



**POLYTECH**  
GRENOBLE

# **Mécanique des milieux continus**

***Séance 9 : Elastoplasticité***

**Guilhem MOLLON**

**GEO3 2012-2013**

## **Plan de la séance**

### **A. Comportement des solides réels**

1. Observation expérimentale
2. Notion de limite élastique
3. Représentation graphique

### **B. Exemples de critères de plasticité**

1. Critère de Rankine
2. Critère de Tresca
3. Critère de Von Mises
4. Critère de Mohr-Coulomb

## **Séance 9**

### **A. Comportement des solides réels**

## A. Comportement des solides réels

### 1. Observation expérimentale

Beaucoup de matériaux solides réels ont un **comportement élastique linéaire isotrope** identique à celui décrit dans les cours précédents, mais seulement dans un **domaine de contraintes donné**.

Considérons une éprouvette de matériau réel (par exemple de l'acier), que l'on soumet à un essai de traction pure, soit à un tenseur des contraintes de la forme suivante :

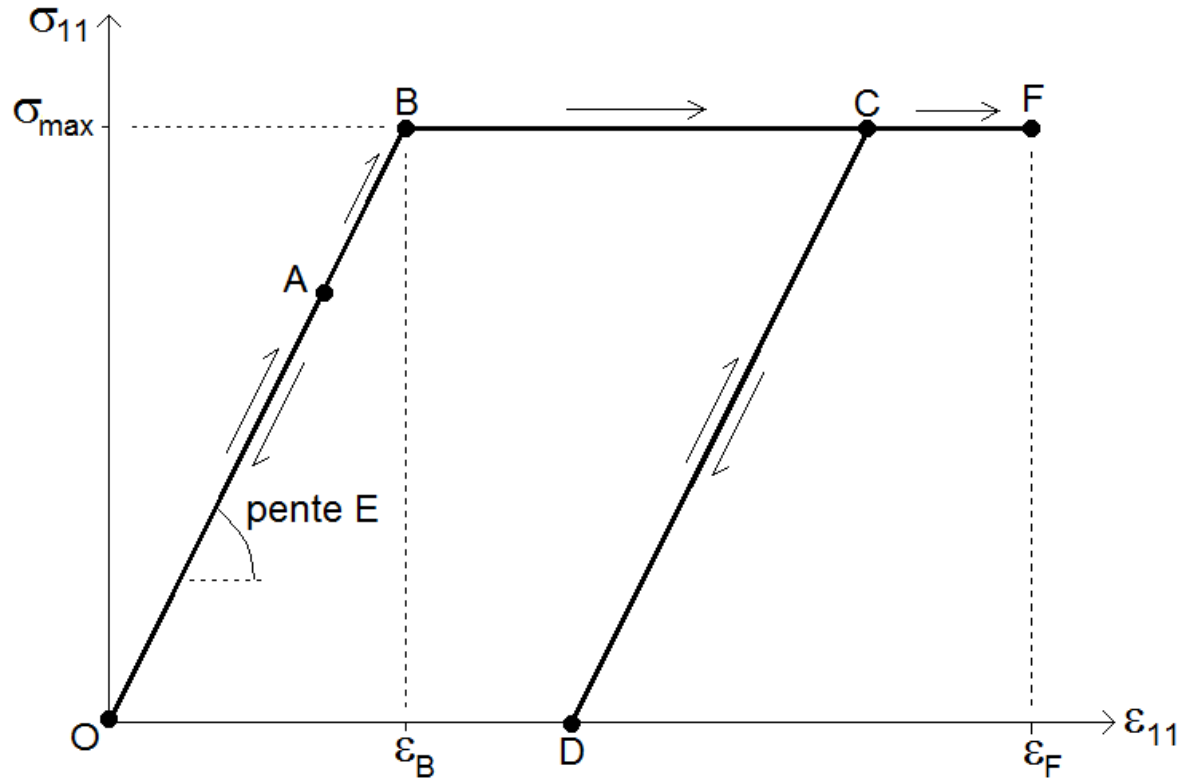
$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On **augmente progressivement** la contrainte  $\sigma_{11}$ , qui est la seule non-nulle, et on **observe la réponse du matériau en déformation axiale**.

