



INTRODUCTION A LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Exercices corrigés

Guilhem MOLLON

*Polytech Grenoble
Département Géotechnique, Troisième année
Edition 1, 2012-2013*

1. Calcul tensoriel

Exercice A. Montrer que la symétrie est une propriété tensorielle, c'est-à-dire que si un tenseur $\bar{\bar{S}}$ est symétrique ($S_{ij} = S_{ji}$) dans une base orthonormée donné $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, alors cette propriété est également vraie dans toute autre base orthonormée $B' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$.

Exercice B. Montrer que l'antisymétrie est également une propriété tensorielle.

Exercice C. Montrer qu'un tenseur $\bar{\bar{T}}$ quelconque peut toujours se décomposer en une partie symétrique et une partie antisymétrique.

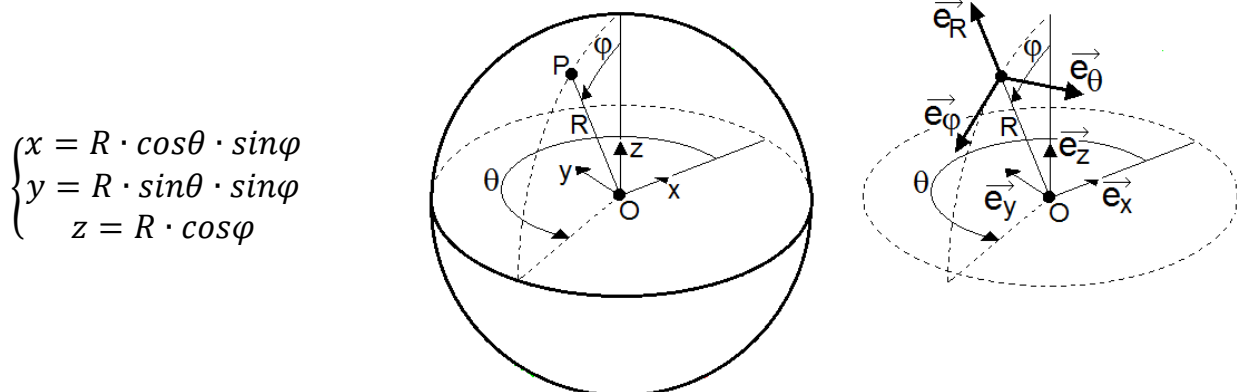
Exercice D. Soit $\bar{\bar{S}}$ un tenseur symétrique et $\bar{\bar{A}}$ un tenseur antisymétrique, montrer que l'on a toujours $\bar{\bar{S}} : \bar{\bar{A}} = 0$.

Exercice E. Soit $\bar{\bar{S}}$ un tenseur symétrique et $\bar{\bar{T}}$ un tenseur quelconque, montrer que l'on a toujours : $\bar{\bar{S}} : \bar{\bar{T}} = \bar{\bar{S}} : \bar{\bar{T}}^S$, où $\bar{\bar{T}}^S$ est la partie symétrique de $\bar{\bar{T}}$.

Exercice F. Soit \vec{A} un champ vectoriel. Montrer que l'on a toujours $div(\overrightarrow{rot} \vec{A}) = 0$

Exercice G. Soit A un champ scalaire. Montrer que l'on a toujours $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad} A) = \vec{0}$

Exercice H. Soit la base curviligne polaire $(\vec{e}_R, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$, telle que :



1. Calculer la surface extérieure d'une sphère de rayon R , sachant qu'un élément de surface infinitésimal peut s'écrire $dS = R^2 \sin\varphi d\theta d\varphi$.

2. Calculer l'intégrale du champ $\cos\varphi \cdot \vec{e}_R$ sur cette sphère, sachant que le vecteur élémentaire dans la direction radiale vaut $\vec{e}_R = \sin\varphi \cos\theta \vec{e}_x + \sin\varphi \sin\theta \vec{e}_y + \cos\varphi \vec{e}_z$

Corrigés

Exercice A.

Soit un tenseur $\bar{\bar{S}}$ symétrique. Dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ on peut donc écrire $S_{ij} = S_{ji}$. Soit une base orthonormée quelconque $B' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ différente de B . On appelle α la matrice de passage de B à B' . Si on appelle S'_{ij} les termes de la matrice de $\bar{\bar{S}}$ dans la base B' , on a d'après le cours (en notation d'Einstein) :

$$S'_{ij} = \alpha_{ip} \alpha_{jq} S_{pq}$$

Or la matrice S est symétrique, on a donc $S_{pq} = S_{qp}$. On écrit donc :

$$S'_{ij} = \alpha_{ip} \alpha_{jq} S_{qp}$$

Les indices p et q du second membre sont muets, on pourrait donc les remplacer par n'importe quelle lettre, et on peut aussi les intervertir :

$$S'_{ij} = \alpha_{iq} \alpha_{jp} S_{pq} = \alpha_{jp} \alpha_{iq} S_{pq}$$

On en déduit que $S'_{ij} = S'_{ji}$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice B.

Soit un tenseur $\bar{\bar{S}}$ antisymétrique. Dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ on peut donc écrire $S_{ij} = -S_{ji}$. Soit une base orthonormée quelconque $B' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ différente de B . On appelle α la matrice de passage de B à B' . Si on appelle S'_{ij} les termes de la matrice de $\bar{\bar{S}}$ dans la base B' , on a d'après le cours (en notation d'Einstein) :

$$S'_{ij} = \alpha_{ip} \alpha_{jq} S_{pq}$$

Or la matrice S est antisymétrique, on a donc $S_{pq} = -S_{qp}$. On écrit donc :

$$S'_{ij} = -\alpha_{ip} \alpha_{jq} S_{qp}$$

Les indices p et q du second membre sont muets, on pourrait donc les remplacer par n'importe quelle lettre, et on peut aussi les intervertir :

$$S'_{ij} = -\alpha_{iq} \alpha_{jp} S_{pq} = -\alpha_{jp} \alpha_{iq} S_{pq}$$

On en déduit que $S'_{ij} = -S'_{ji}$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice C.

On reprend les formules du cours. Soient les tenseurs $\bar{\bar{T}}^S$ et $\bar{\bar{T}}^A$ donnés par les formules suivantes :

$$\bar{\bar{T}}^S = \frac{1}{2}(\bar{\bar{T}} + \bar{\bar{T}}^T)$$

$$\bar{\bar{T}}^A = \frac{1}{2}(\bar{\bar{T}} - \bar{\bar{T}}^T)$$

On va démontrer que $\bar{\bar{T}}^S$ est symétrique et que $\bar{\bar{T}}^A$ est antisymétrique. Pour cela on se place dans une base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, pour laquelle le tenseur $\bar{\bar{T}}$ s'exprime sous la forme d'une matrice de terme générale T_{ij} . Explicitions les termes des matrices de $\bar{\bar{T}}^S$ et $\bar{\bar{T}}^A$:

$$T_{ij}^S = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) = \frac{1}{2}(T_{ji} + T_{ij}) = T_{ji}^S$$

$$T_{ij}^A = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = -\frac{1}{2}(T_{ji} - T_{ij}) = -T_{ji}^A$$

On a donc démontré que $\bar{\bar{T}}^S$ est symétrique et $\bar{\bar{T}}^A$ antisymétrique.

Exercice D.

Dans une base orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on peut écrire que $S_{ij} = S_{ji}$ et également que $A_{ij} = -A_{ji}$. On en déduit que, comme pour tout tenseur antisymétrique, les termes diagonaux de la matrice de $\bar{\bar{A}}$ sont nuls dans toute base. D'après le cours, le produit doublement contracté de ces deux tenseurs est un scalaire égal à :

$$\bar{\bar{S}} : \bar{\bar{A}} = S_{ij}A_{ji}$$

Développons cette notation d'Einstein sous forme explicite :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{S}} : \bar{\bar{A}} &= S_{11}A_{11} + S_{12}A_{21} + S_{13}A_{31} \\ &+ S_{21}A_{12} + S_{22}A_{22} + S_{23}A_{32} \\ &+ S_{31}A_{13} + S_{32}A_{23} + S_{33}A_{33} \end{aligned}$$

On sait que l'on a $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$, et par ailleurs :

$$\begin{aligned} S_{21} &= S_{12} ; S_{31} = S_{13} ; S_{32} = S_{23} \\ A_{21} &= -A_{12} ; A_{31} = -A_{13} ; A_{32} = -A_{23} \end{aligned}$$

On en déduit directement $\bar{\bar{S}} : \bar{\bar{A}} = 0$.

Exercice E.

Le résultat découle directement de celui de l'exercice précédent et de la distributivité de l'opérateur produit doublement contracté :

$$\bar{S} : \bar{T} = \bar{S} : (\bar{T}^S + \bar{T}^A) = \bar{S} : \bar{T}^S + \bar{S} : \bar{T}^A = \bar{S} : \bar{T}^S$$

Exercice F.

Posons le résultat intermédiaire $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$. Dans une base orthonormée donnée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on a par définition :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}_B$$

Par ailleurs, on a par définition : $\text{div } \vec{B} = \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3}$.

On en déduit que $\text{div } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$ vaut :

$$\begin{aligned} \text{div } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \\ \text{div } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_3 \partial x_2} \end{aligned}$$

L'ordre des dérivations partielles successives d'une fonction de plusieurs variables est quelconque, on peut donc en déduire directement : $\text{div } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = 0$.

Exercice G.

On se place également dans une base orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soit le résultat intermédiaire $\vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}} A$ donné par la formule du cours :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x_1} \\ \frac{\partial A}{\partial x_2} \\ \frac{\partial A}{\partial x_3} \end{pmatrix}_B$$

Par ailleurs, on peut écrire, toujours dans la base B :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial B_1}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}_B$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial A}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial A}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial A}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial A}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial A}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial A}{\partial x_1} \end{pmatrix}_B$$

Pour la même raison que dans l'exercice précédent, on peut donc écrire directement la formule classique $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} A = \vec{0}$.

Exercice H.

1. Un élément de surface dS de la sphère de rayon R délimité par deux secteurs d'angles infinitésimaux $d\theta$ et $d\varphi$ s'écrit :

$$dS = R^2 \sin\varphi d\theta d\varphi$$

On cherche à calculer $S = \int_{\text{sphère}} dS$. En paramétrant la surface en fonction de θ et φ , on peut expliciter cette intégrale :

$$S = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} R^2 \sin\varphi d\theta d\varphi$$

Le rayon R est indépendant de θ et φ , et le terme $\sin\varphi$ est indépendant de θ , on peut donc écrire :

$$S = R^2 \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin\varphi \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \right) d\varphi$$

$$S = R^2 \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin\varphi [\theta]_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R^2 \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin\varphi d\varphi = 2\pi R^2 [-\cos\varphi]_0^{\pi}$$

Finalement, on obtient le résultat classique $S = 4\pi R^2$.

2. On doit calculer :

$$\vec{A} = \int_{\text{sphère}} \cos\varphi \cdot \vec{e}_r dS = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos\varphi \cdot \vec{e}_r \cdot R^2 \sin\varphi d\theta d\varphi$$

Avec : $\vec{e}_R = \sin\varphi \cos\theta \vec{e}_x + \sin\varphi \sin\theta \vec{e}_y + \cos\varphi \vec{e}_z$

On est en coordonnées curvilignes, donc on ne peut pas sortir le vecteur \vec{e}_R car il n'est pas indépendant du point d'intégration (du point de la sphère de surface dS). En revanche, les trois vecteurs de la base cartésienne ont cette propriété, et peuvent être sortis de l'intégrale. On peut donc remplacer \vec{e}_r par son expression, et écrire dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cos\theta \cdot R^2 \sin\varphi d\theta d\varphi \\ \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos\varphi \cdot \sin\varphi \sin\theta \cdot R^2 \sin\varphi d\theta d\varphi \\ \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos\varphi \cdot \cos\varphi \cdot R^2 \sin\varphi d\theta d\varphi \end{pmatrix}_B$$

$$\vec{A} = R^2 \begin{pmatrix} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos\varphi \cos\theta \sin^2\varphi d\theta d\varphi \\ \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos\varphi \sin\theta \sin^2\varphi d\theta d\varphi \\ \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^2\varphi \sin\varphi d\theta d\varphi \end{pmatrix}_B = R^2 \begin{pmatrix} \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos\varphi \sin^2\varphi \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \cos\theta d\theta \right) d\varphi \\ \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos\varphi \sin^2\varphi \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \sin\theta d\theta \right) d\varphi \\ \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos^2\varphi \sin\varphi \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \right) d\varphi \end{pmatrix}_B$$

Du fait de la périodicité des fonctions trigonométriques, on a :

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \cos\theta d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0$$

Par ailleurs, on a :

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

Donc :

$$\vec{A} = 2\pi R^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \end{pmatrix}_B$$

La primitive de la fonction $\cos^2 \varphi \sin \varphi$ est la fonction $\frac{\cos^3 \varphi}{3}$, donc :

$$\vec{A} = 2\pi R^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left[\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_0^{\pi} \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4\pi R^2}{3} \end{pmatrix}_B$$

2. Cinématique et déformations

Problème. On considère un mouvement défini dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par sa représentation lagrangienne (ω est une constante positive) :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos(\omega t) - X_2 \sin(\omega t) \\ x_2 = X_1 \sin(\omega t) + X_2 \cos(\omega t) \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

1. Calculer le tenseur gradient \bar{F} , le tenseur des dilatations \bar{C} , et le tenseur des déformations \bar{E} de ce mouvement au point \vec{X} et à l'instant t .
2. A quelle classe particulière ce mouvement appartient-il ?
3. Pour un instant t donné, calculer la dilatation en un point \vec{X} et dans une direction \overrightarrow{dX} .
4. Pour un instant t donné, calculer le glissement en un point \vec{X} et pour deux directions orthogonales \overrightarrow{dX} et $\overrightarrow{dX'}$.
5. On considère un milieu animé de ce mouvement, muni d'une masse volumique homogène ρ_0 à l'instant $t_0 = 0$. Calculer le jacobien de la transformation, ainsi que la masse volumique du milieu à l'instant t .
6. Calculer le champ de vitesse $\vec{V}(\vec{X}, t)$ et le champ d'accélération $\vec{\gamma}(\vec{X}, t)$ en coordonnées lagrangiennes.
7. Exprimer les coordonnées initiales à partir des coordonnées actuelles. Calculer le champ de vitesse $\vec{V}(\vec{x}, t)$ et le champ d'accélération $\vec{\gamma}(\vec{x}, t)$ en coordonnées eulériennes.
8. Calculer les tenseurs des taux de déformations eulériens $\bar{D}(\vec{x}, t)$ et des taux de rotation $\bar{\Omega}(\vec{x}, t)$.
9. On définit les coordonnées polaires lagrangiennes (R, Θ, X_3) par le changement de variables $(X_1, X_2, X_3) = (R \cdot \cos\Theta, R \cdot \sin\Theta, X_3)$ et les coordonnées eulériennes (r, θ, x_3) par le changement de variables $(x_1, x_2, x_3) = (r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta, x_3)$. Expliciter les fonctions X_r et X_θ définissant une nouvelle représentation lagrangienne du mouvement de la forme :

$$\begin{cases} r = X_r(R, \Theta, X_3, t) \\ \theta = X_\theta(R, \Theta, X_3, t) \end{cases}$$

10. On définit une base curviligne polaire $B' = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_3)$, telle que :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \vec{e}_1 \cos\theta + \vec{e}_2 \sin\theta \\ \vec{e}_\theta = -\vec{e}_1 \sin\theta + \vec{e}_2 \cos\theta \end{cases}$$

On note alors le champ de vitesse dans cette nouvelle base :

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = V_r(r, \theta, x_3, t)\vec{e}_r + V_\theta(r, \theta, x_3, t)\vec{e}_\theta + V_3(r, \theta, x_3, t)\vec{e}_3$$

Indiquer l'expression des composantes polaires V_r , V_θ et V_3 du champ de vitesse eulérien.

