonné).

On remarque que le premier principe (aussi appelé bilan d'énergie interne) est une égalité, tandis que le second (aussi appelé bilan d'entropie) est une inégalité. Sans rentrer dans les détails, ces deux principes (et notamment le second) seront à la base de ce qu'on appellera les "modèles de comportement". Un modèle de comportement est un ensemble d'équations, très souvent fondées sur des considérations expérimentales, qui définiront l'état de contrainte actuel d'un milieu en fonction de son historique de déformation (toutes les déformations qu'il a subi dans son histoire). Un tel modèle, pour être valide physiquement, ne devra pas contredire les principes de la thermodynamique. On en verra quelques exemples dans des chapitres ultérieurs du cours.

Séance 6. Contraintes

On a déjà introduit brièvement le concept de contrainte dans le chapitre précédent, on va maintenant s'y intéresser en détails.

A. Théorème de Cauchy

On a défini la contrainte comme étant analogue à une pression, c'est à dire à une force par unité de surface. Plus rigoureusement, la notion de contrainte fait intervenir une limite mathématique. Si on considère une petite facette de surface S et de normale sortante \vec{n} dans un système matériel et que cette facette subit une force \vec{F} , alors on peut définir le vecteur contrainte de la manière suivante :

$$\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n}) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{S} \quad (6.1)$$

En tout point M et à tout instant t , si \vec{n} est un vecteur unitaire, la contrainte en M pour la direction définie par $-\vec{n}$ est l'opposée de la contrainte en M pour la direction définie par \vec{n} , soit :

$$\vec{T}(\vec{x}, t, -\vec{n}) = -\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n}) \quad (6.2)$$

Il s'agit d'une version moderne du principe d'action-réaction postulé par Newton et couramment utilisé en mécanique du solide indéformable.

La théorie de Cauchy s'énonce comme suit : en tout point M et à chaque instant t , la dépendance du vecteur contrainte $\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n})$ par rapport à la normale \vec{n} est linéaire. Il existe donc un champ de tenseur du second ordre noté $\vec{\sigma}$, tel que, dans une base orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ quelconque, on ait :

$$\begin{cases} T_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ T_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ T_3 = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{cases} \quad (6.3)$$

Ceci peut également s'écrire :

$$T_i = \sigma_{ip}n_p \quad (6.4)$$

Ou encore :

$$\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n}) = \bar{\sigma}(\vec{x}, t)\vec{n} \quad (6.5)$$

Le théorème de Cauchy est donc le théorème d'existence du tenseur du même nom, et énonce que la connaissance de ce tenseur en un point donné nous permettra de définir exactement le vecteur contrainte dans n'importe quelle direction autour de ce point. On rappelle que le vecteur \vec{T} représente la force qui s'exerce sur un élément de surface infinitésimal et orientée par un vecteur unitaire \vec{n} donné. Le tenseur $\bar{\sigma}$ définit donc entièrement l'état de contrainte en un point, c'est à dire les "forces internes" qui existent à l'intérieur d'un milieu.

On va maintenant s'intéresser au tenseur $\bar{\sigma}$ en un point M et à un instant t , et on abrègera $\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n})$ en $\vec{T}(\vec{n})$.

La formule (6.3) permet de comprendre le sens des différents termes de la matrice du tenseur $\bar{\sigma}$ dans une base quelconque. Le terme σ_{ij} est la projection sur le vecteur \vec{x}_j de $\vec{T}(\vec{x}_i)$ (vecteur contrainte sur la facette normale à \vec{x}_i). On en déduit que le terme diagonal σ_{ii} représente la contrainte normale à la facette définie par \vec{x}_i , et que les termes non diagonaux représentent les composantes de la contrainte tangentielle, qu'on note généralement τ . Du fait de la symétrie du tenseur $\bar{\sigma}$ que l'on a évoquée au chapitre précédent, on peut reformuler sa matrice ainsi :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Par exemple, le terme τ_{12} représente la composante selon \vec{e}_2 de la contrainte de cisaillement (ou contrainte tangentielle) appliquée à la facette normale à \vec{e}_1 .

Par conséquent, la symétrie de $\bar{\sigma}$ implique une propriété connue sous le nom de réciprocité des contraintes tangentielles : la composante selon \vec{e}_i de la contrainte pour la direction de \vec{e}_j est égale à la composante selon \vec{e}_j de la contrainte pour la direction de \vec{e}_i .

B. Directions principales, invariants

Le tenseur de Cauchy étant symétrique, on peut lui transposer toutes les notions déjà appliquées au tenseur des déformations linéarisées $\bar{\epsilon}$. Ainsi, $\bar{\sigma}$ possède une base orthonormée de vecteurs propres ($\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$), qui sont donc unitaires et orthogonaux deux à deux.

Ces vecteurs propres définissent les directions principales de contrainte. Dans cette base principale, la matrice du tenseur de Cauchy s'écrit :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Les termes diagonaux σ_1 , σ_2 , et σ_3 sont nommés contraintes principales. Dans la plupart des cas, on adopte la convention suivante :

- On note σ_1 la plus grande des trois contraintes principale, et on l'appelle contrainte principale maximale.
- On note σ_3 la plus petite des trois contraintes principales, et on l'appelle contrainte principale minimale.
- On note σ_2 la contrainte principale restante, et on l'appelle contrainte principale intermédiaire.

Lorsque cette convention sera appliquée, on aura donc toujours $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Les vecteurs propres $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ seront donc également ordonnés en conséquence.

La base propre du tenseur des contraintes a une signification physique très marquée. En effet, la contrainte pour une direction principale est colinéaire à cette direction. Autrement dit, une facette orthogonale à un des trois vecteurs propres ne subira aucune contrainte de cisaillement, et sera uniquement soumise à une contrainte normale. Ceci est dû au fait que les termes non-diagonaux de la matrice de $\bar{\sigma}$ (qui définissent les contraintes de cisaillement) sont nuls dans la base principale.

Comme pour le tenseur $\bar{\varepsilon}$, il n'y a aucun moyen simple et rapide pour trouver les valeurs et vecteurs propres de $\bar{\sigma}$ à la main (mais de très nombreux logiciels savent le faire, dont Excel par exemple). Les trois valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique du tenseur, qui s'exprime en σ par :

$$\det(\bar{\sigma} - \sigma \bar{I}) = -\sigma^3 + \sigma_I \sigma^2 - \sigma_{II} \sigma + \sigma_{III} \quad (6.8)$$

Dans cette expression, les termes σ_I , σ_{II} , et σ_{III} sont les trois invariants principaux du tenseur de Cauchy $\bar{\sigma}$

$$\begin{cases} \sigma_I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ \sigma_{II} = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 \\ \sigma_{III} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{cases} \quad (6.9)$$

En particulier, σ_I est la trace de $\bar{\sigma}$, et σ_{III} est son déterminant. Les valeurs propres de $\bar{\sigma}$ sont donc celles qui vérifient :

$$\begin{aligned} \det(\bar{\sigma} - \sigma \bar{I}) &= -\sigma^3 + \sigma_I \sigma^2 - \sigma_{II} \sigma + \sigma_{III} \\ &= -(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Ils s'obtiennent en trouvant les racines d'un polynôme de degré trois, ce qui n'est jamais facile à la main. C'est beaucoup plus facile pour le degré deux, ce qui rend très intéressants les systèmes dits "en contraintes planes".