## A. Comportement des solides réels

### 1. Observation expérimentale

Une éprouvette d'acier va présenter le **comportement suivant**, et c'est également le cas de très nombreux autres matériaux :



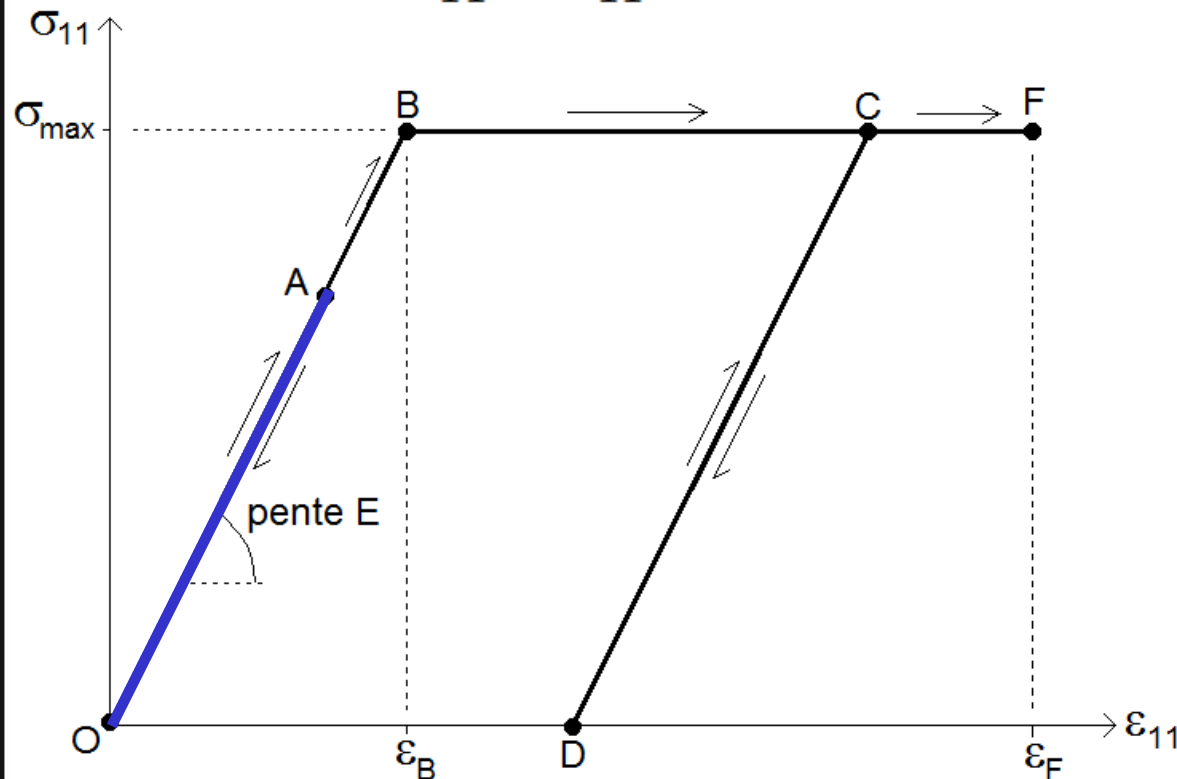
On va détailler les différentes parties de ce graphique.

## A. Comportement des solides réels

### 1. Observation expérimentale

Pour les **faibles valeurs de la contrainte** imposée, toutes les hypothèses du **comportement élastique linéaire isotrope** sont vérifiées, et on obtient directement la **déformation axiale** en appliquant la **loi de Hooke** :

$$\varepsilon_{11} = \sigma_{11}/E$$



Dans ce cas, on a donc une proportionnalité entre contraintes et déformations, et on dit qu'on est dans le **domaine élastique**.

En particulier, on peut **relâcher la contrainte** appliquée, et la déformation va s'annuler pour **retourner à l'état initial** (point O).