11. Calculer l'accélération centrifuge $\gamma_r(r, \theta, t)$ et l'accélération tangentielle $\gamma_\theta(r, \theta, t)$ du mouvement étudié.

12. Définir les trajectoires associées à ce mouvement

Examen partiel : Etude cinématique d'un tourbillon. On considère un mouvement, défini dans la base orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par la représentation eulérienne suivante :

$$\begin{cases} V_1 = -A(x_1, x_2)x_2 \\ V_2 = A(x_1, x_2)x_1 \\ V_3 = 0 \end{cases}$$

Dans cette représentation, A est une fonction scalaire des deux coordonnées x_1 et x_2 , définie par l'expression $A(x_1, x_2) = \frac{\alpha}{2\pi}(x_1^2 + x_2^2)^{-1}$ où α est une constante positive. Ce mouvement est donc uniquement défini pour $\|x_1^2 + x_2^2\| > 0$.

1. De quel type de mouvement s'agit-il ?

2. Montrer que la matrice du tenseur gradient de vitesse $\bar{\bar{L}} = \overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V}$ dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ s'exprime par :

$$\bar{\bar{L}} = \frac{A(x_1, x_2)}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \begin{bmatrix} 2x_1x_2 & x_2^2 - x_1^2 & 0 \\ x_2^2 - x_1^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_B$$

3. En déduire immédiatement les matrices du tenseur des taux de rotation $\bar{\bar{\Omega}}(\vec{x}, t)$ et du tenseur des taux de déformation eulériens $\bar{\bar{D}}(\vec{x}, t)$.

4. On considère un milieu continu de masse volumique ρ_0 à l'état initial ($t = 0$) et animé de ce mouvement. Calculer la divergence du champ de vitesse, et en déduire la masse volumique en tout point et à tout instant $t > 0$.

5. Montrer que l'accélération $\vec{\gamma}(x_1, x_2, x_3, t)$ en coordonnées eulériennes cartésiennes (c'est-à-dire dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$) s'exprime par :

$$\vec{\gamma}(\vec{x}, t) = A^2(x_1, x_2) \cdot \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

6. On définit les coordonnées polaires lagrangiennes (R, Θ, X_3) par le changement de variables $(X_1, X_2, X_3) = (R \cdot \cos\Theta, R \cdot \sin\Theta, X_3)$ et les coordonnées eulériennes (r, θ, x_3) par le changement de variables $(x_1, x_2, x_3) = (r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta, x_3)$.

On définit également une base curviligne polaire $B' = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_3)$, telle que :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \vec{e}_1 \cos\theta + \vec{e}_2 \sin\theta \\ \vec{e}_\theta = -\vec{e}_1 \sin\theta + \vec{e}_2 \cos\theta \end{cases}$$

Calculer l'accélération $\vec{\gamma}(r, \theta, x_3, t)$ en coordonnées eulériennes polaires.

7. Exprimer le champ de vitesse en coordonnées eulériennes polaires. En déduire que les particules ont des trajectoires circulaires autour de l'origine, de vitesse angulaire :

$$V_\theta = \frac{\alpha}{2\pi r}$$

Donner sans calcul l'expression de la représentation polaire lagrangienne du mouvement sous la forme $r = X_r(R, \Theta, x_3, t)$ et $\theta = X_\theta(R, \Theta, x_3, t)$.

8. Démontrer que la représentation lagrangienne du mouvement dans la base cartésienne sous la forme $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$ s'exprime par :

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{X}$$

Montrer que, dans cette expression, on a : $\omega = \frac{V_\theta}{R} = A(x_1, x_2)$.

9. Définir les trajectoires associées à ce mouvement, ainsi que les champs de vitesse et d'accélération

10. On considère le point de vecteur position $\vec{x} = r \cdot \vec{e}_2$. Calculer la matrice du tenseur des taux de déformations eulériens en ce point. De quel type de déformation s'agit-il ? En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres du tenseur des taux de déformations eulériens en ce point.

Corrigés

Problème.

1. Le terme général de la matrice du tenseur gradient dans la base B est $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$, donc on a :

$$\bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_B$$

Pour le tenseur des dilatations, on a $C_{ij} = F_{pi}F_{pj}$ en notation d'Einstein, donc :

$$\bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} \cos^2\omega t + \sin^2\omega t & \cos\omega t \cdot \sin\omega t - \cos\omega t \cdot \sin\omega t & 0 \\ \cos\omega t \cdot \sin\omega t - \cos\omega t \cdot \sin\omega t & \cos^2\omega t + \sin^2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \bar{\bar{I}}$$

Enfin, on sait que $\bar{\bar{E}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{I}})$, et on a donc $\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{0}}$.

2. Le tenseur des déformations est nul, on est donc en présence d'un mouvement rigidifiant.

3. Puisque $\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{I}}$, on peut dire que toute direction est direction principale. La dilatation dans une direction quelconque \overrightarrow{dX} vaut donc $\lambda(\overrightarrow{dX}) = \sqrt{C_{ii}} = 1$

4. Pour la même raison, le glissement entre deux directions orthogonales quelconques \overrightarrow{dX} et $\overrightarrow{dX'}$ vaut : $\gamma(\overrightarrow{dX}, \overrightarrow{dX'}) = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}} = 0$

5. Le jacobien de la transformation est le déterminant de $\bar{\bar{F}}$. On a donc :

$$J = \det \bar{\bar{F}} = \begin{vmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$$

Par conséquent la masse volumique du milieu est constante dans le temps et en tout point.

6. Le champ de vitesse $\vec{V}(\vec{X}, t)$ s'obtient par dérivation matérielle du champ de vecteurs exprimant les positions actuelles des particules : $\vec{V}(\vec{X}, t) = \frac{D\vec{x}(X,t)}{Dt}$. On a :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos(\omega t) - X_2 \sin(\omega t) \\ x_2 = X_1 \sin(\omega t) + X_2 \cos(\omega t) \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} V_1 = \frac{Dx_1}{Dt} = \omega \cdot (-X_1 \sin(\omega t) - X_2 \cos(\omega t)) \\ V_2 = \frac{Dx_2}{Dt} = \omega \cdot (X_1 \cos(\omega t) - X_2 \sin(\omega t)) \\ V_3 = \frac{Dx_3}{Dt} = 0 \end{cases}$$

De même, le champ d'accélération s'obtient par $\vec{\gamma}(\vec{X}, t) = \frac{D\vec{V}(X,t)}{Dt}$, donc :

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{DV_1}{Dt} = \omega^2 \cdot (-X_1 \cos(\omega t) + X_2 \sin(\omega t)) \\ \gamma_2 = \frac{DV_2}{Dt} = \omega^2 \cdot (-X_1 \sin(\omega t) - X_2 \cos(\omega t)) \\ \gamma_3 = \frac{DV_3}{Dt} = 0 \end{cases}$$

Ces champs s'expriment en fonction de \vec{X} , et sont donc bien en coordonnées lagrangiennes.

7. D'après l'énoncé, les coordonnées actuelles s'obtiennent à partir des coordonnées initiales par le système suivant :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

On isole en particulier les deux premières équations de ce système :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

On cherche à inverser ce système pour exprimer \vec{X} en fonction de \vec{x} . On utilise la formule d'inversion d'une matrice 2*2 :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos^2\omega t + \sin^2\omega t} \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}^T$$

Cette matrice est orthogonale, car son inverse est égale à sa transposée. Elle traduit donc une rotation. On en déduit :

$$\begin{cases} X_1 = x_1 \cos(\omega t) + x_2 \sin(\omega t) \\ X_2 = -x_1 \sin(\omega t) + x_2 \cos(\omega t) \\ X_3 = x_3 \end{cases}$$

Dans l'expression du champ de vitesse et du champ d'accélération calculés à la question précédente, on peut alors remplacer les coordonnées initiales \vec{X} par leur expression en fonction des coordonnées actuelles \vec{x} . On obtient la formulation eulérienne suivante :

$$\begin{cases} V_1 = \omega \cdot \left(-(x_1 \cos(\omega t) + x_2 \sin(\omega t)) \sin(\omega t) - (-x_1 \sin(\omega t) + x_2 \cos(\omega t)) \cos(\omega t) \right) \\ V_2 = \omega \cdot \left((x_1 \cos(\omega t) + x_2 \sin(\omega t)) \cos(\omega t) - (-x_1 \sin(\omega t) + x_2 \cos(\omega t)) \sin(\omega t) \right) \\ V_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = -\omega x_2 \\ V_2 = \omega x_1 \\ V_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1 = \omega^2 \cdot \left(-(x_1 \cos(\omega t) + x_2 \sin(\omega t)) \cos(\omega t) + (-x_1 \sin(\omega t) + x_2 \cos(\omega t)) \sin(\omega t) \right) \\ \gamma_2 = \omega^2 \cdot \left(-(x_1 \cos(\omega t) + x_2 \sin(\omega t)) \sin(\omega t) - (-x_1 \sin(\omega t) + x_2 \cos(\omega t)) \cos(\omega t) \right) \\ \gamma_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1 = -\omega^2 \cdot x_1 \\ \gamma_2 = -\omega^2 \cdot x_2 \\ \gamma_3 = 0 \end{cases}$$

Ce dernier résultat pouvait aussi s'obtenir en passant par la formule donnant directement l'accélération par $\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\overline{\text{grad}} \vec{V}) \vec{v}$, avec $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ et :

$$\overline{\text{grad}} \vec{V} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_B$$

8. On calcule d'abord le tenseur gradient de vitesse $\bar{L} = \overline{\text{grad}} \vec{V}$, avec la formule de cours $(\overline{\text{grad}} \vec{V})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$. On remarque qu'il s'agit d'un gradient eulérien (g minuscule), donc les dérivations sont effectuées par rapport aux coordonnées actuelles \vec{x} :

$$\bar{L} = \overline{\text{grad}} \vec{V} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_B$$

Ce tenseur est antisymétrique, on peut donc directement écrire $\bar{D} = \bar{0}$ et $\bar{\Omega} = \bar{L}$. Ces résultats peuvent être retrouvés par le calcul avec les formules de cours :

$$\bar{D} = \frac{1}{2}(\bar{L} + \bar{L}^T) \quad \text{et} \quad \bar{\Omega} = \frac{1}{2}(\bar{L} - \bar{L}^T)$$

9. En coordonnées polaires, on a les correspondances suivantes :

$$\begin{cases} X_1 = R \cdot \cos\Theta \\ X_2 = R \cdot \sin\Theta \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1 = r \cdot \cos\theta \\ x_2 = r \cdot \sin\theta \end{cases} ; \quad \begin{cases} r = X_r(R, \Theta, X_3, t) \\ \theta = X_\theta(R, \Theta, X_3, t) \end{cases}$$

On cherche les expressions des fonctions X_r et X_θ . On peut écrire à partir de ces expressions :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} & ; & \quad \cos\theta = \frac{x_1}{r} & ; & \quad \sin\theta = \frac{x_2}{r} \\ R &= \sqrt{X_1^2 + X_2^2} & ; & \quad \cos\Theta = \frac{X_1}{R} & ; & \quad \sin\Theta = \frac{X_2}{R} \end{aligned}$$

Or on sait d'après l'énoncé que, dans le repère cartésien, le mouvement s'exprime par :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos(\omega t) - X_2 \sin(\omega t) \\ x_2 = X_1 \sin(\omega t) + X_2 \cos(\omega t) \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

On peut remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions dans la formules donnant r :

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{(X_1 \cos(\omega t) - X_2 \sin(\omega t))^2 + (X_1 \sin(\omega t) + X_2 \cos(\omega t))^2}$$

$$r = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = R$$

On en déduit l'expression de la fonction X_r . On effectue la même opération avec l'expression de $\cos\theta$:

$$\cos\theta = \frac{X_1 \cos(\omega t) - X_2 \sin(\omega t)}{r}$$

Dans cette dernière expression, on remplace X_1 , X_2 et r par leur expression polaire :

$$\cos\theta = \frac{R \cdot \cos\Theta \cos(\omega t) - R \cdot \sin\Theta \sin(\omega t)}{R} = \cos(\Theta + \omega t)$$

On en déduit $\theta = \Theta + \omega t$, ce qui nous donne la forme de la fonction X_θ . Finalement, on a :

$$\begin{cases} r = R \\ \theta = \Theta + \omega t \end{cases}$$

10. On travaille maintenant dans la base curviligne polaire $B' = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_3)$ telle que :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \vec{e}_1 \cos\theta + \vec{e}_2 \sin\theta \\ \vec{e}_\theta = -\vec{e}_1 \sin\theta + \vec{e}_2 \cos\theta \end{cases}$$

On cherche à exprimer le champ de vitesse eulérien dans cette base. On a démontré dans la question 7 que le champ de vitesse pouvait s'exprimer par :

$$\vec{V} = -\omega x_2 \cdot \vec{e}_1 + \omega x_1 \cdot \vec{e}_2$$

Dans cette expression, on remplace x_1 et x_2 par leurs expressions en coordonnées polaires :

$$\vec{V} = -\omega(r \cdot \sin\theta) \cdot \vec{e}_1 + \omega(r \cdot \cos\theta) \cdot \vec{e}_2$$

donc :

$$\vec{V} = \omega r (-\sin\theta \cdot \vec{e}_1 + \cos\theta \cdot \vec{e}_2) = \omega r \vec{e}_\theta$$

Dans la base $B' = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_3)$, la vitesse s'exprime donc par une formule très simple :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega r \\ 0 \end{pmatrix}_{B'}$$

11. Dans le même ordre d'idée, on cherche à exprimer la formulation eulérienne du champ d'accélération dans la base B' . On a montré que le champ d'accélération s'exprimait par :

$$\vec{\gamma} = -\omega^2 x_1 \cdot \vec{e}_1 - \omega^2 x_2 \cdot \vec{e}_2$$

On remplace x_1 et x_2 par leurs expressions en coordonnées polaires :

$$\vec{\gamma} = -\omega^2(r \cdot \cos\theta) \cdot \vec{e}_1 - \omega^2(r \cdot \sin\theta) \cdot \vec{e}_2$$

$$\vec{\gamma} = -\omega^2 r (\cos\theta \cdot \vec{e}_1 + \sin\theta \cdot \vec{e}_2) = -\omega^2 r \vec{e}_r$$

Dans la base $B' = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_3)$, l'accélération est donc purement centripète :

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} -\omega^2 r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'}$$

12. Les trajectoires des particules matérielles sont des cercles centrés sur l'origine. La vitesse angulaire est constante, la vitesse est purement orthoradiale (perpendiculaire à un rayon) et augmente proportionnellement à la distance à l'origine. L'accélération est purement centripète (dirigée vers l'origine) et est également proportionnelle en norme à la distance à l'origine.