Comme on l'a fait pour $\bar{\bar{\epsilon}}$, on peut également décomposer $\bar{\bar{\sigma}}$ en une partie sphérique et une partie déviatorique (notée $\bar{\bar{\sigma}}^d$, et appelée déviateur de contrainte) :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sigma_m \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\sigma}}^d \quad (6.11)$$

Le scalaire σ_m est appelé contrainte moyenne, et se calcule par :

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_I = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} \text{tr} \bar{\bar{\sigma}} = \frac{1}{3} \sigma_{ii} \quad (6.12)$$

On notera que le déviateur est toujours un tenseur à trace nulle (puisque sa trace est en fait entièrement contenue dans la partie sphérique). Dans le cas où le déviateur est un tenseur nul, le tenseur de Cauchy est alors un tenseur sphérique et :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sigma_m \bar{\bar{I}} \quad (6.12)$$

Dans ce cas, tous les vecteurs sont directions principales et toutes les contraintes principales valent σ_m .

Dans une base B quelconque, la matrice du déviateur s'écrit :

$$\bar{\bar{\sigma}}^d = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{3} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{33} - \sigma_{11}}{3} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}}{3} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Et dans la base principale $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ de $\bar{\bar{\sigma}}$, cette même matrice s'écrit :

$$\bar{\bar{\sigma}}^d = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

On en déduit que $\bar{\bar{\sigma}}$ et $\bar{\bar{\sigma}}^d$ ont les mêmes directions propres.

C. Cercle de Mohr

1. Principes

La méthode du cercle de Mohr est une représentation graphique d'usage pratique dans la manipulation du tenseur de Cauchy. Cette représentation s'effectue dans le plan de Mohr (O, T_n, T_t) . L'axe horizontal de ce repère représente la composante normale d'un vecteur contrainte, et l'axe vertical représente la composante tangentielle. Chaque point représenté dans ce plan est donc l'extrémité d'un vecteur contrainte potentiel avec une composante normale et une composante de cisaillement :

$$\vec{T} = T_n \vec{n} + T_t \vec{t} \quad (6.15)$$

On se propose de chercher, dans un tel repère, les lieux licites d'existence de cette extrémité, c'est-à-dire le domaine de variation de l'extrémité T du vecteur $\vec{OT} = \vec{T}(\vec{n})$ quand \vec{n} varie. Par calcul tensoriel, on peut écrire dans la base principale $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ de $\bar{\sigma}$:

$$\vec{T}(\vec{n}) = \vec{T}(n_j \vec{c}_j) = n_j \vec{T}(\vec{c}_j) = \sigma_j n_j \vec{c}_j \quad (6.16)$$

Comme \vec{n} est unitaire, on a :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (6.17)$$

On peut écrire ensuite que $T_n = \vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{n} = \sigma_j n_j^2$ (projection de $\vec{T}(\vec{n})$ sur \vec{n}), soit :

$$\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = T_n \quad (6.18)$$

Enfin, comme $\|\vec{T}_n\|^2 = T_n^2 + T_t^2 = \sigma_j^2 n_j^2$ (théorème de Pythagore), on a

$$\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = T_n^2 + T_t^2 \quad (6.19)$$

On a donc un système linéaire de trois équations à trois inconnues, qui sont n_1^2 , n_2^2 , et n_3^2 , dont la solution est :

$$n_1^2 = \frac{(T_n - \sigma_2)(T_n - \sigma_3) + T_t^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (6.20)$$

$$n_2^2 = \frac{(T_n - \sigma_3)(T_n - \sigma_1) + T_t^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} \quad (6.21)$$

$$n_3^2 = \frac{(T_n - \sigma_1)(T_n - \sigma_2) + T_t^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \quad (6.22)$$

Puisque les trois inconnues n_1^2 , n_2^2 , et n_3^2 sont positives ou nulles, et en gardant la convention $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, les trois relations précédentes entraînent les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} (T_n - \sigma_2)(T_n - \sigma_3) + T_t^2 \geq 0 \\ (T_n - \sigma_3)(T_n - \sigma_1) + T_t^2 \leq 0 \\ (T_n - \sigma_1)(T_n - \sigma_2) + T_t^2 \geq 0 \end{cases} \quad (6.23)$$

Ceci peut se reformuler par :

$$\begin{cases} \left(T_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + T_t^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \\ \left(T_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + T_t^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \\ \left(T_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + T_t^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \end{cases} \quad (6.24)$$

Ces trois relations nous permettent de situer l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{OT} = \vec{T}(\vec{n})$ dans le plan de Mohr, car elles définissent trois équations de cercles. La figure (6.1) permet de se fixer les idées sur un cas illustratif. On place d'abord les points correspondants aux trois contraintes principales σ_1 , σ_2 , et σ_3 (qui se trouvent sur l'axe horizontal, puisque des contraintes principales n'ont pas de composante tangentielle).