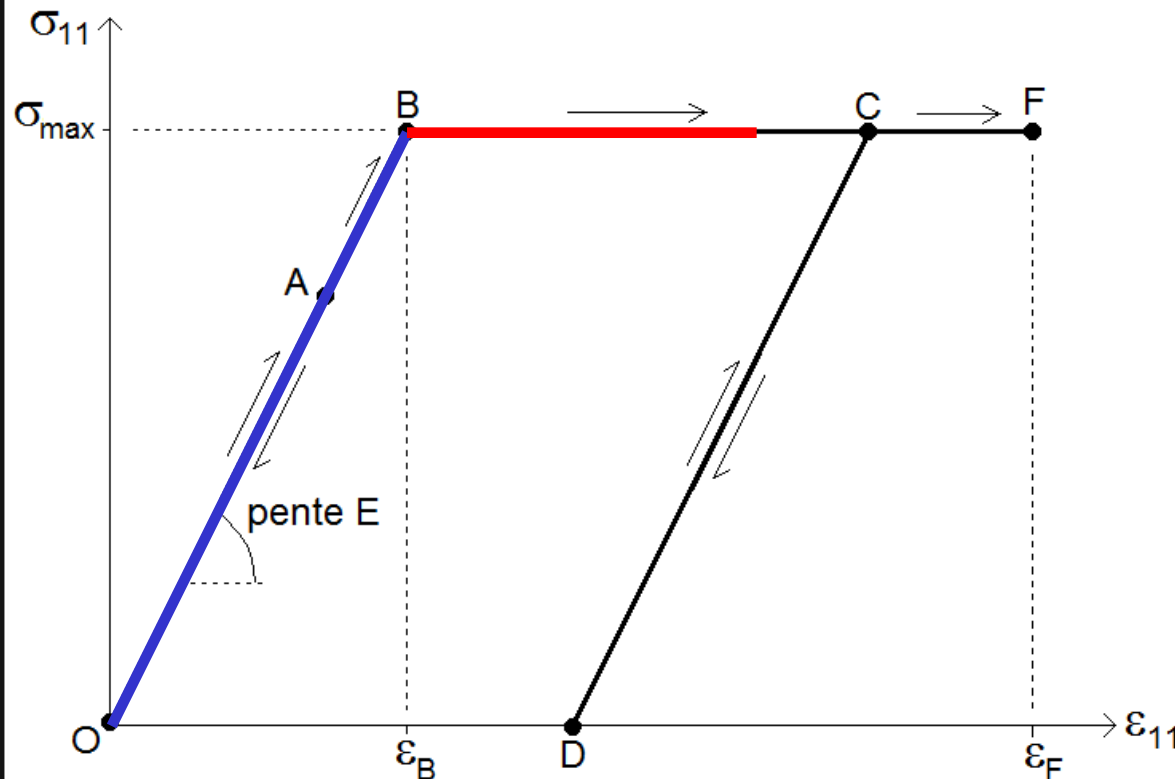
On dit que l'élasticité est un **état réversible**.

## A. Comportement des solides réels

1. Observation expérimentale

Si on **continue à augmenter** la contrainte appliquée au matériau, on va atteindre un **changement de comportement**, correspondant au point B.

Ce point correspond à une **valeur maximale de la contrainte supportable** par le matériau, notée  $\sigma_{max}$ , et qui s'atteint pour une **valeur de déformation**  $\epsilon_B = \sigma_{max}/E$



Au-delà du point B, **il n'est plus possible d'augmenter la contrainte appliquée au matériau**, car celui-ci n'est plus capable de « répondre » à cette sollicitation.

Il va alors se **déformer de manière continue sous une contrainte constante : il entre en plasticité.**