Examen Partiel.

1. Il s'agit d'un mouvement plan, car la vitesse dans la direction \vec{e}_3 est nulle et les deux autres composantes V_1 et V_2 sont invariantes par translation dans la direction \vec{e}_3 . Par ailleurs la représentation eulérienne du champ de vitesse est constante dans le temps, donc on est par définition en présence d'un mouvement permanent.

2. le tenseur gradient de vitesse $\bar{L} = \overline{\text{grad}} \vec{V}$ s'exprime dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par la matrice de terme général $L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$. On travaille d'abord sur la dérivation de la fonction $A(x_1, x_2) = \frac{\alpha}{2\pi} (x_1^2 + x_2^2)^{-1}$:

$$\frac{\partial A(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -\frac{\alpha}{2\pi} \cdot \frac{2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = -A(x_1, x_2) \cdot \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\frac{\partial A(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -\frac{\alpha}{2\pi} \cdot \frac{2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = -A(x_1, x_2) \cdot \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

On peut alors calculer les termes non triviaux de la matrice de \bar{L} , à commencer par les deux premiers termes diagonaux :

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} = -x_2 \cdot \frac{\partial A(x_1, x_2)}{\partial x_1} = A(x_1, x_2) \cdot \frac{2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_2} = x_1 \cdot \frac{\partial A(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -A(x_1, x_2) \cdot \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

On a également deux termes non-diagonaux assez complexes :

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_2} = -x_2 \cdot \frac{\partial A(x_1, x_2)}{\partial x_2} - A(x_1, x_2) = A(x_1, x_2) \cdot \frac{2x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} - A(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_2} = A(x_1, x_2) \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_1} = x_1 \cdot \frac{\partial A(x_1, x_2)}{\partial x_1} + A(x_1, x_2) = -A(x_1, x_2) \cdot \frac{2x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} + A(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_1} = A(x_1, x_2) \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

Tous les autres termes de la matrice de \bar{L} sont nuls car on est en mouvement plan. Finalement, le tenseur gradient de vitesse s'exprime sous forme matricielle dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par :

$$\bar{L} = \frac{A(x_1, x_2)}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \begin{bmatrix} 2x_1x_2 & x_2^2 - x_1^2 & 0 \\ x_2^2 - x_1^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_B$$

3. On constate que la matrice de \bar{L} est symétrique. Par conséquent, sa décomposition en un tenseur asymétrique $\bar{\Omega}$ et un tenseur symétrique \bar{D} est immédiate :

-tenseur des taux de rotation : $\bar{\Omega} = \bar{0}$

-tenseur des taux de déformation eulériens : $\bar{D} = \bar{L}$

4. la masse volumique du milieu à l'état initial ($t = 0$) est uniforme et vaut ρ_0 . Pour calculer l'évolution de cette masse volumique, on peut évaluer le jacobien de la transformation en tout point et à tout instant. Dans un problème posé en notation eulérienne, il est plus simple de passer par la divergence du champ de vitesse :

$$div \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}$$

On sait que V_3 est constant et nul, et on a par ailleurs démontré à la question précédente que :

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial V_2}{\partial x_2}$$

Par conséquent on a $\text{div } \vec{V} = 0$. Un mouvement pour lequel la divergence de la vitesse est nulle en tout point et à tout instant est un mouvement isochore, pour lequel la masse volumique est constante. Par conséquent, en tout point et à tout instant, on a :

$$\rho = \rho_0$$

Le mouvement est plan, permanent, et isochore.

5. L'accélération $\vec{\gamma}(x_1, x_2, x_3, t)$ est la dérivée particulière de la vitesse, et se calcule par la formule de cours suivante, qui fait apparaître la dérivée eulérienne :

$$\vec{\gamma}(\vec{x}, t) = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\overline{\text{grad}} \vec{V})\vec{V}$$

On est en mouvement permanent, donc la dérivée eulérienne de la vitesse est nulle :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{0}$$

Le gradient de vitesse $\bar{L} = \overline{\text{grad}} \vec{V}$ a déjà été calculé à la question 2, il suffit donc d'en faire le produit contracté avec le vecteur vitesse :

$$\vec{\gamma}(\vec{x}, t) = (\overline{\text{grad}} \vec{V})\vec{V} = \frac{A(x_1, x_2)}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \begin{bmatrix} 2x_1x_2 & x_2^2 - x_1^2 & 0 \\ x_2^2 - x_1^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_B \cdot A(x_1, x_2) \cdot \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

$$\vec{\gamma}(\vec{x}, t) = \frac{A^2(x_1, x_2)}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \begin{bmatrix} -x_2 \cdot (2x_1x_2) + x_1 \cdot (x_2^2 - x_1^2) \\ -x_2 \cdot (x_2^2 - x_1^2) + x_1 \cdot (-2x_1x_2) \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

$$\vec{\gamma}(\vec{x}, t) = \frac{A^2(x_1, x_2)}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \begin{bmatrix} -x_1x_2^2 - x_1^3 \\ -x_2x_1^2 - x_2^3 \\ 0 \end{bmatrix}_B = A^2(x_1, x_2) \cdot \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

6. On cherche à se placer en coordonnées polaires pour simplifier les expressions. Pour cela, on utilise les relations :

$$\begin{cases} x_1 = r \cdot \cos\theta \\ x_2 = r \cdot \sin\theta \end{cases}$$

On doit simplement remplacer x_1 et x_2 par leurs expressions polaires dans l'expression de l'accélération. On calcule d'abord la fonction A :

$$A(x_1, x_2) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{(r \cdot \cos\theta)^2 + (r \cdot \sin\theta)^2} = \frac{\alpha}{2\pi r^2}$$

Par ailleurs on a montré dans la question précédente que l'accélération est exprimée par :

$$\vec{\gamma}(\vec{x}, t) = -A^2(x_1, x_2) \cdot (x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2)$$

$$\vec{\gamma}(\vec{x}, t) = -A^2(x_1, x_2) \cdot (r \cdot \cos\theta \cdot \vec{e}_1 + r \cdot \sin\theta \cdot \vec{e}_2)$$

Or on a la formule de changement de repère suivante : $\vec{e}_r = \vec{e}_1 \cos\theta + \vec{e}_2 \sin\theta$
Finalement :

$$\vec{\gamma}(\vec{x}, t) = -A^2(x_1, x_2) \cdot r \cdot \vec{e}_r = -\frac{\alpha^2}{4\pi^2 r^3} \cdot \vec{e}_r$$

L'accélération est donc purement centripète.

7. Le champ de vitesse est donné dans l'énoncé sous forme eulérienne par :

$$\vec{V} = -A(x_1, x_2)x_2 \cdot \vec{e}_1 + A(x_1, x_2)x_1 \cdot \vec{e}_2 = A(x_1, x_2) \cdot (-x_2 \cdot \vec{e}_1 + x_1 \cdot \vec{e}_2)$$

En coordonnées polaires, on a donc :

$$\vec{V} = A(x_1, x_2) \cdot (-r \cdot \sin\theta \cdot \vec{e}_1 + r \cdot \cos\theta \cdot \vec{e}_2) = A(x_1, x_2) \cdot r \cdot \vec{e}_\theta$$

$$\vec{V} = \frac{\alpha}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\theta$$

La vitesse est purement orthoradiale (normale au rayon), et on en déduit que les particules ont une trajectoire circulaire autour de l'origine. Sans calcul, on obtient la représentation lagrangienne :

$$\begin{cases} r = R \\ \theta = \Theta + \frac{\alpha}{2\pi r^2} t \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

8. Pour passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes, on utilise les formules suivantes :

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad ; \quad \cos\theta = \frac{x_1}{r} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{x_2}{r}$$

$$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \quad ; \quad \cos\Theta = \frac{X_1}{R} \quad ; \quad \sin\Theta = \frac{X_2}{R}$$

On a par ailleurs $\theta = \Theta + \frac{\alpha}{2\pi r^2} t$, et donc :

$$\cos\theta = \cos\left(\Theta + \frac{\alpha}{2\pi r^2} t\right) = \frac{x_1}{r}$$

et donc, en développant le cosinus :

$$\frac{x_1}{r} = \cos\Theta \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2\pi r^2} t\right) - \sin\Theta \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2\pi r^2} t\right)$$

$$\frac{x_1}{r} = \cos\Theta \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2\pi(x_1^2 + x_2^2)} t\right) - \sin\Theta \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2\pi(x_1^2 + x_2^2)} t\right)$$

$$\frac{x_1}{r} = \cos\Theta \cdot \cos(A(x_1, x_2) \cdot t) - \sin\Theta \cdot \sin(A(x_1, x_2) \cdot t)$$

$$\frac{x_1}{r} = \frac{X_1}{R} \cdot \cos(A(x_1, x_2) \cdot t) - \frac{X_2}{R} \cdot \sin(A(x_1, x_2) \cdot t)$$

Finalement, on a :

$$x_1 = X_1 \cdot \cos(\omega t) - X_2 \cdot \sin(\omega t)$$

avec $\omega = A(x_1, x_2)$. On peut développer le sinus de la même manière, et obtenir l'expression lagrangienne de x_2 recherchée :

$$\sin\theta = \sin\left(\Theta + \frac{\alpha}{2\pi r^2} t\right) = \sin(\Theta + \omega t) = \frac{x_2}{r}$$

$$\frac{x_2}{r} = \sin\Theta \cdot \cos(\omega t) + \cos\Theta \cdot \sin(\omega t) = \frac{X_2}{R} \cdot \cos(\omega t) + \frac{X_1}{R} \cdot \sin(\omega t)$$

Finalement, on a :

$$x_2 = X_2 \cdot \cos(\omega t) + X_1 \cdot \sin(\omega t)$$

On obtient finalement le système recherché :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cdot \cos(\omega t) - X_2 \cdot \sin(\omega t) \\ x_2 = X_1 \cdot \sin(\omega t) + X_2 \cdot \cos(\omega t) \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

9. Les trajectoires des particules sont planes et circulaires, avec une vitesse angulaire ω constante pour chaque particule et qui décroît en relation hyperbolique avec la distance à l'axe origine. L'accélération est purement centripète. On appelle ce mouvement un tourbillon.

10. On a montré à la question 3 que le tenseur des taux de déformation eulériens est égal au tenseur gradient de vitesse, dont la matrice dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est :

$$\bar{L} = \frac{A(x_1, x_2)}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \begin{bmatrix} 2x_1x_2 & x_2^2 - x_1^2 & 0 \\ x_2^2 - x_1^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_B = \bar{D}$$

On se place au point $\vec{x} = r \cdot \vec{e}_2$, et on a donc $x_1 = 0$ et $x_2 = r$. Par conséquent, la matrice de \bar{D} exprimée dans la base B en ce point est donnée par :

$$\bar{D} = \frac{A(0, r)}{r^2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & r^2 & 0 \\ r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_B = \frac{\alpha}{2\pi r^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_B$$

On reconnaît un glissement simple tel que défini dans le cours.

La base propre d'une telle déformation est nommée $B' = (\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3)$, avec :

$$\begin{cases} \vec{d}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_2 \\ \vec{d}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_2 \\ \vec{d}_3 = \vec{e}_3 \end{cases}$$

Dans cette base, la matrice de \bar{D} vaut :

$$\bar{D} = \frac{\alpha}{2\pi r^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{B'}$$

3. Déformations

Exercice A. Soit un milieu soumis à un tenseur de déformation $\bar{\bar{E}}$, dont la matrice dans une base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ donnée est :

$$\bar{\bar{E}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}_B$$

1. Calculer la trace de $\bar{\bar{E}}$, ainsi que son déterminant. Calculer la matrice du tenseur $\bar{\bar{E}}^2$, et en déduire le deuxième invariant du tenseur donné par l'expression classique $E_{II} = \frac{1}{2} \left((tr \bar{\bar{E}})^2 - tr (\bar{\bar{E}}^2) \right)$. En déduire sans calcul le polynôme caractéristique du tenseur $\bar{\bar{E}}$.
2. Développer le déterminant du tenseur $\bar{\bar{E}} - \lambda \bar{\bar{I}}$ et retrouver l'expression du polynôme caractéristique.
3. Développer différemment $det(\bar{\bar{E}} - \lambda \bar{\bar{I}})$ pour l'exprimer sous la forme suivante, beaucoup plus intéressante : $det(\bar{\bar{E}} - \lambda \bar{\bar{I}}) = -(\lambda - E_1)(\lambda - E_2)(\lambda - E_3)$. En déduire les valeurs des déformations principales et la forme de la matrice de $\bar{\bar{E}}$ dans sa base principale.
4. Ordonner les déformations principales, puis calculer les coordonnées du vecteur propre \vec{b}_2 correspondant à la déformation principale intermédiaire E_2 .