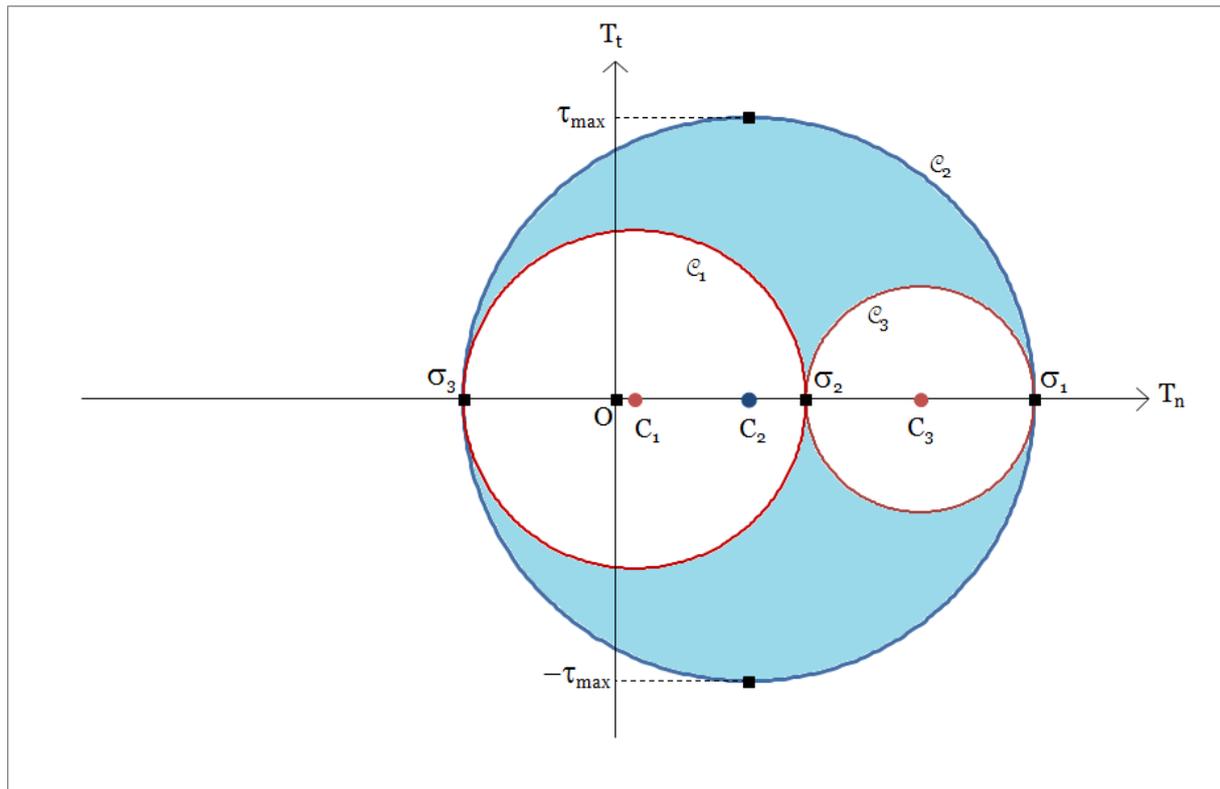


Figure (6.1). Tricercler de Mohr

La première inégalité de l'équation (6.24) stipule que le point T est situé à l'extérieur du cercle que l'on nommera \mathcal{C}_1 , de rayon $\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$ et dont le centre noté C_1 est sur l'axe horizontal à l'abscisse $\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$. La troisième ligne stipule également que ce point T est à l'extérieur du cercle que l'on nommera \mathcal{C}_3 , de rayon $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ et dont le centre noté C_2 est sur l'axe horizontal à l'abscisse $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$. Enfin, la deuxième ligne stipule que le point T est situé à l'intérieur du cercle que l'on nommera \mathcal{C}_2 , de rayon $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ et dont le centre noté C_2 est sur l'axe horizontal à l'abscisse $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$. Finalement, le domaine de variation licite pour l'extrémité du vecteur contrainte dans le plan de Mohr est le domaine coloré sur la figure (6.1), c'est à dire situé à l'intérieur de \mathcal{C}_2 et à l'extérieur de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_3 .

Pour donner une explication plus concrète, considérons la première inégalité de l'expression (6.24) :

$$\left(T_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + T_t^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (6.25)$$

Si on remplace cette inégalité par une égalité, on obtient $n_1 = 0$ grâce à l'équation (6.20), et on obtient aussi très exactement l'équation du cercle \mathcal{C}_1 . On en déduit que lorsque \vec{n} est dans le plan (\vec{c}_2, \vec{c}_3) (c'est-à-dire lorsqu'il "tourne autour de \vec{c}_1 "), l'extrémité du vecteur contrainte parcourt le cercle \mathcal{C}_1 . On peut conduire des raisonnements identiques pour les cercles \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 .

La représentation de Mohr permet en fait de caractériser l'état de contrainte en un point. On appelle généralement \mathcal{C}_2 le grand cercle de Mohr, et l'ensemble prend le nom de tricercler de Mohr. Du fait de la symétrie de l'ensemble, on se contente souvent de représenter uniquement la moitié supérieure des cercles, comme dans la figure (6.2).

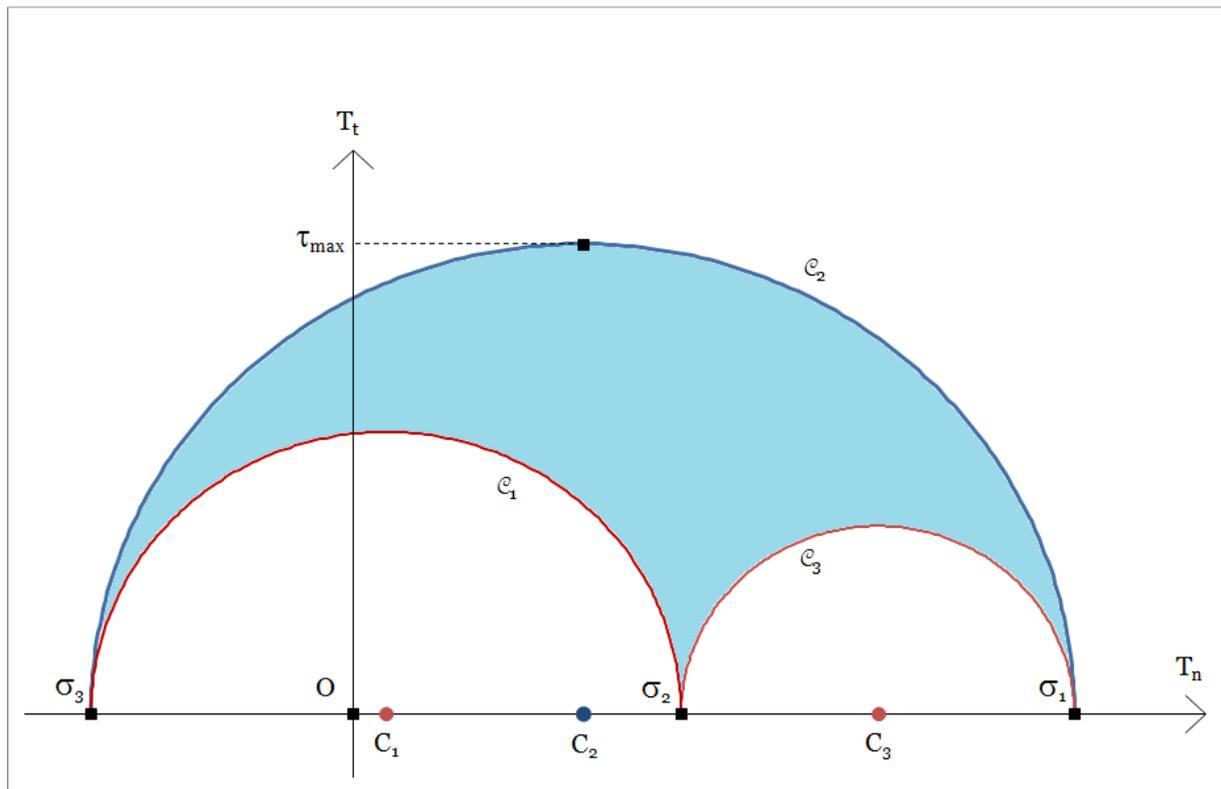


Figure (6.2). Représentation pratique du tricercler de Mohr

2. Contrainte de cisaillement maximal

On remarque sur les représentations graphiques que la valeur maximale de T_t est égale au rayon du grand cercle de Mohr. Cette valeur est appelée contrainte de cisaillement maximale, et vaut :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \tag{6.26}$$

La contrainte normale correspondante vaut alors :

$$T_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (6.27)$$

Le point T correspondant à cette configuration est située sur le cercle \mathcal{C}_2 , donc on vérifie $n_2 = 0$. On en déduit que le cisaillement maximal que l'on obtient en un point donné d'un milieu continu est toujours obtenu sur une facette dont la normale est sur le plan défini par les contraintes principales maximale et minimale, c'est-à-dire que \vec{n} appartient au plan (\vec{c}_1, \vec{c}_3) . Par ailleurs, les équations (6.20) et (6.22) fournissent :

$$n_1^2 = n_3^2 = \frac{1}{2} \quad (6.28)$$

Par conséquent, les facettes dans lesquelles apparaissent le cisaillement maximal sont celles pour lesquelles la normale \vec{n} est colinéaire à une des bissectrices des directions des contraintes principales maximale et minimale, et ce quelle que soit la valeur de la contrainte principale intermédiaire.

3. Description du grand cercle de Mohr

On va maintenant se fixer les idées en considérant uniquement le grand cercle de Mohr, c'est-à-dire le cercle \mathcal{C}_2 . C'est d'ailleurs une démarche très courante en mécanique des sols, comme on le verra plus tard dans ce chapitre en étudiant l'état de contrainte triaxial de révolution. On l'adopte souvent parce qu'elle simplifie la représentation et qu'elle place d'emblée le problème dans le plan où a lieu le cisaillement maximal. Néanmoins, tous les raisonnements conduits sur \mathcal{C}_2 peuvent être étendus aux deux autres cercles. On se place dans la configuration représentée sur la figure (6.3).