Corrigés

Exercice A.

1. La trace de $\bar{\bar{E}}$ s'obtient immédiatement :

$$tr \bar{\bar{E}} = tr \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}_B \right) = 3 + 3 + 1 = 7 = E_I$$

Le déterminant d'une matrice 3*3 se calcule par la formule classique : somme des produits des termes selon les diagonales descendantes moins somme des produits des termes selon les diagonales montantes :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b$$

Appliqué à $\bar{\bar{E}}$, on a :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 * 3 * 1 + 2 * 4 * 4 + 4 * 2 * 4 - 4 * 3 * 4 - 4 * 3 * 4 - 1 * 2 * 2$$

$$det \bar{\bar{E}} = -27 = E_{III}$$

Le tenseur $\bar{\bar{E}}^2$ est le produit contracté de $\bar{\bar{E}}$ par lui-même. Sous forme matricielle dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on a :

$$\bar{\bar{E}}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}_B \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 29 & 28 & 24 \\ 28 & 29 & 24 \\ 24 & 24 & 33 \end{bmatrix}_B$$

La trace de ce tenseur vaut $tr \bar{\bar{E}}^2 = 29 + 29 + 33 = 91$

Le second invariant principal de $\bar{\bar{E}}$ s'obtient directement par la formule de l'énoncé :

$$E_{II} = \frac{1}{2} \left((tr \bar{\bar{E}})^2 - tr (\bar{\bar{E}}^2) \right) = \frac{1}{2} (7^2 - 91) = -21$$

Par application de la formule du cours, on en déduit le polynôme caractéristique du tenseur des déformations linéarisées :

$$det(\bar{\bar{E}} - \lambda \bar{I}) = -\lambda^3 + E_I \cdot \lambda^2 - E_{II} \cdot \lambda + E_{III} = -\lambda^3 + 7 \cdot \lambda^2 + 21 \cdot \lambda - 27$$

2. On cherche le déterminant du tenseur $\bar{\bar{E}} - \lambda \bar{\bar{I}}$ qui s'exprime sous forme matricielle dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par :

$$\bar{\bar{E}} - \lambda \bar{\bar{I}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}_B - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 2 & 4 \\ 2 & 3 - \lambda & 4 \\ 4 & 4 & 1 - \lambda \end{bmatrix}_B$$

Donc :

$$\det(\bar{\bar{E}} - \lambda \bar{\bar{I}}) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & 4 \\ 2 & 3 - \lambda & 4 \\ 4 & 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(\bar{\bar{E}} - \lambda \bar{\bar{I}}) = (3 - \lambda)^2 * (1 - \lambda) + 2 * 4 * 4 + 4 * 2 * 4 ... \\ \dots - 4 * (3 - \lambda) * 4 - 4 * 4 * (3 - \lambda) - (1 - \lambda) * 2 * 2$$

$$\det(\bar{\bar{E}} - \lambda \bar{\bar{I}}) = (\lambda^2 - 6\lambda + 9)(1 - \lambda) + 32 + 32 - 48 + 16\lambda - 48 + 16\lambda - 4 + 4\lambda$$

$$\det(\bar{\bar{E}} - \lambda \bar{\bar{I}}) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 - \lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda - 36 + 36\lambda$$

$$\det(\bar{\bar{E}} - \lambda \bar{\bar{I}}) = -\lambda^3 + 7 \cdot \lambda^2 + 21 \cdot \lambda - 27$$

On retrouve donc par le calcul détaillé le résultat de la question précédente.

3. On cherche à obtenir un développement du polynôme caractéristique faisant intervenir directement ses racines, sous la forme $\det(\bar{\bar{E}} - \lambda \bar{\bar{I}}) = -(\lambda - E_1)(\lambda - E_2)(\lambda - E_3)$. Cette opération est peu aisée si on démarre de l'expression développée du polynôme, et il est plus judicieux de chercher cette expression dès le calcul du déterminant. On prend donc comme point de départ :

$$\det(\bar{\bar{E}} - \lambda \bar{\bar{I}}) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 3 \\ 4 & 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

Selon les formules classiques de calcul de déterminant, il est possible de remplacer une colonne (respectivement une ligne) par une combinaison linéaire des différentes colonnes (respectivement des différentes lignes). On remplace donc la colonne C1 par la combinaison C1-C2 :

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & 4 \\ 2 & 3 - \lambda & 4 \\ 4 & 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (3 - \lambda) - 2 & 2 & 4 \\ 2 - (3 - \lambda) & 3 - \lambda & 4 \\ 4 - 4 & 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 4 \\ \lambda - 1 & 3 - \lambda & 4 \\ 0 & 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

Il est également autorisé de "sortir" une constante multiplicative d'une ligne ou d'une colonne du déterminant, donc on peut simplifier la première colonne :

$$\det(\bar{\bar{E}} - \lambda \bar{I}) = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 - \lambda & 4 \\ 0 & 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

On remplace ensuite la ligne L1 par la combinaison linéaire L1+L2 :

$$\det(\bar{\bar{E}} - \lambda \bar{I}) = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 0 & 5 - \lambda & 8 \\ 1 & 3 - \lambda & 4 \\ 0 & 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

On a le droit de permuter deux lignes (ou bien deux colonnes) en changeant le signe du déterminant, on peut donc écrire :

$$\det(\bar{\bar{E}} - \lambda \bar{I}) = -(\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 3 - \lambda & 4 \\ 0 & 5 - \lambda & 8 \\ 0 & 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

Enfin, on sait qu'un déterminant 3*3 de la forme obtenu peut être simplifié en un déterminant 2*2 par la formule suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix}$$

On peut donc écrire :

$$\det(\bar{\bar{E}} - \lambda \bar{I}) = -(\lambda - 1) \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 8 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

Il reste quelques calculs, mais on sait qu'on a atteint le but principal, car un déterminant 2*2 de cette forme est un polynôme de degré 2 dont on sait très bien retrouver les racines. On a :

$$\det(\bar{\bar{E}} - \lambda \bar{I}) = -(\lambda - 1)[(5 - \lambda)(1 - \lambda) - 4 * 8]$$

$$\det(\bar{\bar{E}} - \lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 6\lambda - 27)$$

Le discriminant du polynôme de second degré est :

$$\Delta = (-6)^2 - 4 * 1 * (-27) = 144$$

Et les deux racines de ce polynôme sont :

$$\frac{6 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = 3 \pm \frac{\sqrt{144}}{2}$$

Finalement, le polynôme caractéristique du tenseur des déformations linéarisées est donné par :

$$\det(\bar{\bar{E}} - \lambda \bar{I}) = -(\lambda - 1)(\lambda - 9)(\lambda + 3)$$

Les déformations principales sont les racines de ce polynôme, et on peut écrire la matrice de $\bar{\bar{E}}$ dans sa base principale :

$$\bar{\bar{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}_{\text{Base principale}}$$

4. On ordonne les déformations principales dans l'ordre décroissant, et on a :

$$\bar{\bar{E}} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}_{\text{Base principale}}$$

avec :

$$\begin{cases} E_1 = 9 \\ E_2 = 1 \\ E_3 = -3 \end{cases}$$

On pourrait calculer les coordonnées dans $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ des trois vecteurs de la base principale de déformation $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. On va le faire uniquement pour \vec{b}_2 car la méthode est toujours la même.

D'après le cours, la direction principale de déformation \vec{b}_2 est définie par :

$$\bar{\bar{E}}\vec{b}_2 = E_2\vec{b}_2$$

En développant de système, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}_B \begin{bmatrix} b_{2,1} \\ b_{2,2} \\ b_{2,3} \end{bmatrix}_B = E_2 \begin{bmatrix} b_{2,1} \\ b_{2,2} \\ b_{2,3} \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} b_{2,1} \\ b_{2,2} \\ b_{2,3} \end{bmatrix}_B$$

Dans cette expression, on a fait apparaître les trois coordonnées $(b_{2,1}, b_{2,2}, b_{2,3})$ du vecteur \vec{b}_2 dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. En mettant ce système matriciel sous forme d'un système d'équations linéaires, on a :

$$\begin{cases} 3 * b_{2,1} + 2 * b_{2,2} + 4 * b_{2,3} = b_{2,1} \\ 2 * b_{2,1} + 3 * b_{2,2} + 4 * b_{2,3} = b_{2,2} \\ 4 * b_{2,1} + 4 * b_{2,2} + b_{2,3} = b_{2,3} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} 2 * b_{2,1} + 2 * b_{2,2} + 4 * b_{2,3} = 0 \\ 2 * b_{2,1} + 2 * b_{2,2} + 4 * b_{2,3} = 0 \\ 4 * b_{2,1} + 4 * b_{2,2} = 0 \end{cases}$$

On remarque immédiatement que $b_{2,1} = -b_{2,2}$ et que $b_{2,3} = 0$. Or on sait que le vecteur \vec{b}_2 est unitaire (de norme égale à 1), donc on peut écrire :

$$\begin{cases} b_{2,1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ b_{2,2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ b_{2,3} = 0 \end{cases}$$

On note une indétermination dans le signe de $b_{2,1}$ et $b_{2,2}$. Tous les signes sont possibles, à condition que l'on vérifie $b_{2,1} = -b_{2,2}$.

Ce système était trivial, mais ce n'est pas toujours vrai. Dans le cas contraire, on peut utiliser le pivot de Gauss, ou passer par une inversion de matrice.

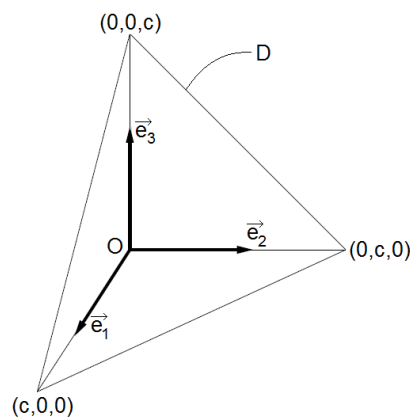
4. Contraintes

Exercice A. Soit un milieu continu dont l'état de contrainte est homogène et stationnaire (le tenseur de Cauchy est constant dans l'espace et le temps). On considère au sein de ce milieu un domaine matériel D , en forme de tétraèdre tel que représenté dans la figure ci-dessous dans un repère cartésien orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Les arêtes parallèles aux axes de la base ont une longueur donnée c .

Un expérimentateur réalise quelques mesures, et constate que :

- La composante normale de la force exercée sur la face arrière (correspondant au plan $x_1 = 0$) est égale à F_1
- La composante normale de la force exercée sur la face de gauche (correspondant au plan $x_2 = 0$) est égale à F_2
- La composante normale de la force exercée sur la face inférieure (correspondant au plan $x_3 = 0$) est égale à F_3
- La force exercée sur la face inclinée du tétraèdre est égale à $\vec{G} = G_1\vec{e}_1 + G_2\vec{e}_2 + G_3\vec{e}_3$

Déterminer les composantes de la matrice du tenseur de Cauchy dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.



Exercice B. On considère un petit cube de centre \vec{x} dans un milieu continu soumis à des contraintes. On effectue trois expériences de chargement (a), (b), et (c), respectivement caractérisées par les vecteurs contraintes suivants (σ_0 étant une constante) :

$$(a). \quad \vec{T}(\vec{x}, \vec{e}_1) = \vec{0} \quad ; \quad \vec{T}(\vec{x}, \vec{e}_2) = \sigma_0 \vec{e}_3 \quad ; \quad \vec{T}(\vec{x}, \vec{e}_3) = \sigma_0 \vec{e}_2$$

$$(b). \quad \vec{T}(\vec{x}, \vec{e}_1) = \sigma_0 \vec{e}_3 \quad ; \quad \vec{T}(\vec{x}, \vec{e}_2) = \vec{0} \quad ; \quad \vec{T}(\vec{x}, \vec{e}_3) = \sigma_0 \vec{e}_1$$

$$(c). \quad \vec{T}(\vec{x}, \vec{e}_1) = \sigma_0 \vec{e}_2 \quad ; \quad \vec{T}(\vec{x}, \vec{e}_2) = \sigma_0 \vec{e}_1 \quad ; \quad \vec{T}(\vec{x}, \vec{e}_3) = \vec{0}$$

1. Exprimer les trois tenseurs de contraintes $\overline{\sigma}_{(a)}$, $\overline{\sigma}_{(b)}$, et $\overline{\sigma}_{(c)}$ correspondant à ces trois cas de chargement.
2. On effectue les trois expériences simultanément en superposant les trois systèmes de forces. Exprimer le tenseur de contraintes correspondant à cette nouvelle expérience. Pour la suite de l'exercice on considérera uniquement ce nouvel état de contrainte.
3. Calculer le vecteur contrainte exercé sur une petite surface normale à la direction \vec{n} définie par l'expression $\vec{n} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.
4. Calculer le vecteur contrainte exercé sur une petite surface de direction \vec{u} normale à \vec{n} .
5. Donner sans calcul supplémentaire les contraintes principales et les directions principales de contraintes.
6. Tracer le tricerclé de Mohr correspondant à cet état de contraintes et donner la valeur de la contrainte de cisaillement maximale. Donner également la valeur de la contrainte moyenne et la matrice du déviateur de contraintes.

Exercice C. En un point M d'un milieu continu et à l'instant t , la matrice du tenseur de Cauchy dans une base cartésienne orthonormée fixe $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est donnée par l'expression suivante, où α est une constante adimensionnelle :

$$\overline{\sigma} = \begin{bmatrix} 0.7\alpha & 3.6\alpha & 0 \\ 3.6\alpha & 2.8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{bmatrix}$$

1. Montrer que le calcul des trois contraintes $\vec{T}(\vec{e}_i), i = 1, 2, 3$ et l'utilisation des propriétés des cercles de Mohr permettent de calculer les contraintes principales qu'on notera σ_1, σ_2 , et σ_3 . Illustrer le cas $\alpha = 1$.
2. Déterminer les valeurs de α correspondant à un état triaxial de révolution.
3. Pour la suite de l'exercice, on pose $\alpha = 1$. Déterminer les directions principales de $\overline{\sigma}$ en M .
4. Calculer la contrainte pour une facette de normale $\vec{n}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$. Tracer le point correspondant sur le cercle de Mohr.
5. Déterminer pour $\alpha = 1$, puis pour $\alpha = 2$, la valeur de la contrainte de cisaillement maximum ainsi que la direction de la normale correspondante.