Comme on l'a vu précédemment, se placer sur le grand cercle de Mohr revient à se placer sur une facette dont la normale \vec{n} appartient au plan (\vec{c}_1, \vec{c}_3) . Ce plan est également le plan de cisaillement maximal. Une telle facette est représentée sur la figure (6.3), ses directions normales et tangentielles étant en cohérence avec celles du plan de Mohr.

On suppose que la normale \vec{n} à la facette fait un angle orienté φ avec le repère principal $(M, \vec{c}_1, \vec{c}_3)$, et que le vecteur unitaire tangent \vec{t} a donc un angle orienté qui vaut $\varphi + \pi/2$ (puisque'il est normal à \vec{n}). Leurs coordonnées dans le repère principal $(M, \vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ (aussi appelé espace réel) valent :

$$\vec{n} = \begin{cases} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{cases} \quad (6.29)$$

$$\vec{t} = \begin{cases} -\sin\varphi \\ 0 \\ \cos\varphi \end{cases} \quad (6.30)$$

Le vecteur contrainte \vec{T} au point M a les coordonnées suivantes dans ce même repère principal :

$$\vec{T}(\vec{n}) = \bar{\sigma}\vec{n} = \begin{cases} \sigma_1 \cos\varphi \\ 0 \\ \sigma_3 \sin\varphi \end{cases} \quad (6.31)$$

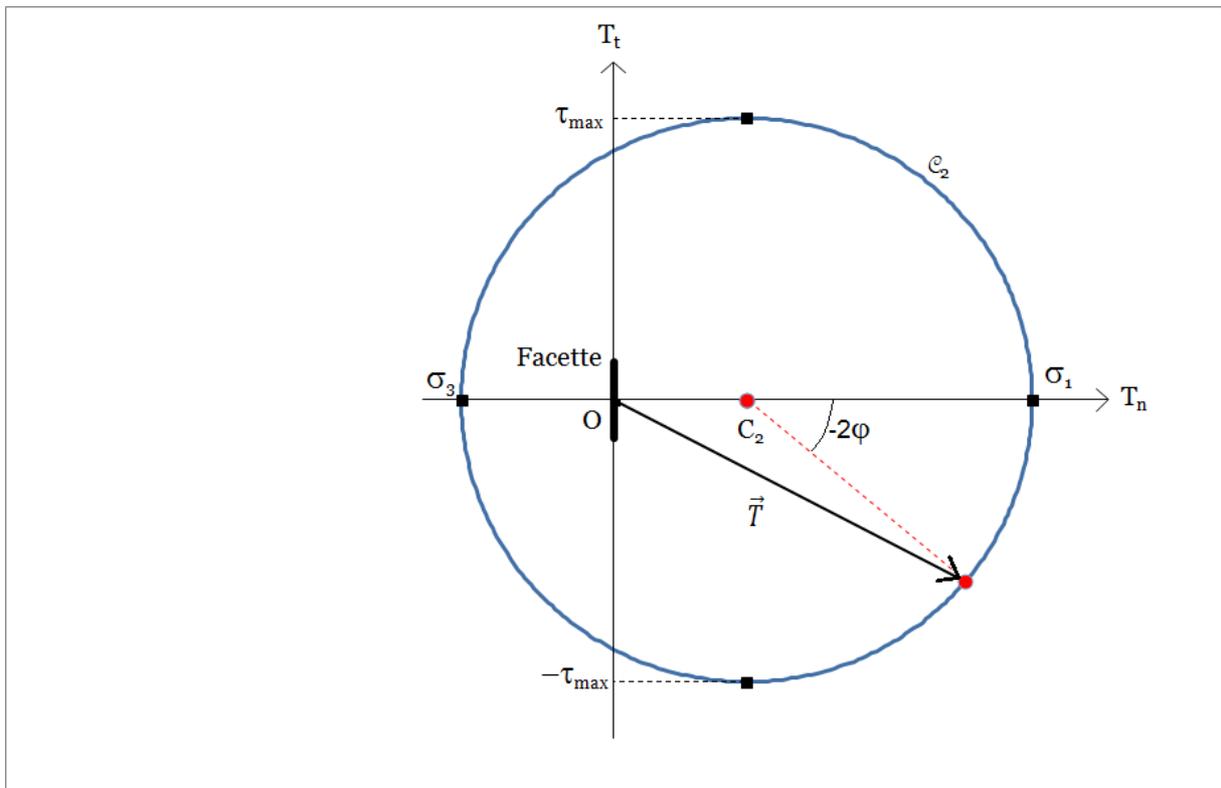


Figure (6.3). Grand cercle de Mohr

Les composantes normale et tangentielle de $\vec{T}(\vec{n})$ s'obtiennent en projetant ce vecteur sur \vec{n} et \vec{t} respectivement, ce qui s'obtient mathématiquement par l'intermédiaire d'un produit scalaire :

$$T_n = \vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{n} = \sigma_1 \cos^2\varphi + \sigma_2 \sin^2\varphi \quad (6.32)$$

$$T_t = \vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{t} = -\sigma_1 \cos\varphi \sin\varphi + \sigma_2 \cos\varphi \sin\varphi \quad (6.33)$$

Ces expressions se reformulent par :

$$T_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\varphi) \quad (6.34)$$

$$T_t = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(-2\varphi) \quad (6.35)$$

Ces expressions nous fournissent de nouveau l'équation du cercle \mathcal{C}_2 , ce qui est déjà rassurant. En outre, du fait de la parité de la fonction cosinus, on constate que le vecteur joignant le centre du cercle, noté C_2 et de coordonnées $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right)$, et le point T (extrémité du vecteur \vec{T}) a un angle orienté égal à -2φ dans le repère (M, \vec{n}, \vec{t}) du plan de Mohr (aussi appelé espace image).

On en déduit que, lorsque la facette "tourne" d'un angle φ dans l'espace réel, le vecteur $\vec{C_2T}$ "tourne" d'un angle -2φ dans l'espace image. Cette propriété est très utile pour retrouver l'orientation d'une facette à partir d'un état de contrainte donné.

Pour illustrer ces résultats, considérons la figure (6.4). Dans cette figure, on va se placer en un point M d'un milieu continu à un instant t , se fixer un état de contrainte (défini par les valeurs propres σ_1 , σ_2 , et σ_3), et on va "explorer" les différentes orientations possibles de la facette dans le plan de cisaillement maximal. Autrement dit, on va faire varier l'orientation φ du vecteur \vec{n} dans l'espace réel $(M, \vec{c}_1, \vec{c}_3)$.

Lorsque $\varphi = 0$, la normale \vec{n} est alignée avec la direction principale \vec{c}_1 . Il n'y a donc pas de composante de cisaillement, et la contrainte normale est égale à la contrainte principale maximale σ_1 . Si on fait tourner la facette pour obtenir $\varphi = 20^\circ$ dans l'espace réel, on fait également tourner le vecteur $\vec{C_2T}$ de $-2\varphi = -40^\circ$ dans l'espace image, ce qui fait apparaître une contrainte tangentielle.

Lorsque $\varphi = 45^\circ$, on a fait tourner le vecteur $\vec{C_2T}$ de -90° dans l'espace image, ce qui signifie que le point T coïncide avec le point de cisaillement maximal (en valeur absolue). On a donc $|T_t| = \tau_{max}$. On constate, comme on l'a démontré plus haut, que cette situation coïncide avec le fait que la normale \vec{n} à la facette est colinéaire à une des bissectrices des directions principales \vec{c}_1 et \vec{c}_3 dans l'espace réel.