Corrigés

Exercice A.

On recherche les termes de la matrice de $\bar{\sigma}$ à partir d'un certain nombre de mesures de forces effectuées sur les faces d'un domaine matériel. L'état de contrainte est supposé homogène et stationnaire, et le tenseur de Cauchy est toujours symétrique, on cherche donc en tout et pour tout six inconnues scalaires : σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , σ_{12} , σ_{13} , et σ_{23} .

On va d'abord travailler sur la force appliquée sur la face arrière du tétraèdre (plan $x_1 = 0$). L'énoncé dit que la composante normale à cette force est égale à F_1 . On peut également remarquer que la facette en question (face triangulaire arrière) est de normale sortante $-\vec{e}_1$.

On va chercher à exprimer le vecteur contrainte appliqué sur cette facette. On peut l'énoncer ainsi à partir de la formule du cours :

$$\vec{T}(-\vec{e}_1) = \bar{\sigma} \cdot (-\vec{e}_1)$$

$$\text{Avec : } \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_B \text{ et } \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_B$$

Donc on a :

$$\vec{T}(-\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_B \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} -\sigma_{11} \\ -\sigma_{12} \\ -\sigma_{13} \end{bmatrix}_B$$

Par ailleurs, on sait que la composante normale de la force appliquée à la facette vaut F_1 . Si on note S la surface de la facette triangulaire, on peut intégrer la contrainte $\vec{T}(-\vec{e}_1)$ sur toute la surface de la facette (pour obtenir une force), et considérer sa composante normale (par projection sur la normale, c'est-à-dire par produit scalaire avec le vecteur normal sortant de la facette). On a donc :

$$F_1 = S \times \left(\vec{T}(-\vec{e}_1) \cdot (-\vec{e}_1) \right) = S \begin{bmatrix} -\sigma_{11} \\ -\sigma_{12} \\ -\sigma_{13} \end{bmatrix}_B \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_B = S\sigma_{11}$$

La surface S de la facette est donnée par $S = \frac{c^2}{2}$, et on peut finalement écrire :

$$\sigma_{11} = \frac{2F_1}{c^2}$$

Par des raisonnements identiques sur les facettes de normales $-\vec{e}_2$ et $-\vec{e}_3$, on obtient de la même manière :

$$\sigma_{22} = \frac{2F_2}{c^2}$$

$$\sigma_{33} = \frac{2F_3}{c^2}$$

On a déterminé les trois termes diagonaux de la matrice de $\bar{\sigma}$. Il nous reste à déterminer les termes non-diagonaux. On va donc s'intéresser à la facette restante.

Sa normale sortante est un vecteur unitaire, colinéaire à la direction $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Il s'agit donc

d'un vecteur d'allure générale $\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix}$, où a est un réel à déterminer. Par ailleurs, ce vecteur doit être unitaire, donc sa norme doit être égale à 1. On va donc avoir :

$$\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = 1$$

et donc :

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

La normale sortante à la facette est donc le vecteur $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}_B$.

On a également besoin de la surface S' de cette facette. Il s'agit d'un triangle équilatéral de côté $c\sqrt{2}$, et on obtient après quelques calculs trigonométriques et/ou Pythagore :

$$S' = \frac{c^2\sqrt{3}}{2}$$

On peut maintenant écrire le vecteur contrainte subi par cette facette en n'importe lequel de ses points (puisque l'état de contrainte est homogène) :

$$\vec{T}(\vec{n}) = \bar{\sigma}\vec{n}$$

et donc :

$$\vec{T}(\vec{n}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_B \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}_B$$

$$\vec{T}(\vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13} \\ \sigma_{12} + \sigma_{22} + \sigma_{23} \\ \sigma_{13} + \sigma_{23} + \sigma_{33} \end{bmatrix}_B$$

L'énoncé précise que la force subie par la facette est mesurée comme étant égale à :

$$\vec{G} = G_1 \vec{e}_1 + G_2 \vec{e}_2 + G_3 \vec{e}_3$$

Or cette force est également le produit du vecteur contrainte (homogène) par la surface de la facette, on a donc :

$$\vec{G} = G_1 \vec{e}_1 + G_2 \vec{e}_2 + G_3 \vec{e}_3 = S' \cdot \vec{T}(\vec{n}) = \frac{S'}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13} \\ \sigma_{12} + \sigma_{22} + \sigma_{23} \\ \sigma_{13} + \sigma_{23} + \sigma_{33} \end{bmatrix}_B$$

Cette équation matricielle nous fournit trois équations scalaires :

$$\begin{cases} G_1 = \frac{S'}{\sqrt{3}} (\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13}) \\ G_2 = \frac{S'}{\sqrt{3}} (\sigma_{12} + \sigma_{22} + \sigma_{23}) \\ G_3 = \frac{S'}{\sqrt{3}} (\sigma_{13} + \sigma_{23} + \sigma_{33}) \end{cases}$$

On peut alors remplacer les termes diagonaux de la matrice par leurs valeurs trouvées en début d'exercice, et faire de même avec la surface de la facette :

$$\begin{cases} G_1 = \frac{c^2}{2} \left(\frac{2F_1}{c^2} + \sigma_{12} + \sigma_{13} \right) \\ G_2 = \frac{c^2}{2} \left(\sigma_{12} + \frac{2F_2}{c^2} + \sigma_{23} \right) \\ G_3 = \frac{c^2}{2} \left(\sigma_{13} + \sigma_{23} + \frac{2F_3}{c^2} \right) \end{cases}$$

On dispose alors d'un système de trois équations à trois inconnues : σ_{12} , σ_{13} , et σ_{23} .

$$\begin{cases} \sigma_{12} + \sigma_{13} = \frac{2G_1 - 2F_1}{c^2} \\ \sigma_{12} + \sigma_{23} = \frac{2G_2 - 2F_2}{c^2} \\ \sigma_{13} + \sigma_{23} = \frac{2G_3 - 2F_3}{c^2} \end{cases}$$

On obtient finalement les résultats demandés suivants :

$$\begin{cases} \sigma_{12} = \frac{(G_1 - F_1) + (G_2 - F_2) - (G_3 - F_3)}{c^2} \\ \sigma_{13} = \frac{(G_1 - F_1) - (G_2 - F_2) + (G_3 - F_3)}{c^2} \\ \sigma_{23} = \frac{-(G_1 - F_1) + (G_2 - F_2) + (G_3 - F_3)}{c^2} \end{cases}$$

Exercice B.

1. Considérons l'état de chargement (a). On nous donne trois équations vectorielles :

$$\vec{T}(\vec{x}, \vec{e}_1) = \vec{0} \quad ; \quad \vec{T}(\vec{x}, \vec{e}_2) = \sigma_0 \vec{e}_3 \quad ; \quad \vec{T}(\vec{x}, \vec{e}_3) = \sigma_0 \vec{e}_2$$

D'après la première équation, on peut écrire :

$$\vec{T}(\vec{x}, \vec{e}_1) = \bar{\sigma}_{(a)} \cdot \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \vec{0}$$

On en déduit directement que $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$

On considère maintenant la deuxième équation, qui nous permet d'écrire :

$$\vec{T}(\vec{x}, \vec{e}_2) = \bar{\sigma}_{(a)} \cdot \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \sigma_0 \vec{e}_3$$

On en déduit que $\sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$ mais aussi que $\sigma_{23} = \sigma_0$.

Enfin, on considère la troisième équation, qui donne directement :

$$\vec{T}(\vec{x}, \vec{e}_3) = \bar{\sigma}_{(a)} \cdot \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \sigma_0 \vec{e}_2$$

On en déduit que $\sigma_{13} = \sigma_{33} = 0$ et on confirme que $\sigma_{23} = \sigma_0$.

On a donc calculé les six termes indépendants de la matrice du tenseur de Cauchy dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, et on peut écrire cette matrice :

$$\bar{\bar{\sigma}}_{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \end{bmatrix}_B$$

On rappelle que cette matrice est uniquement valable pour l'état de chargement noté (a) dans l'énoncé. En appliquant des raisonnements identiques, on obtient également les matrices des tenseurs de contraintes correspondant aux états de chargement (b) et (c) :

$$\bar{\bar{\sigma}}_{(b)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_B$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{(c)} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_0 & 0 \\ \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_B$$

2. Sans calcul supplémentaire, on peut tirer parti du fait que la superposition de plusieurs états de contraintes correspond à la somme des tenseurs de contraintes correspondants. Si on superpose les chargements (a), (b), et (c), on obtient donc le tenseur de contraintes dont la matrice dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ s'exprime par :

$$\bar{\bar{\sigma}}_{(a)+(b)+(c)} = \bar{\bar{\sigma}}_{(a)} + \bar{\bar{\sigma}}_{(b)} + \bar{\bar{\sigma}}_{(c)} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 & 0 \end{bmatrix}_B$$

3. On cherche à exprimer le vecteur contrainte sur une facette dont on nous donne la direction \vec{n} . Il nous faut d'abord déterminer les coordonnées du vecteur unitaire normal à cette facette. Ce vecteur est colinéaire à \vec{n} , mais de norme égale à 1. On peut le noter \vec{n}' et l'exprimer ainsi :

$$\vec{n}' = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_B$$

Le vecteur contrainte appliqué à la facette définie par cette normale unitaire est ensuite donné directement par la formule du cours :

$$\vec{T}(\vec{x}, \vec{n}) = \vec{T}(\vec{x}, \vec{n}') = \bar{\bar{\sigma}}_{(a)+(b)+(c)} \cdot \vec{n}' = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 & 0 \end{bmatrix}_B \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_B$$

Et donc :

$$\vec{T}(\vec{x}, \vec{n}) = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_B = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \vec{n} = 2\sigma_0 \vec{n}'$$

4. On cherche à déterminer le vecteur contrainte appliqué à une facette de normale \vec{u} , dont on sait seulement que cette normale est également normale au vecteur \vec{n} défini plus haut. On cherche donc $\vec{T}(\vec{x}, \vec{u})$, sachant que $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$. Ecrivons ces deux données sous forme mathématique :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

$$\vec{T}(\vec{x}, \vec{u}) = \bar{\sigma}_{(a)+(b)+(c)} \cdot \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 & 0 \end{bmatrix}_B \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}_B = \sigma_0 \begin{bmatrix} u_2 + u_3 \\ u_1 + u_3 \\ u_1 + u_2 \end{bmatrix}_B$$

On en déduit :

$$\vec{T}(\vec{x}, \vec{u}) = -\sigma_0 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}_B = -\sigma_0 \vec{u}$$

5. D'après les formules précédentes, on peut formuler plusieurs observations. On a montré que :

$$\vec{T}(\vec{x}, \vec{n}') = 2\sigma_0 \vec{n}'$$

Par conséquent la direction \vec{n}' est une des directions principales de contrainte. Le vecteur unitaire \vec{n}' est donc l'un des vecteurs de la base principale de contraintes, et la contrainte principale correspondante est égale à $2\sigma_0$.

Par ailleurs, on a montré que, pour tout vecteur \vec{u} perpendiculaire à \vec{n}' , on a :

$$\vec{T}(\vec{x}, \vec{u}) = -\sigma_0 \vec{u}$$

On en déduit que $-\sigma_0$ est une racine double et que le tenseur de Cauchy est cylindrique. Dans sa base principale, sa matrice s'exprime par :

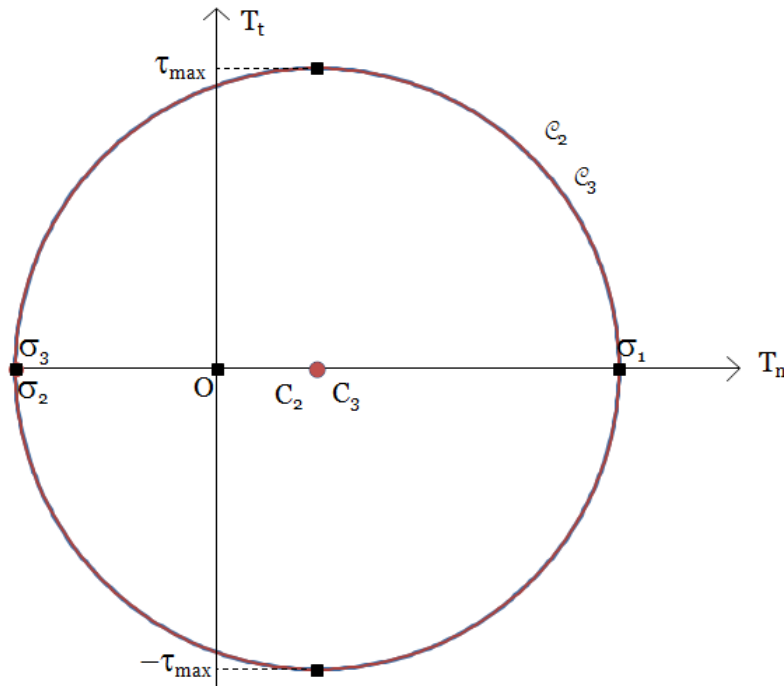
$$\bar{\sigma}_{(a)+(b)+(c)} = \begin{bmatrix} 2\sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_0 \end{bmatrix}_{\text{Base principale}}$$

La base principale est formée du vecteur \vec{n}' et de tout couple de vecteurs perpendiculaires appartenant au plan normal à \vec{n}' .

6. En ordonnant les valeurs de contraintes (et en supposant que $\sigma_0 > 0$), on a :

$$\bar{\bar{\sigma}}_{(a)+(b)+(c)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}_{\text{Base principale}}$$

avec : $\sigma_1 = 2\sigma_0$ et $\sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_0$. Le tricercler de Mohr a l'allure suivante :



Les valeurs propres σ_2 et σ_3 sont confondues, donc le tricercler se résume à un cercle unique. Par ailleurs, la contrainte de cisaillement maximale et la contrainte moyenne sont données par les formules de cours :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{3}{2}\sigma_0$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3}tr\bar{\bar{\sigma}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = 0$$

La contrainte moyenne est nulle, donc le tenseur de contraintes n'a pas de partie sphérique, et le déviateur de $\bar{\bar{\sigma}}$ est égal à $\bar{\bar{\sigma}}$.

Exercice C.

1. On dispose de la matrice du tenseur des contraintes dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0.7\alpha & 3.6\alpha & 0 \\ 3.6\alpha & 2.8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{bmatrix}$$

Suivons l'énoncé, et calculons les trois vecteurs contraintes existant au point M , pour des facettes de normales respectives \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , et \vec{e}_3 :

$$\vec{T}(\vec{e}_1) = \bar{\sigma}\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 0.7\alpha & 3.6\alpha & 0 \\ 3.6\alpha & 2.8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7\alpha \\ 3.6\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = 0.7\alpha\vec{e}_1 + 3.6\alpha\vec{e}_2$$

$$\vec{T}(\vec{e}_2) = \bar{\sigma}\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0.7\alpha & 3.6\alpha & 0 \\ 3.6\alpha & 2.8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6\alpha \\ 2.8\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = 3.6\alpha\vec{e}_1 + 2.8\alpha\vec{e}_2$$

$$\vec{T}(\vec{e}_3) = \bar{\sigma}\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0.7\alpha & 3.6\alpha & 0 \\ 3.6\alpha & 2.8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7.6 \end{bmatrix} = 7.6\vec{e}_3$$

Chacun de ces vecteurs peut être décomposé en une composante normale et une composante tangentielle, afin d'être représentés dans le plan de Mohr. Par exemple, pour le vecteur contrainte appliqué à la facette de normale \vec{e}_1 , on peut écrire :

$$\vec{T}(\vec{e}_1) = T_{n1} \cdot \vec{e}_1 + T_{t1} \cdot \vec{t}_1$$

Dans cette équation très générale, \vec{t}_1 est un vecteur unitaire appartenant au plan de la facette, et T_{n1} et T_{t1} sont respectivement la composante normale et la composante tangentielle du vecteur contrainte. Par identification avec l'expression trouvée plus haut, on peut écrire :

$$\vec{t}_1 = \vec{e}_2$$

$$T_{n1} = 0.7\alpha \quad \text{et} \quad T_{t1} = 3.6\alpha$$

En appliquant la même opération à $\vec{T}(\vec{e}_2)$ et $\vec{T}(\vec{e}_3)$, on peut écrire de la même manière

$$T_{n2} = 2.8\alpha \quad \text{et} \quad T_{t2} = 3.6\alpha$$

$$T_{n3} = 7.6 \quad \text{et} \quad T_{t3} = 0$$

Avec ces résultats, on peut tout à fait placer sur le plan de Mohr les points correspondant à chacun de ces trois vecteurs contraintes. Il s'agira des points de coordonnées (T_{n1}, T_{t1}) , (T_{n2}, T_{t2}) , et (T_{n3}, T_{t3}) . Il faut noter pour l'instant que la connaissance de ces points n'est pas suffisante pour tracer le tricerple de Mohr et donc pour déterminer les contraintes principales.

On doit maintenant appliquer un certain nombre de raisonnements liés à des propriétés du cercle de Mohr. On remarque que la composante tangentielle de $\vec{T}(\vec{e}_3)$ est nulle, ce qui signifie par définition que \vec{e}_3 est une direction principal de contrainte. On en déduit donc que les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont situés dans le plan des deux autres directions principales (pour l'instant inconnues), et que les points du plan de Mohr correspondant

aux deux vecteurs contraintes liés à ces facettes sont situées sur le même cercle de Mohr (c'est la définition d'un cercle donné dans le cours). Par conséquent, les points (T_{n1}, T_{t1}) et (T_{n2}, T_{t2}) appartiennent tous les deux au même cercle de Mohr. C'est aussi le cas de leurs symétriques par rapport à l'axe horizontal, c'est-à-dire des points $(T_{n1}, -T_{t1})$ et $(T_{n2}, -T_{t2})$.

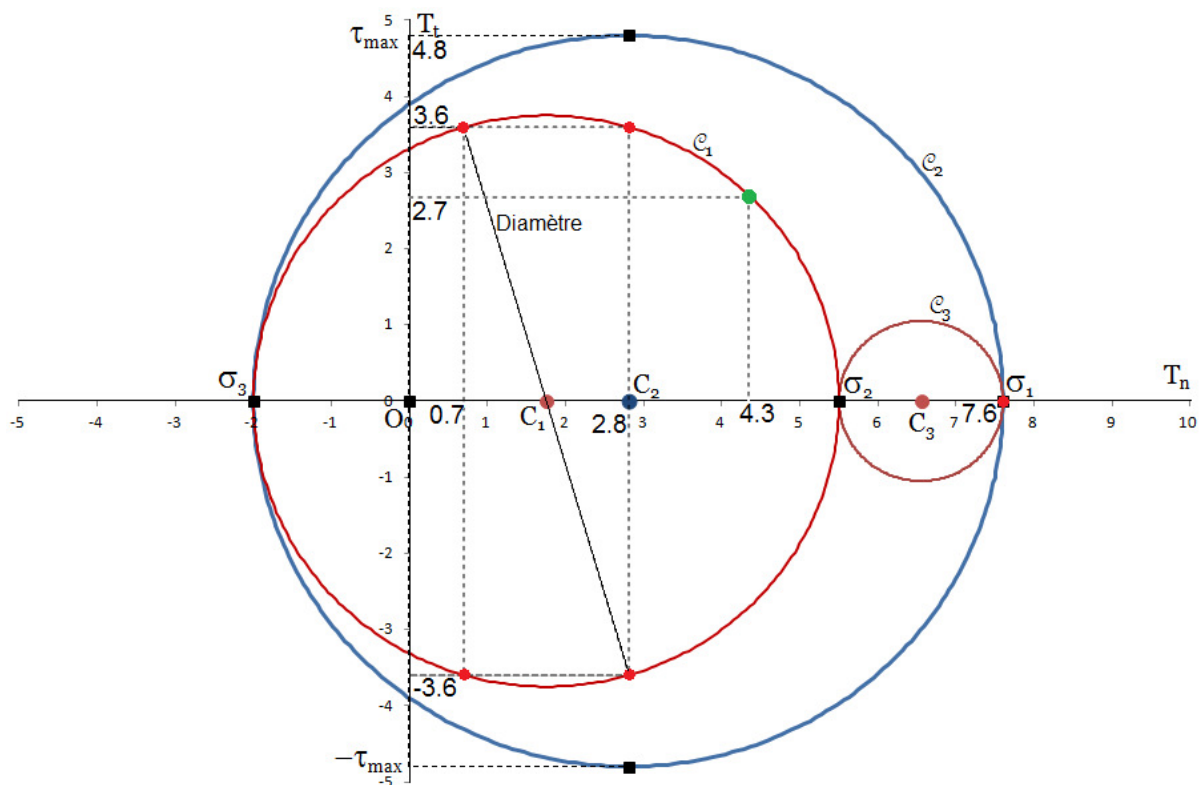
On tire enfin parti des règles d'orientation données dans le cours, et on observe que les deux facettes de normales \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont orthogonales, et donc que les points qui leur correspondent dans le plan de Mohr sont nécessairement diamétralement opposés sur le cercle de Mohr auquel ils appartiennent. On en déduit que les coordonnées du centre du cercle de Mohr que l'on recherche sont au milieu d'un segment reliant deux points diamétralement opposés :

$$\left(\frac{T_{n1} + T_{n2}}{2}, 0\right) = \left(\frac{0.7\alpha + 2.8\alpha}{2}, 0\right) = (1.75\alpha, 0)$$

Le rayon de ce cercle se calcule ensuite par Pythagore :

$$R = \sqrt{(2.8\alpha - 1.75\alpha)^2 + (3.6\alpha)^2} = \alpha\sqrt{(2.8 - 1.75)^2 + (3.6)^2} = 3.75\alpha$$

On en déduit qu'une des contraintes principales est égale à $1.75\alpha - 3.75\alpha = -2\alpha$, et qu'une autre contrainte principale vaut $1.75\alpha + 3.75\alpha = 5.5\alpha$. Quant à la troisième, on l'a déjà déterminée implicitement au début de l'exercice, et elle vaut 7.6. La situation est représentée dans le plan de Mohr pour $\alpha = 1$:



2. Un état triaxial de révolution correspond à n'importe quel état de contraintes pour lequel deux des contraintes principales sont égales.

Dans notre cas, sans accorder d'attention à l'ordre des contraintes principales (puisque celui-ci dépend de α), on peut énoncer que les contraintes principales sont égales à :

$$\sigma_1 = -2\alpha ; \sigma_2 = 5.5\alpha ; \sigma_3 = 7.6$$

On peut relever dans le cas présent trois situations pour lesquelles l'état de contraintes est triaxial de révolution :

$$\sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow -2\alpha = 5.5\alpha \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_3 \Rightarrow -2\alpha = 7.6 \Rightarrow \alpha = -3.8$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 \Rightarrow 5.5\alpha = 7.6 \Rightarrow \alpha = 1.38$$

3. On pose $\alpha = 1$, on ordonne les contraintes, et on a donc $\sigma_1 = 7.6$, $\sigma_2 = 5.5$, et $\sigma_3 = -2$.

On cherche les directions principales de contraintes $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$. Plus précisément, on cherche à trouver les coordonnées de ces trois vecteurs propres dans la base d'origine $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

On a déjà démontré que \vec{e}_3 est une direction propre, et lorsque $\alpha = 1$ cette direction propre est celle de la contrainte principale maximale. On peut donc énoncer sans calcul que :

$$\vec{c}_1 = \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B$$

On cherche alors les coordonnées des deux autres vecteurs principaux, tels que :

$$\vec{c}_2 = c_{2,1} \cdot \vec{e}_1 + c_{2,2} \cdot \vec{e}_2 + c_{2,3} \cdot \vec{e}_3$$

$$\vec{c}_3 = c_{3,1} \cdot \vec{e}_1 + c_{3,2} \cdot \vec{e}_2 + c_{3,3} \cdot \vec{e}_3$$

Puisque $\vec{c}_1 = \vec{e}_3$, les vecteurs \vec{c}_2 et \vec{c}_3 sont orthogonaux à \vec{e}_3 , et on a $c_{2,3} = c_{3,3} = 0$.

Il nous reste quatre scalaires à trouver : $c_{2,1}$, $c_{2,2}$, $c_{3,1}$, et $c_{3,2}$.

On applique la formule classique définissant une direction principale de contrainte :

$$\bar{\sigma} \vec{c}_i = \sigma_i \vec{c}_i$$

$$\text{or on a } \overline{\sigma c_2} = \begin{bmatrix} 0.7 & 3.6 & 0 \\ 3.6 & 2.8 & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{bmatrix}_B \begin{bmatrix} c_{2,1} \\ c_{2,2} \\ 0 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0.7c_{2,1} + 3.6c_{2,2} \\ 3.6c_{2,1} + 2.8c_{2,2} \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

$$\text{Donc on obtient } \overline{\sigma c_2} = (0.7c_{2,1} + 3.6c_{2,2})\overline{e_1} + (3.6c_{2,1} + 2.8c_{2,2})\overline{e_2}$$

$$\text{Par ailleurs on a } \overline{\sigma c_2} = \sigma_2 \overline{c_2} = 5.5 \cdot [c_{2,1}\overline{e_1} + c_{2,2}\overline{e_2}]$$

On en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} 5.5c_{2,1} = 0.7c_{2,1} + 3.6c_{2,2} \\ 5.5c_{2,2} = 3.6c_{2,1} + 2.8c_{2,2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4.8c_{2,1} + 3.6c_{2,2} = 0 \\ 3.6c_{2,1} - 2.7c_{2,2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -4.8 & 3.6 \\ 3.6 & -2.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{2,1} \\ c_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution de ce système est triviale : $c_{2,1} = 0$ et $c_{2,2} = 0$. Cette solution n'est évidemment pas celle qui nous intéresse. En se penchant un peu plus sur le système, on observe que ses deux équations sont en fait identiques. C'est le genre de piège que les calculs peuvent faire apparaître.

Il y a une information que l'on n'a pas encore utilisée : le fait que le vecteur $\overline{c_2}$ doit être unitaire. On a donc un nouveau système :

$$\begin{cases} -4.8c_{2,1} + 3.6c_{2,2} = 0 \\ c_{2,1}^2 + c_{2,2}^2 = 1 \end{cases}$$

De la première équation il vient $c_{2,1} = \frac{3}{4}c_{2,2}$, que l'on peut intégrer dans la seconde équation :

$$c_{2,2}^2 + \frac{9}{16}c_{2,2}^2 = 1$$

Finalement, on obtient : $c_{2,2} = 0.8$ et $c_{2,1} = 0.6$. On note enfin :

$$\overline{c_2} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

On pourrait appliquer la même méthode pour obtenir $c_{3,1}$, et $c_{3,2}$, mais on peut aussi tirer parti du fait que $(\overline{c_1}, \overline{c_2}, \overline{c_3})$ est une base orthonormée directe. On peut donc utiliser le produit vectoriel et écrire :

$$\vec{c}_3 = \vec{c}_1 \wedge \vec{c}_2$$

Donc on a :

$$\vec{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B \wedge \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0.6 \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

4. On définit la facette de normale $\vec{n}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$. Le vecteur contrainte subi par cette facette s'obtient directement par la formule du cours :

$$\vec{T}(\vec{n}_1) = \vec{\sigma}\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 3.6 & 0 \\ 3.6 & 2.8 & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{bmatrix}_B \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 4.5 \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

Pour tracer le point correspondant à ce vecteur contrainte dans le plan de Mohr, on a besoin d'une composante normale et d'une composante tangentielle. La composante normale s'obtient, comme d'habitude, par projection du vecteur $\vec{T}(\vec{n}_1)$ sur la direction normale à la facette, c'est-à-dire par un produit scalaire :

$$T_n = \vec{T}(\vec{n}_1) \cdot \vec{n}_1 = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 4.5 \\ 0 \end{bmatrix}_B \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}_B = 4.3$$

Le vecteur contrainte $\vec{T}(\vec{n}_1)$ est la somme d'un vecteur $T_n\vec{n}_1$ orienté dans la direction normale et d'un autre vecteur orienté dans une direction tangentielle \vec{t}_1 qui n'est pas connue. La composante tangentielle est donc la norme du vecteur obtenu en retranchant la composante normale du vecteur $\vec{T}(\vec{n}_1)$ à lui-même :

$$T_t = \|\vec{T}(\vec{n}_1) - T_n\vec{n}_1\|$$

$$T_t = \left\| \begin{bmatrix} 2.4 \\ 4.5 \\ 0 \end{bmatrix}_B - 4.3 \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}_B \right\| = 2.7$$

On peut alors reporter le point correspondant sur le graphique (voir figure précédente). On constate qu'il appartient au cercle 1. C'est logique, car ce point est défini pour une facette de direction normale $\vec{n}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$ qui appartient au plan des deux directions principales (\vec{c}_2, \vec{c}_3) (c'est le plan normal à \vec{e}_3).