Si on continue à faire tourner la facette jusqu'à un angle qui vaut approximativement $\varphi = 59^\circ$ dans notre exemple, on obtient une situation particulière dans laquelle la contrainte normale s'annule. On a en effet fait tourner le vecteur $\vec{C_2T}$ d'environ $-2\varphi = -118^\circ$, et on constate que ceci conduit le vecteur \vec{OT} à être colinéaire avec la direction de T_n dans l'espace image. On est donc en situation de cisaillement pur, ce qui peut également s'observer dans l'espace réel, où le vecteur contrainte \vec{T} est orthogonal au vecteur normal \vec{n} de la facette, et est donc tangent à cette facette.

En continuant la rotation de la facette jusqu'à $\varphi = 80^\circ$, on fait de nouveau apparaître une contrainte normale, mais on constate que celle-ci a changé de signe puisque le vecteur \overrightarrow{OT} pointe désormais "à gauche" dans le plan de Mohr. Ce qui était une contrainte de traction selon les premières orientations de la facette est donc maintenant devenu une contrainte de compression selon cette nouvelle orientation. Le changement s'est opéré pour $\varphi = 59^\circ$, lorsque la contrainte normale s'est annulée avant de changer de signe.

Finalement, lorsque l'on atteint $\varphi = 90^\circ$, on a fait tourner le vecteur $\overrightarrow{C_2T}$ de $-2\varphi = -180^\circ$. On se retrouve de nouveau avec une facette dont la normale est alignée avec une direction principale, excepté qu'il s'agit maintenant de la direction $\overrightarrow{c_3}$. La contrainte de cisaillement est donc nulle, et la contrainte normale vaut σ_3 et est négative. Ceci est confirmé dans l'espace réel, où le vecteur contrainte \vec{T} pointe dans la direction opposée à l'orientation \vec{n} de la facette.

Finalement, on constate donc que, lorsque l'on a fait varier l'orientation φ de la facette de 0 à 90° dans l'espace réel (c'est à dire de $\overrightarrow{c_1}$ à $\overrightarrow{c_3}$), on a fait varier le vecteur $\overrightarrow{C_2T}$ de 0 à -180° dans l'espace image et on a parcouru un demi-cercle de Mohr. On remarque également que, lors de cette rotation de la facette, l'extrémité du vecteur contrainte \vec{T} dans l'espace réel a parcouru le contour d'une ellipse de demi-grand axe σ_1 et de demi-petit axe σ_3 .

Au cours de cette rotation, la contrainte normale sur la facette s'est annulée puis a changé de signe. Ceci est propre à l'exemple choisi, mais n'est pas une généralité. En fait, cela se produira uniquement lorsque les deux contraintes principales σ_1 et σ_3 seront de signes opposés. Cette condition est donc aussi nécessaire à l'existence d'une orientation de facette conduisant à un cisaillement pur.

Enfin, il est important de préciser que l'on a adopté ici la convention habituelle de la mécanique fondamentale, c'est-à-dire qu'une contrainte négative correspond à une compression (on "pousse" sur le milieu continu), et qu'une contrainte positive correspond à une traction (on "tire" sur le milieu continu). Dans certaines disciplines spécialisées qui intéressent particulièrement le géotechnicien, on adopte très souvent la convention inverse. C'est notamment le cas de manière systématique en mécanique des structures (béton, acier, bois, etc.) et en mécanique des sols. Il faudra donc bien prendre garde à savoir dans quelle convention de signe on se place pour un problème donné.

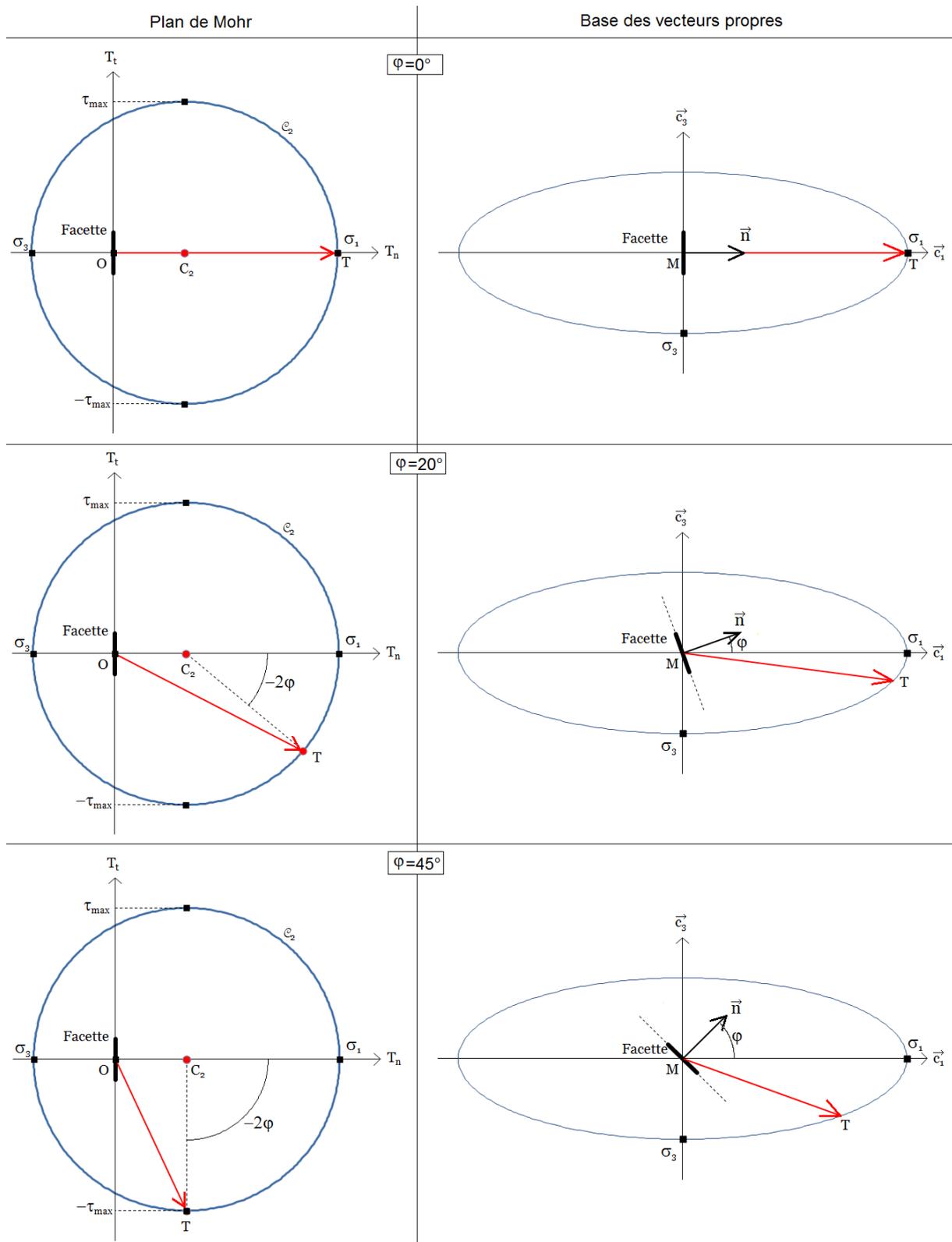


Figure (6.4). Correspondance Plan Image / Plan Réel

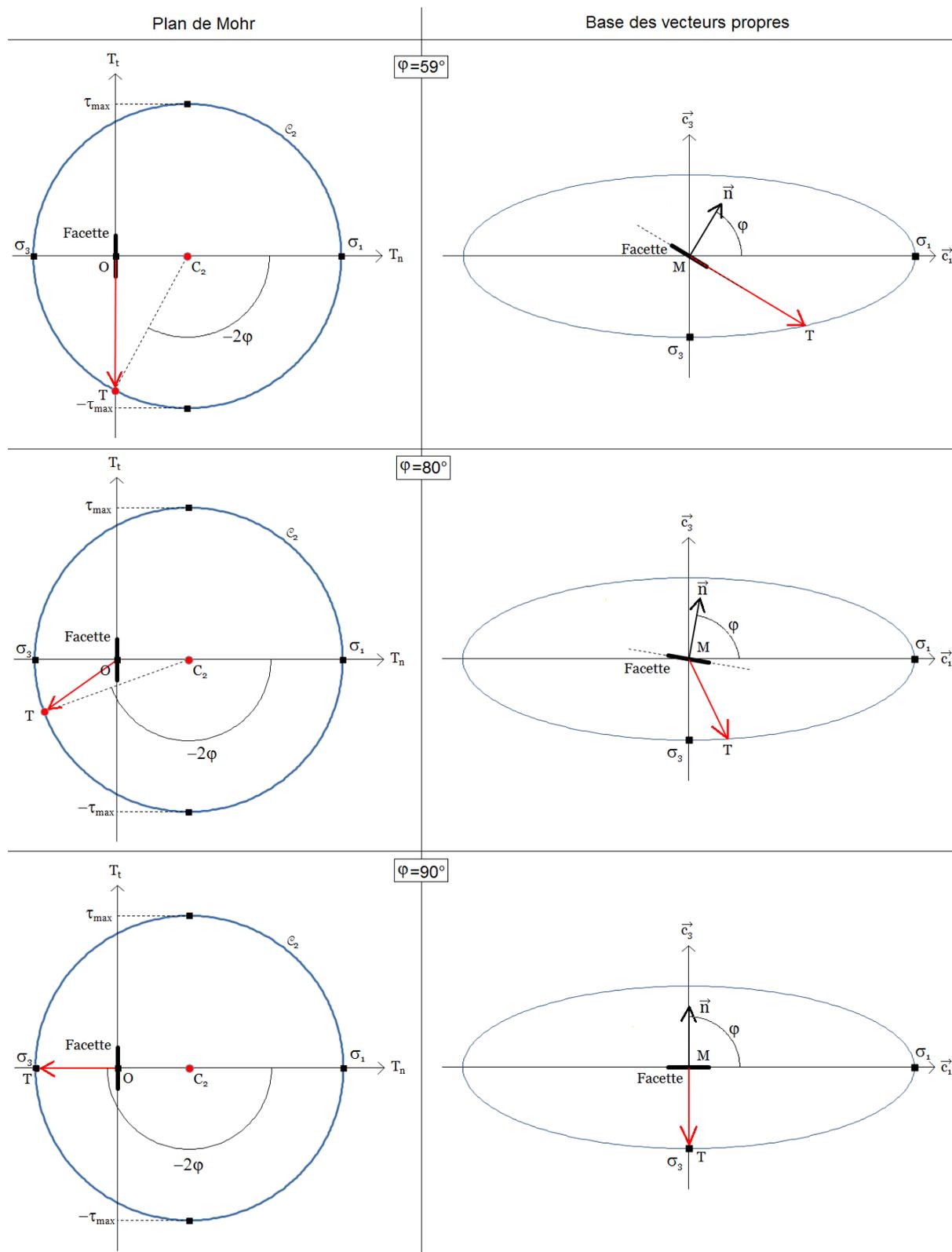


Figure (6.4). Correspondance Plan Image / Plan Réel (Suite)

D. Etats de contrainte particuliers

Comme on l'a fait pour le tenseur des déformations linéarisées $\bar{\bar{\epsilon}}$, on va maintenant décrire quelques états de déformation particuliers, qui correspondent à des formes spécifiques du tenseur $\bar{\bar{\sigma}}$. On va observer beaucoup de similitudes entre les états particuliers de déformation et de contraintes, mais il est important de garder à l'esprit que, pour l'instant, nous n'avons établi aucun lien entre contraintes et déformations. Ainsi, une configuration particulière de d'un des tenseurs ne signifiera pas nécessairement que l'autre adoptera la configuration identique. Ceci dépendra du modèle de comportement appliqué, notion que l'on abordera dans un chapitre ultérieur.

1. Traction ou compression hydrostatique

On dit que $\bar{\bar{\sigma}}$ est un tenseur de contrainte hydrostatique s'il est sphérique. Dans ce cas le déviateur de contrainte est nul ($\bar{\bar{\sigma}}^d = \bar{\bar{0}}$) et le tenseur de Cauchy peut s'écrire :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sigma_m \bar{\bar{I}} \quad (6.36)$$

Les trois contraintes principales sont égales à σ_m , et toute direction \vec{n} est une direction principale. Lorsque σ_m est positif on est en présence de traction hydrostatique, et lorsque σ_m est négatif on est en présence de compression hydrostatique. Ce dernier cas est celui qui existe au sein d'un fluide au repos. L'opposé de la contrainte moyenne σ_m est alors appelée pression, et notée p :

$$p = -\sigma_m \quad (6.37)$$

En cas de contrainte hydrostatique, le tricerclé de Mohr se réduit en un point unique, de coordonnées $(\sigma_m, 0)$ dans le plan de Mohr.

Comme on l'a énoncé plus haut, cet état de contrainte présente des similitudes avec l'état de dilatation isotrope présenté pour $\bar{\bar{\epsilon}}$, mais il faut garder à l'esprit qu'il n'y a pas de raison *a priori* pour que l'un entraîne l'autre (même si ce sera souvent le cas).

2. Traction ou compression simple dans une direction

Un état de traction ou de compression simple dans une direction \vec{u} existe si \vec{u} est une direction principale de $\bar{\bar{\sigma}}$ et si la contrainte principale correspondante est la seule à être non-nulle.

Dans une base principale $(\vec{u}, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ (pour laquelle \vec{c}_2 et \vec{c}_3 représentent deux vecteurs quelconques orthogonaux entre eux et orthogonaux à \vec{u}), la matrice de $\bar{\sigma}$ s'écrit alors :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

Le vecteur contrainte \vec{T} subi par toute facette est toujours colinéaire à \vec{u} . Lorsque σ_1 est négatif on est en compression simple, et lorsque σ_1 est positif on est en traction simple.

Dans le plan de Mohr, l'état de traction ou de compression simple est représenté sur la figure (6.5), dans le cas de la traction en l'occurrence. Comme on le voit, le cercle \mathcal{C}_1 se résume au point O , et les cercles \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 sont confondus. Un tel état de contrainte est également appelé état uniaxial.