5. Pour $\alpha = 1$, on a $\sigma_1 = 7.6$ et $\sigma_3 = -2$. La contrainte de cisaillement maximale est donc donnée par :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 4.8$$

L'abscisse du point correspondant sur le plan de Mohr correspond à celle du centre du grand cercle de Mohr, soit:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = 2.8$$

Le point du cercle de Mohr correspondant à la facette de cisaillement maximal est donc de coordonnées (2.8,4.8) (voir figure).

Par définition, la facette qui reçoit cette contrainte possède une normale qui appartient au plan des deux directions principales \vec{c}_1 et \vec{c}_3 (qu'on appelle "plan de cisaillement maximal"). En fait, la facette de cisaillement maximal correspond toujours à une orientation situé selon la bissectrice des directions principales \vec{c}_1 et \vec{c}_3 , qui est donc donnée par :

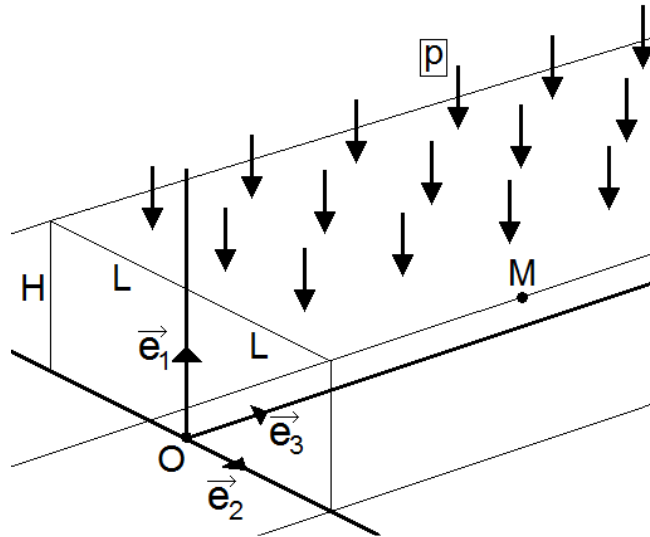
$$\frac{\vec{c}_1 + \vec{c}_3}{2} = \begin{bmatrix} \frac{0 - 0.8}{2} \\ 0 + 0.6 \\ \frac{2}{2} \\ \frac{1 + 0}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 0.3 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Il faut noter que ce vecteur n'est pas unitaire (même s'il suffit à définir la direction de la normale à la facette).

Pour $\alpha = 2$, la méthode est strictement la même, excepté que le vecteur \vec{c}_1 a changé, et il faut donc le recalculer pour obtenir la bonne orientation de la facette de cisaillement maximal.

5. Elasticité

Exercice A. Soit le massif rectangulaire de grande longueur représenté sur la figure suivante :



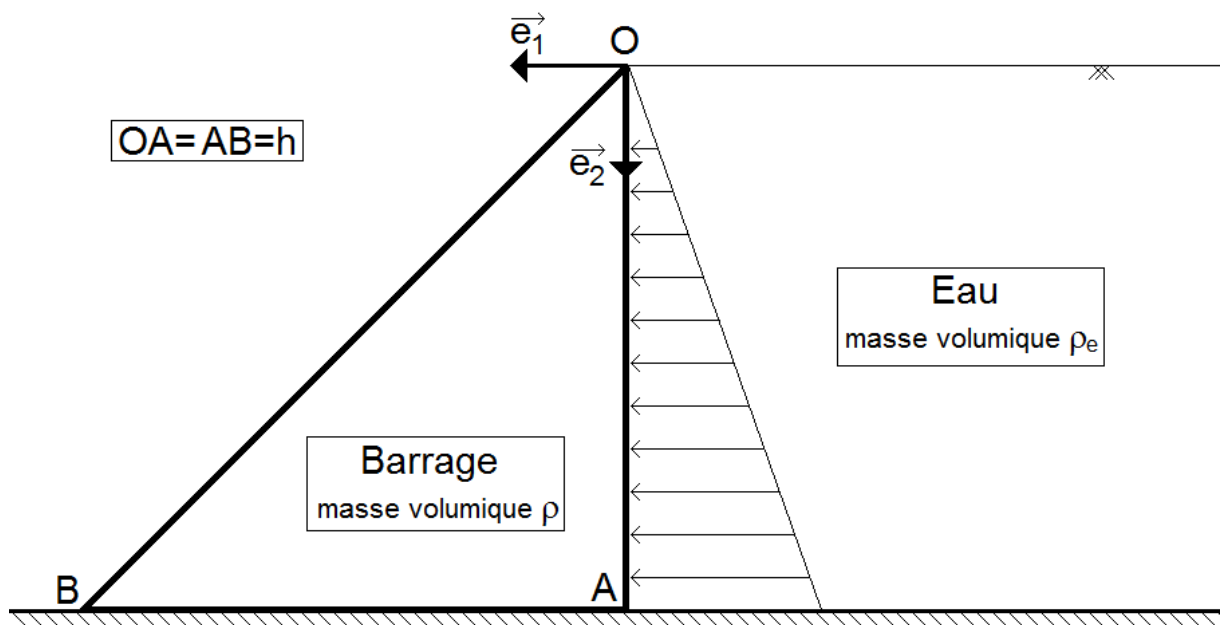
On pose plusieurs hypothèses :

- Comportement élastique linéaire, de paramètres E et ν .
- Face supérieure soumise à une pression uniforme p .
- Face inférieure en appui glissant et non-frottant, fixée seulement sur l'axe (O, \vec{e}_3) .
- Forces de volume négligeables.
- Hypothèse des petites perturbations.
- On se place dans la zone centrale du massif pour se prémunir des effets de bord.
- Champ de déplacement donné par $\vec{U} = (A \cdot X_1 + C \cdot X_2)\vec{e}_1 + (-C \cdot X_1 + B \cdot X_2)\vec{e}_2$.

1. Représenter la section du massif contenant le point M , ainsi que les conditions aux limites sur cette section.
2. Calculer le tenseur des déformations $\bar{\bar{\epsilon}}$, et donner ses valeurs principales et ses directions principales. De quel type de déformation s'agit-il ?
3. Exprimer analytiquement le tenseur de Cauchy $\bar{\bar{\sigma}}$ (utiliser les coefficients de Lamé pour simplifier les notations).
4. En utilisant les conditions aux limites en contraintes, calculer les expressions des paramètres A et B . En utilisant les conditions aux limites en déplacement, calculer C .
5. On pose $E = 210000 \text{ MPa}$ et $\nu = 0.3$ (Massif en acier). Les dimensions de la section sont $L = 0.2 \text{ m}$ et $H = 0.15 \text{ m}$, et le chargement vaut $p = 500 \text{ MPa}$. Calculer le vecteur déplacement du point M . Tracer la déformée de la section.

Exercice B. On s'intéresse à un barrage poids de section triangulaire, dont la géométrie est proposée sur la figure suivante. Pour rendre le problème plan, on s'intéresse en particulier à une "tranche" de ce barrage située suffisamment loin des massifs d'ancrage latéraux. Le barrage est soumis à son poids $\rho_b g$ et à la poussée $\rho_e g x_2$ de l'eau, la surface de celle-ci étant située à une hauteur h égale à celle du barrage. A sa base, le barrage est parfaitement encastré.

Le matériau composant le barrage est supposé élastique linéaire et isotrope, de paramètres E et ν . On néglige la pression atmosphérique.



1. Expliquer pourquoi il s'agit d'un problème de déformations planes, et donner la forme générale des inconnues \vec{U} , $\bar{\epsilon}$, et $\bar{\sigma}$.
2. Décrire précisément les conditions aux limites d'une "tranche" du barrage. Ecrire les équations d'équilibre mécanique, d'abord à l'intérieur du domaine puis au niveau de ses conditions limites en contraintes.
3. On postule que tous les termes du tenseur de contrainte sont des fonctions linéaires des coordonnées x_1 et x_2 . Donner l'expression générale des termes de la matrice d'un tel champ de contrainte. Montrer qu'il vérifie l'équation de Beltrami, et est donc la solution du problème élastique.

Rappel : l'équation de Beltrami est donnée par :

$$\Delta \bar{\sigma} + \frac{1}{1 + \nu} \overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{\text{grad}} \text{tr } \bar{\sigma} = \bar{0}$$

Le laplacien d'un tenseur (par exemple $\Delta \bar{\sigma}$) est le tenseur dont chaque terme est le laplacien des termes du tenseur d'origine (ici $\bar{\sigma}$). On a donc $(\Delta \bar{\sigma})_{ij} = \Delta(\sigma_{ij})$. Les autres termes de l'équation sont calculables.

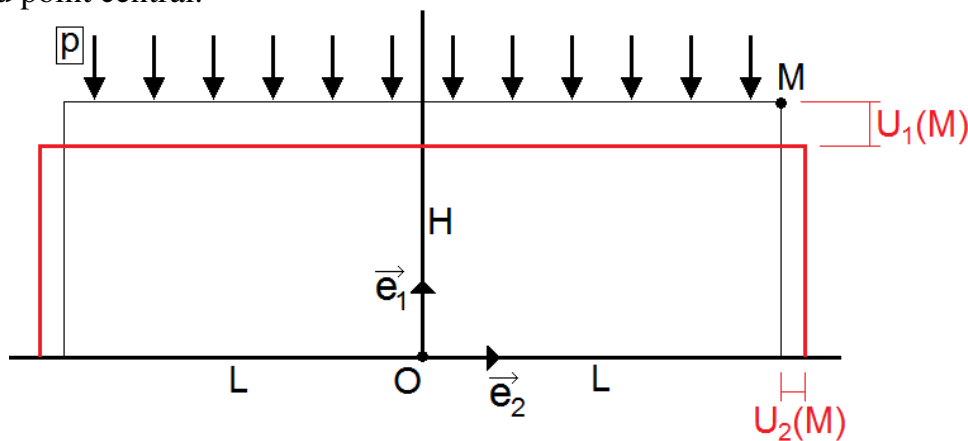
4. A l'aide de la loi de Hooke, montrer que $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$.
5. A l'aide des équations d'équilibre et des conditions aux limites en contraintes, calculer $\bar{\sigma}$ en tout point du système. A l'aide de la loi de Hooke, en déduire $\bar{\epsilon}$ en tout point du système.
6. Montrer que la contrainte tangentielle la plus intense (en valeur absolue) du système est obtenue au point B , et calculer cette contrainte.

Corrigés

Exercice A.

1. La section du massif contenant le point M est un rectangle. Il est soumis aux conditions aux limites suivantes :

- face supérieure : pression uniforme égale à p .
- faces latérales : pression uniforme égale à 0.
- face inférieure : déplacement vertical bloqué, déplacement horizontal bloqué au point central.



2. Le champ de déplacement est donné par l'expression :

$$\vec{U} = \begin{cases} A \cdot X_1 + C \cdot X_2 \\ -C \cdot X_1 + B \cdot X_2 \\ 0 \end{cases}$$

Il s'agit manifestement d'un mouvement plan. Le tenseur des déformations linéarisées se calcule par :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\overline{\text{grad}} \vec{U} + (\overline{\text{grad}} \vec{U})^T)$$

$$\text{Or } \overline{\text{grad}} \vec{U} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1} & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C & 0 \\ -C & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Finalement, } \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On constate qu'il s'agit d'une déformation plane, que la base principale de déformation est la base d'origine $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, et que les déformations principales sont $\{A, B, 0\}$.

3. On applique la loi de Hooke formulée en fonction des coefficients de Lamé :

$$\bar{\sigma} = 2\mu \cdot \bar{\varepsilon} + \lambda \cdot \text{tr}(\bar{\varepsilon}) \cdot \bar{I}$$

$$\text{avec } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ et } \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

On a $\text{tr}(\bar{\varepsilon}) = A + B$, et il vient donc :

$$\bar{\sigma} = 2\mu \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot (A + B) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Et finalement :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 2\mu A + \lambda \cdot (A + B) & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu B + \lambda \cdot (A + B) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \cdot (A + B) \end{bmatrix}$$

Les tenseurs $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$ sont homogènes, c'est-à-dire qu'ils sont égaux en tout point du système.

4. Sur la face supérieure, la pression appliquée peut se noter :

$$\vec{T}_d = -p \cdot \vec{e}_1$$

Par ailleurs, la condition aux limites d'équilibre sur cette face supérieure s'écrit :

$$\bar{\sigma} \vec{n} = \vec{T}_d$$

La normale unitaire sortante à cette surface est $-\vec{e}_1$, donc on a $\bar{\sigma}(-\vec{e}_1) = \vec{T}_d$

Par conséquent, on peut écrire : $-(2\mu A + \lambda \cdot (A + B)) \cdot \vec{e}_1 = -p \cdot \vec{e}_1$

Et finalement : $2\mu A + \lambda \cdot (A + B) = p$

On applique la même méthode sur une des faces latérales, et on obtient :

$$2\mu B + \lambda \cdot (A + B) = 0$$

Il en résulte un système linéaire de deux équations à deux inconnues A et B :

$$\begin{cases} (2\mu + \lambda)A + \lambda B = p \\ \lambda A + (2\mu + \lambda)B = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation donne $B = \frac{-\lambda A}{2\mu + \lambda}$, que l'on réinjecte dans la première pour obtenir $A \left(2\mu + \lambda - \frac{\lambda^2}{2\mu + \lambda} \right) = p$.

Après calcul, il vient :

$$A = p \frac{-2\mu - \lambda}{4\mu(\mu + \lambda)} \text{ et } B = p \frac{\lambda}{4\mu(\mu + \lambda)}$$

Sur la face inférieure, le déplacement est bloqué verticalement. En posant $X_1 = 0$, on peut donc écrire :

$$U_1(0, X_2, X_3) = 0$$

Or $U_1(X_1, X_2, X_3) = A \cdot X_1 + C \cdot X_2$.