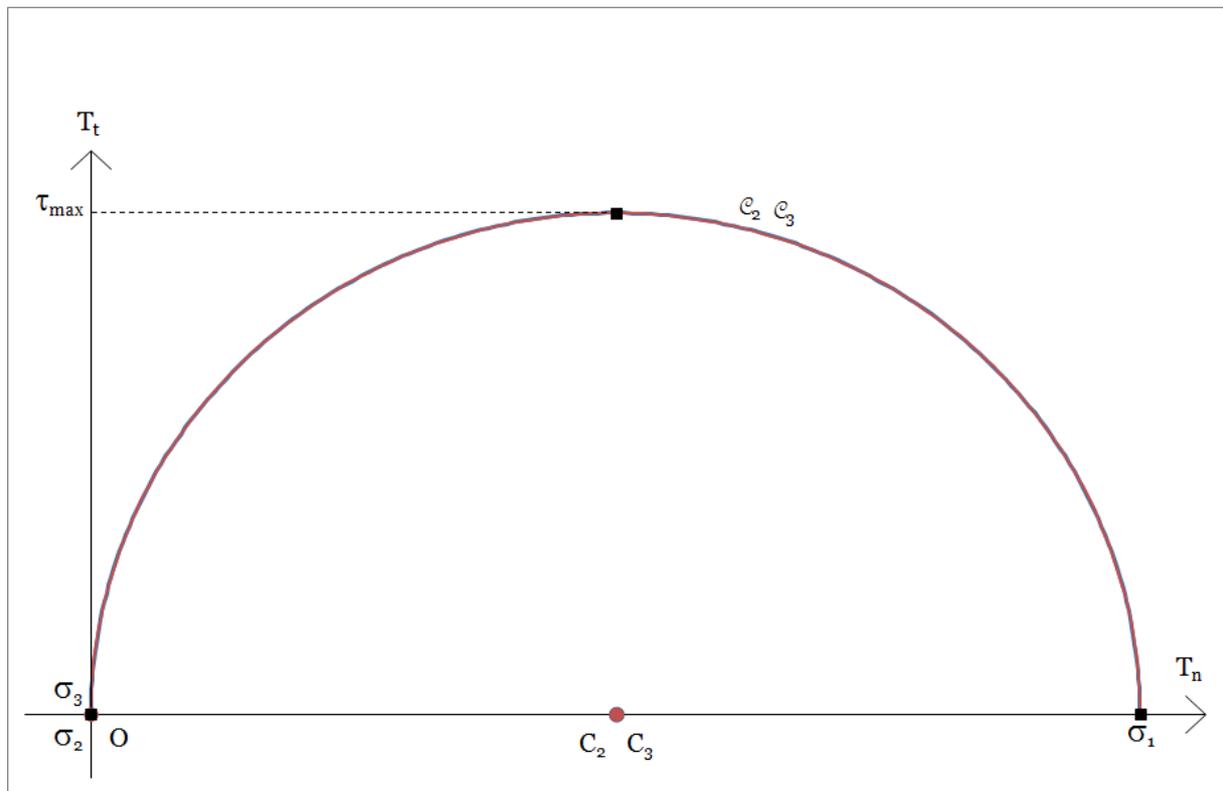


Figure (6.5). Etat de traction uniaxiale

On notera qu'un état de contrainte quelconque en un point et à un instant donnés peut toujours être considéré comme la superposition de trois états de contraintes uniaxiales selon ses trois directions principales.

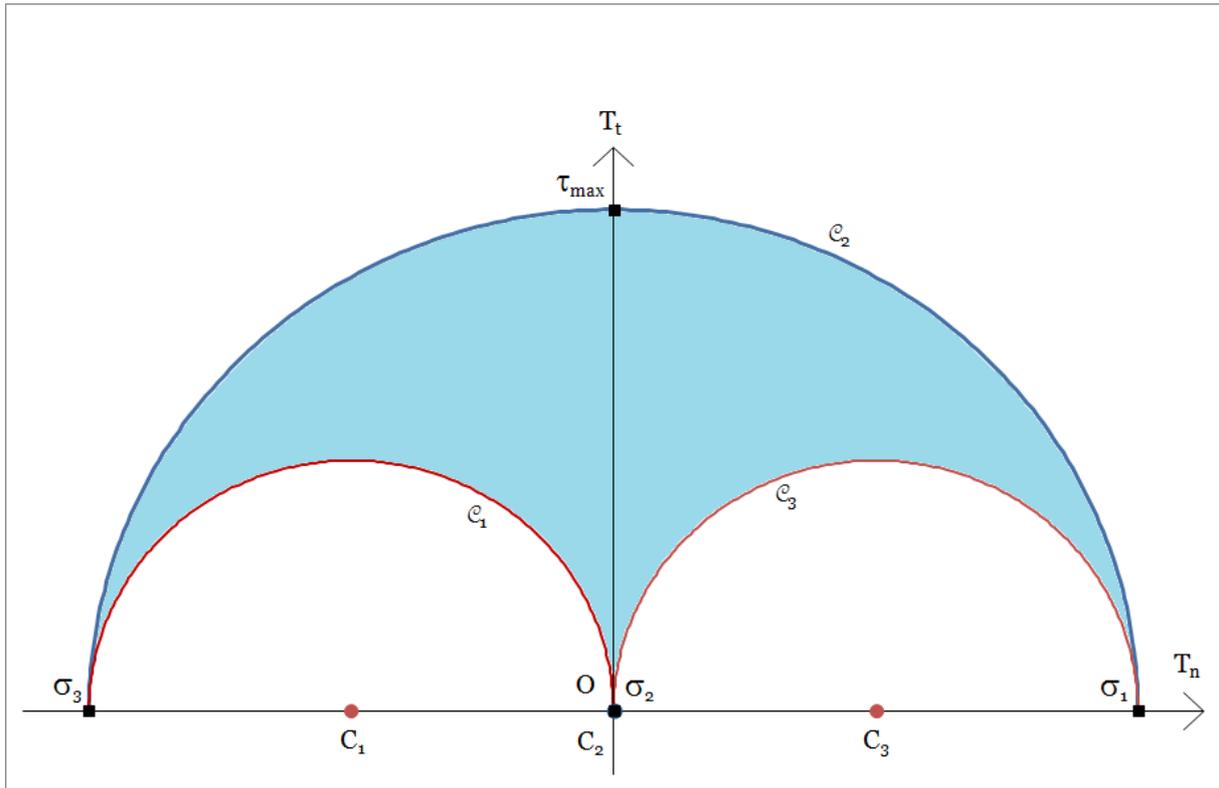


Figure (6.6). Etat de cisaillement simple

3. Cisaillement simple

On dit que $\bar{\sigma}$ définit un cisaillement simple dans deux directions orthogonales \vec{u} et \vec{u}' si la matrice de $\bar{\sigma}$ dans une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{u}', \vec{u}'')$ s'écrit :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

La base propre de ce tenseur de contrainte est la base $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ telle que :

$$\begin{cases} \vec{c}_1 = \frac{\vec{u} + \vec{u}'}{\sqrt{2}} \\ \vec{c}_2 = \vec{u}'' \\ \vec{c}_3 = \frac{-\vec{u} + \vec{u}'}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (6.40)$$

Dans cette base, la matrice de $\bar{\bar{\sigma}}$ s'écrit alors :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

On en déduit qu'un état de cisaillement simple correspond à tout état de contrainte pour lequel une des contraintes principales est nulle et les deux autres son opposées. Un tel état est représenté dans le plan de Mohr sur la figure (6.6).

4. Etat de contrainte triaxial de révolution

On dit que $\bar{\bar{\sigma}}$ est un état de contrainte triaxial de révolution si deux contraintes principales sont égales et non-nulles. Dans la plupart des cas, il s'agira des contraintes principale minimale et intermédiaire, et on aura :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

Cet état de contrainte est archi-classique en mécanique des sols, car il correspond exactement à celui existant dans un échantillon de sol soumis à un essai triaxial de révolution. Comme cela apparaît dans la figure (6.7), le tricercler de Mohr se résume alors au seul cercle \mathcal{C}_2 , de manière analogue à l'état de contrainte uniaxiale (excepté que la contrainte principale minimale n'est pas nulle).

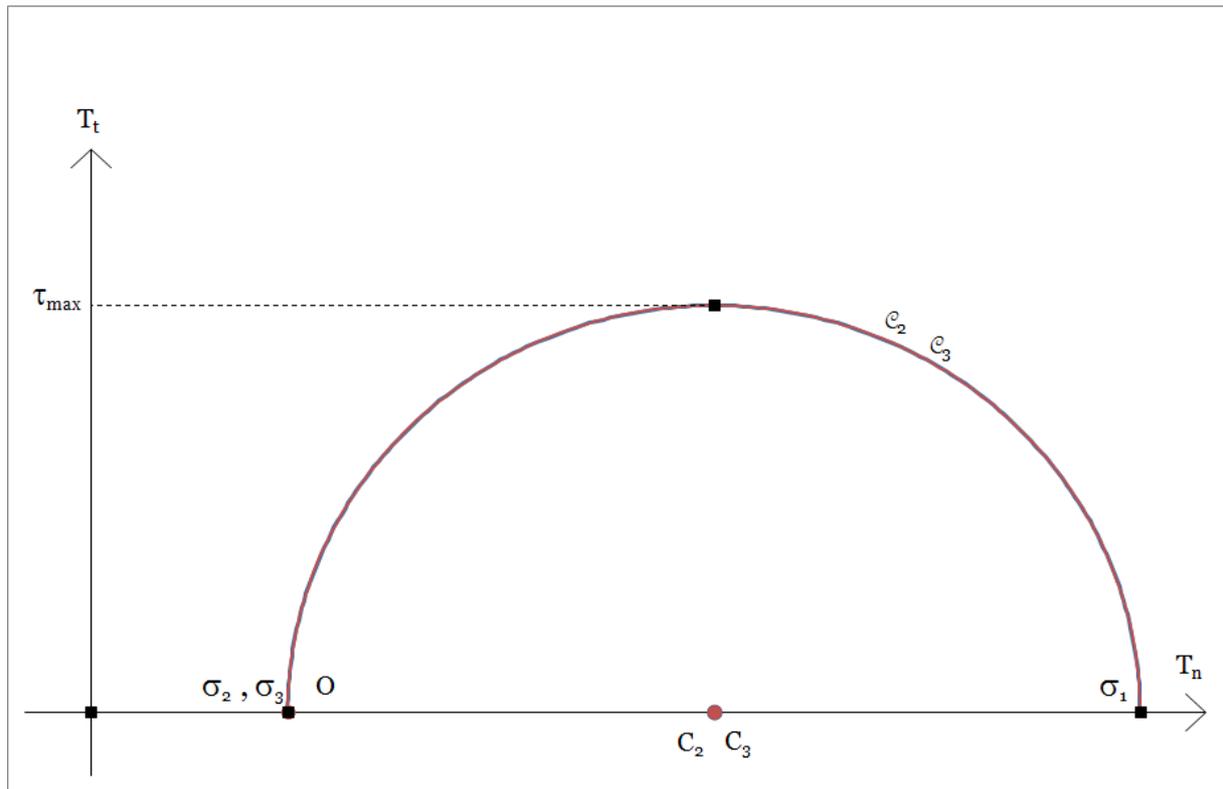


Figure (6.7). Etat de contrainte triaxiale de révolution

5. Etat de contrainte plane

Un tenseur $\bar{\sigma}$ correspond à une contrainte plane si une des contraintes principales est nulle. Si on suppose par exemple qu'il s'agit de σ_3 , l'état de contrainte sera dit plan dans un plan perpendiculaire au vecteur \vec{c}_3 . Dans une base principale $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$, la matrice de $\bar{\sigma}$ s'écrit alors :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

Dans une base quelconque contenant le vecteur \vec{c}_3 et notée $(\vec{u}, \vec{u}', \vec{c}_3)$, la matrice de $\bar{\sigma}$ prend alors la forme :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

Cet état de contrainte est représenté dans la plan de Mohr par la figure (6.8).

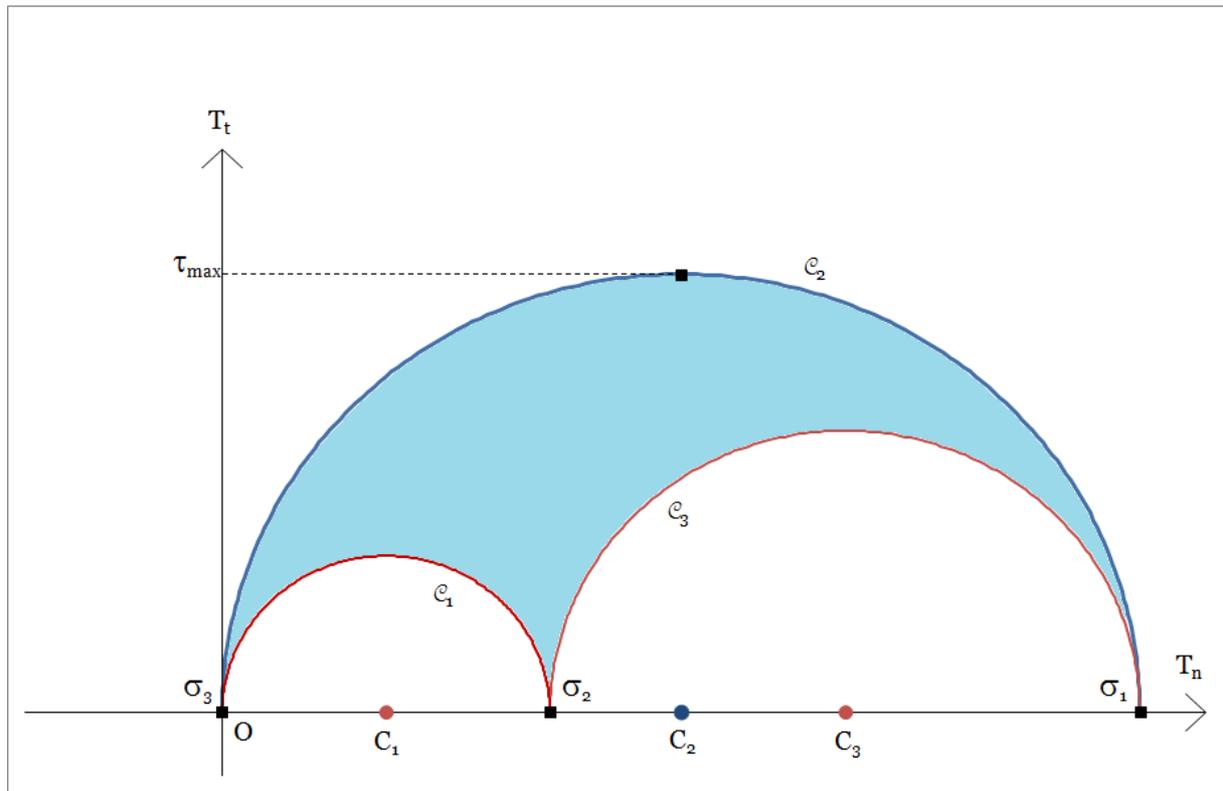


Figure (6.8). Etat de contrainte plane