On en déduit que $C \cdot X_2 = 0 \quad \forall (X_2, X_3)$, et donc que $C = 0$.

5. En utilisant les résultats précédents, on peut réécrire le champ de déplacement :

$$\vec{U} = \begin{cases} A \cdot X_1 = p \frac{-2\mu - \lambda}{4\mu(\mu + \lambda)} \cdot X_1 \\ B \cdot X_2 = p \frac{\lambda}{4\mu(\mu + \lambda)} \cdot X_2 \\ 0 \end{cases}$$

Les coordonnées du point M sont $X_1 = H = 0.15m$ et $X_2 = L = 0.2m$.

Par ailleurs, les coefficients de Lamé valent :

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{210000}{2(1 + 0.3)} = 80770 \text{ MPa}$$

$$\lambda = \frac{210000 * 0.3}{(1 + 0.3)(1 - 2 * 0.3)} = 121150 \text{ MPa}$$

Il vient finalement $A = -2.1666 \cdot 10^{-3}$ et $B = 9.2855 \cdot 10^{-4}$, et enfin :

$$\vec{U}(M) = \begin{cases} -0.325mm \\ 0.186mm \\ 0 \end{cases}$$

Exercice B.

1. Il s'agit d'un problème de déformations planes car la section du barrage est identique sur toute sa longueur, de même que le chargement qu'il subit. On en déduit que son champ de déplacement est entièrement situé dans le plan perpendiculaire à sa longueur (plan d'une "tranche"), et que sa déformation dans la direction de sa longueur est empêchée par les tranches voisines. Les champs inconnus ont la forme suivante :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} U_1(X_1, X_2) \\ U_2(X_1, X_2) \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, en élasticité linéaire on applique systématiquement l'HPP, et on peut utiliser indifféremment les vecteurs position initial \vec{X} et final \vec{x} .

2. Sur une "tranche" du barrage, les conditions aux limites sont les suivantes :

- Sur sa base il est parfaitement encastré : $\vec{U} = \vec{0}$ sur S_{uAB}
- Sur la face immergée (notée S_{tOA}), il subit la pression de l'eau
- Sur la face à l'air libre (notée S_{tOB}), il subit la pression atmosphérique qui est jugée négligeable.

Les équations d'équilibre du milieu continu sont :

- A l'intérieur du domaine, forme locale du PFD appliquée à l'équilibre statique du solide chargé :

$$\text{div } \bar{\sigma} + \rho \vec{g} = \vec{0} \text{ sur } D$$

- Sur la surface immergée, la normale sortante est $\vec{n} = -\vec{e}_1$, et la contrainte subie par la surface est proportionnelle à la profondeur x_2 et orientée dans la direction de \vec{e}_1 :

$$\bar{\sigma}(-\vec{e}_1) = \rho_e g x_2 \cdot \vec{e}_1 \text{ sur } S_{tOA}$$

- Sur la surface à l'air libre, la normale sortante est $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$, et la contrainte subie par la surface est nulle :

$$\bar{\sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)\right) = \vec{0} \text{ sur } S_{tOB}$$

3. L'énoncé postule que tous les termes du tenseur de contrainte sont des fonctions linéaires des coordonnées x_1 et x_2 , on a donc proportionnalité entre chaque terme de ce tenseur et ces coordonnées. On peut donc écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= a_{11}x_1 + b_{11}x_2 \\ \sigma_{12} &= a_{12}x_1 + b_{12}x_2 \\ \sigma_{22} &= a_{22}x_1 + b_{22}x_2 \\ \sigma_{33} &= a_{33}x_1 + b_{33}x_2 \end{aligned}$$

Dans ces expressions, les termes $\{a_{11}, b_{11}, a_{12}, b_{12}, a_{22}, b_{22}, a_{33}, b_{33}\}$ sont des constantes de proportionnalité qui sont pour l'instant inconnues.

Quant aux deux autres composantes du tenseur de Cauchy, on a déjà démontré qu'elles sont nulles car on est en déformations planes : $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$.

Pour que ce champ de contrainte soit admissible, il doit vérifier l'équation de Beltrami:

$$\Delta \bar{\sigma} + \frac{1}{1 + \nu} \overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{\text{grad}} \text{tr } \bar{\sigma} = \vec{0}$$

On écrit d'abord les différents termes de cette équation sous forme indicielle. Le premier terme permet d'écrire :

$$(\Delta \bar{\sigma})_{ij} = \Delta(\sigma_{ij}) = \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_3^2}$$

le deuxième terme est légèrement plus long à dériver. On développe d'abord la trace :

$$(\overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{\text{grad}} \text{tr } \bar{\sigma})_{ij} = \left(\overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{\text{grad}} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right)_{ij}$$

On développe ensuite le gradient du champ scalaire de cette trace, qui est donc un champ vectoriel :

$$(\overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{\text{grad}} \text{tr } \bar{\sigma})_{ij} = \left(\overrightarrow{\text{grad}} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \end{bmatrix} \right)_{ij}$$

On calcule enfin le gradient de ce champ vectoriel, qui est donc un champ tensoriel :

$$(\overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{\text{grad}} \text{tr } \bar{\sigma})_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) & \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \end{bmatrix}_{ij}$$

Il vient :

$$\left(\overline{\text{grad grad tr } \bar{\sigma}}\right)_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_i \partial x_j}$$

Finalement, l'équation de Beltrami peut s'écrire en notation indicielle :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_3^2} + \frac{1}{1 + \nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_i \partial x_j} \right) = 0$$

Il faut signaler que la notation d'Einstein aurait permis de réduire sensiblement la longueur de cette démonstration.

On voit que cette dernière équation ne fait apparaître que des dérivées secondes des termes du tenseur de contrainte par rapport aux coordonnées spatiales. Or ces termes suivent une variation affine par rapport aux coordonnées spatiales, donc toutes ces dérivées secondes sont donc nulles. Il en résulte que l'équation de Beltrami est vérifiée, et que l'hypothèse d'un champ de contrainte affine est satisfaisante.

4. On cherche à utiliser la loi de Hooke pour démontrer que $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$. On l'utilise d'abord dans le sens contraintes-déformations :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$

Il en résulte que $\sigma_{33} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\nu \varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22} + (1 - \nu) \varepsilon_{33})$

On sait que $\varepsilon_{33} = 0$ en déformations planes. On utilise alors la loi de Hooke dans le sens déformations-contraintes pour exprimer ε_{11} et ε_{22} :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix}$$

On en déduit : $\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22} - \nu \sigma_{33})$ et $\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_{11} + \sigma_{22} - \nu \sigma_{33})$

On réinjecte ces deux expressions dans la formule de σ_{33} :

$$\sigma_{33} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33}) + \frac{\nu}{E} (-\nu\sigma_{11} + \sigma_{22} - \nu\sigma_{33}) \right)$$

$$\sigma_{33} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\sigma_{11}(1-\nu) + \sigma_{22}(1-\nu) + \sigma_{33}(-2\nu))$$

On isole ensuite σ_{33} , et on obtient :

$$\sigma_{33} \left(1 + \frac{2\nu^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) = \frac{\nu(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Et finalement :

$$\sigma_{33} = \frac{\frac{\nu(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}}{1 + \frac{2\nu^2}{(1+\nu)(1-2\nu)}} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

La dernière simplification est laissée au lecteur, mais elle a été vérifiée !

5. Les équations d'équilibre ont déjà été données à la question 2, on va donc maintenant les utiliser en tirant parti de l'expression générale des termes du tenseur de contraintes donnés à la question 3. L'objectif est de trouver les expressions des constantes $\{a_{11}, b_{11}, a_{12}, b_{12}, a_{22}, b_{22}, a_{33}, b_{33}\}$, et donc de définir entièrement le tenseur de Cauchy dans le système.

La première équation d'équilibre est celle liée à la forme locale du PFD, valable pour tout point du système :

$$\overrightarrow{\text{div}} \bar{\sigma} + \rho \vec{g} = \vec{0} \text{ sur } D$$

On calcule d'abord la divergence du tenseur de Cauchy, donnée par :

$$(\overrightarrow{\text{div}} \bar{\sigma})_i = \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{div}} \bar{\sigma}$ et \vec{g} s'expriment donc par :

$$\overrightarrow{\text{div}} \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix}$$

Puisque $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, on peut donc écrire le PFD sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = -\rho g \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

La troisième équation est triviale ($0 = 0$), on peut donc tirer de ce système deux relations pertinentes :

$$\begin{cases} a_{11} + b_{12} = 0 \\ a_{12} + b_{22} = -\rho g \end{cases}$$

La deuxième équation d'équilibre est celle qui concerne la condition limite sur la surface immergée S_{tA} , que l'on a écrite :

$$\bar{\sigma}(-\vec{e}_1) = \rho_e g x_2 \cdot \vec{e}_1 \text{ sur } S_{tOA}$$

Le premier terme de cette équation vaut :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{cases} -\sigma_{11} = \rho_e g x_2 \\ -\sigma_{12} = 0 \\ -\sigma_{13} = 0 \end{cases} \text{ sur } S_{tA}$$

La troisième équation est triviale ($0 = 0$). On remplace les termes de $\bar{\sigma}$ par leurs expressions dans les deux premières équations :

$$\begin{cases} -a_{11}x_1 - b_{11}x_2 = \rho_e g x_2 \\ -a_{12}x_1 - b_{12}x_2 = 0 \end{cases} \text{ sur } S_{tOA}$$

Or sur la surface S_{tOA} on peut écrire $x_1 = 0$, et il vient donc :

$$\begin{cases} -b_{11}x_2 = \rho_e g x_2 \\ -b_{12}x_2 = 0 \end{cases}$$

Et finalement, on a les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} b_{11} = -\rho_e g \\ b_{12} = 0 \end{cases}$$

La dernière équation d'équilibre dont on dispose est celle qui concerne la surface à l'air libre notée S_{tB} , que l'on a écrite :

$$\bar{\sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \right) = \vec{0} \text{ sur } S_{tOB}$$

Le premier terme de cette équation s'écrit :

$$\bar{\sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \right) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{12} \\ \sigma_{12} - \sigma_{22} \\ \sigma_{13} - \sigma_{23} \end{bmatrix}$$

Par conséquent, l'équation d'équilibre se traduit par

$$\begin{cases} \sigma_{11} - \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{12} - \sigma_{22} = 0 \\ \sigma_{13} - \sigma_{23} = 0 \end{cases} \text{ sur } S_{tOB}$$

La troisième équation de ce système est triviale une fois de plus, et les deux autres nous permettent d'écrire :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + b_{11}x_2 - a_{12}x_1 - b_{12}x_2 = 0 \\ a_{12}x_1 + b_{12}x_2 - a_{22}x_1 - b_{22}x_2 = 0 \end{cases} \text{ sur } S_{tOB}$$

Or sur la surface S_{tOB} on peut écrire $x_1 = x_2$, et ces termes peuvent donc se simplifier dans le système précédent. Il vient donc :

$$\begin{cases} a_{11} + b_{11} - a_{12} - b_{12} = 0 \\ a_{12} + b_{12} - a_{22} - b_{22} = 0 \end{cases}$$

En récapitulant les trois équations d'équilibre, on obtient un système avec six équations et six inconnues :

$$\begin{cases} a_{11} + b_{12} = 0 \\ a_{12} + b_{22} = -\rho g \\ b_{11} = -\rho_e g \\ b_{12} = 0 \\ a_{11} + b_{11} - a_{12} - b_{12} = 0 \\ a_{12} + b_{12} - a_{22} - b_{22} = 0 \end{cases}$$

En travaillant dans ce système pour calculer toutes les variables, et en tenant compte du fait que l'on a démontré plus haut que $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, on peut définir entièrement notre champ de contraintes en précisant les huit coefficients inconnus :

$$\begin{cases} a_{11} = 0 & \text{et} & b_{11} = -\rho_e g \\ a_{12} = -\rho_e g & \text{et} & b_{12} = 0 \\ a_{22} = (\rho - 2\rho_e)g & \text{et} & b_{22} = (\rho_e - \rho)g \\ a_{33} = \nu(\rho - 2\rho_e)g & \text{et} & b_{33} = -\nu\rho g \end{cases}$$

et donc :

$$\sigma_{11} = a_{11}x_1 + b_{11}x_2 = -\rho_e g x_2$$

$$\sigma_{12} = a_{12}x_1 + b_{12}x_2 = -\rho_e g x_1$$

$$\sigma_{13} = 0$$

$$\sigma_{22} = a_{22}x_1 + b_{22}x_2 = (\rho - 2\rho_e)g x_1 + (\rho_e - \rho)g x_2$$

$$\sigma_{23} = 0$$

$$\sigma_{33} = a_{33}x_1 + b_{33}x_2 = \nu(\rho - 2\rho_e)g x_1 - \nu\rho g x_2$$

Le tenseur de contrainte est donc entièrement connu. Les trois valeurs non-nulles du champ de déformation se déduisent ensuite de la loi de Hooke :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33}) = \frac{x_1}{E}(a_{11} - \nu a_{22} - \nu a_{33}) + \frac{x_2}{E}(b_{11} - \nu b_{22} - \nu b_{33})$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} = \frac{1+\nu}{E}a_{12}x_1 + \frac{1+\nu}{E}b_{12}x_2$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{11} + \sigma_{22} - \nu\sigma_{33}) \\ &= \frac{x_1}{E}(-\nu a_{11} + a_{22} - \nu a_{33}) + \frac{x_2}{E}(-\nu b_{11} + b_{22} - \nu b_{33}) \end{aligned}$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$\varepsilon_{11} = x_1 \frac{-\nu g}{E}(1+\nu)(\rho - 2\rho_e) + x_2 \frac{g}{E}(1+\nu)(\nu\rho - \rho_e)$$

$$\varepsilon_{12} = -x_1 \rho_e g \frac{1+\nu}{E}$$

$$\varepsilon_{22} = x_1 \frac{g}{E}(1-\nu^2)(\rho - 2\rho_e) + x_2 \frac{g}{E}[\rho(\nu^2 - 1) + \rho_e(1+\nu)]$$

Le champ de déformation est donc lui aussi entièrement défini.

6. La seule contrainte tangentielle non nulle est la contrainte σ_{12} , et cette contrainte augmente (en valeur absolue) proportionnellement avec la coordonnée x_1 . Elle est donc maximale (en valeur absolue) au point B, où elle vaut :

$$\sigma_{12} = -\rho_e g h$$