## A. Comportement des solides réels

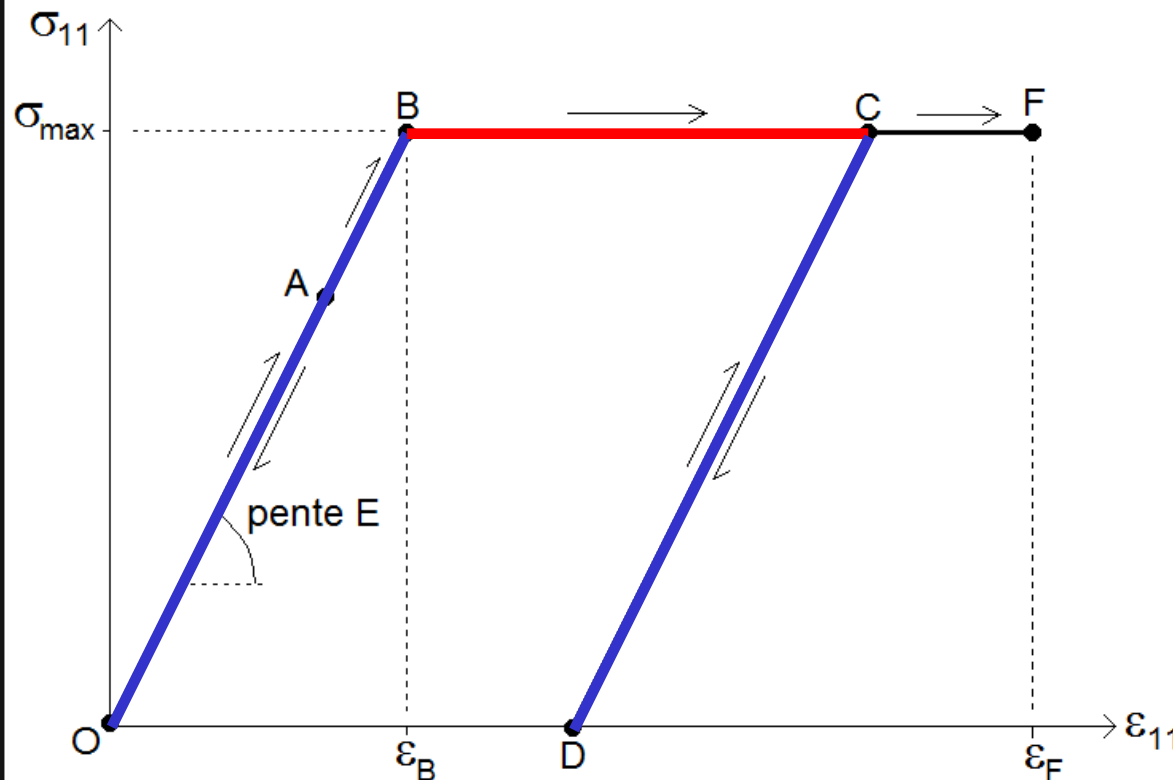
### 1. Observation expérimentale

Lorsqu'on est **sur le palier de plasticité**, on n'est **pas encore tout à fait à la rupture** du matériau. Au point C, par exemple, il est encore possible de **décharger l'éprouvette** (de réduire la contrainte  $\sigma_{11}$ ).

Dans la plupart des matériaux, on retrouve alors un comportement élastique.

La seule différence est que l'on a **déplacé le point de contrainte nulle** : même lorsqu'on a totalement déchargé, il reste un déplacement non-nul. On appelle ce phénomène **l'écrouissage**.

La plastification d'un matériau correspond donc à l'apparition de déformations permanentes. On dit que **la plasticité est un comportement irréversible**.



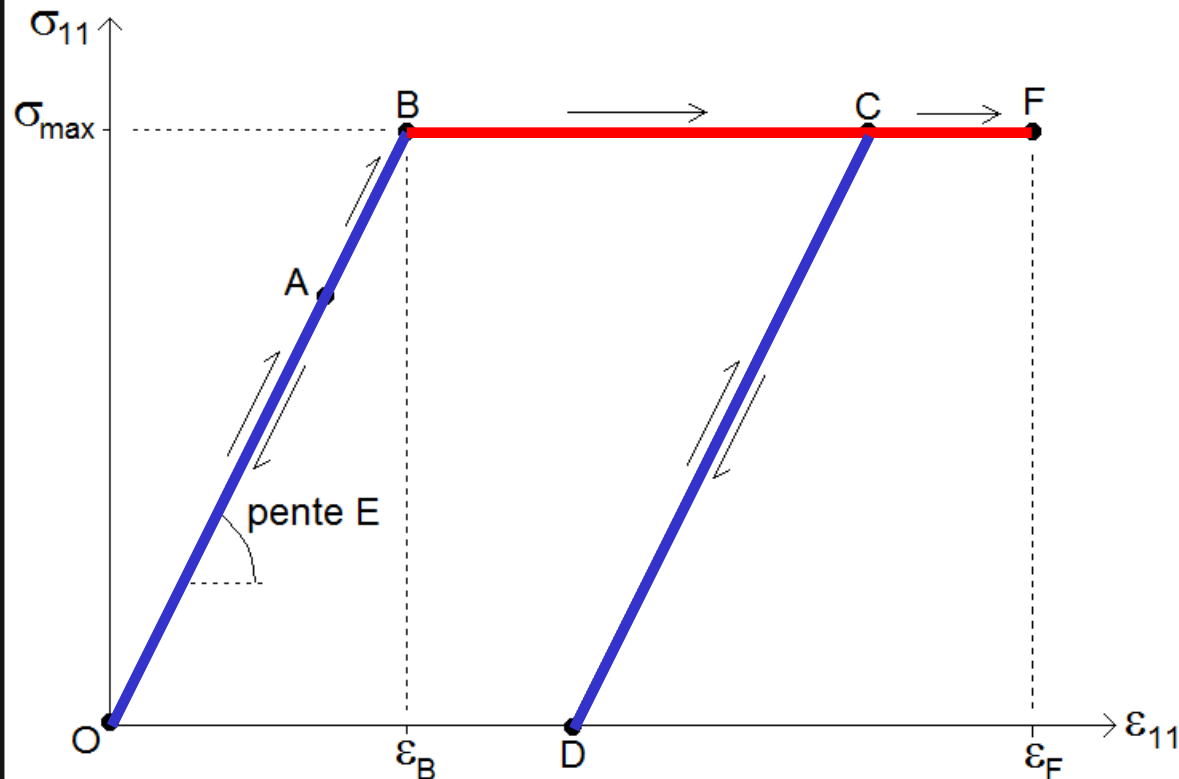


## A. Comportement des solides réels

### 1. Observation expérimentale

Si on recommence à charger, on va suivre le **comportement élastique**, puis atteindre de nouveau le **palier de plasticité** au point C, et retrouver un écoulement plastique.

Si par la suite on atteint des niveaux de **déformation suffisamment élevés**, on atteindra finalement la **rupture** du matériau au point F, pour une déformation  $\epsilon_F$ .

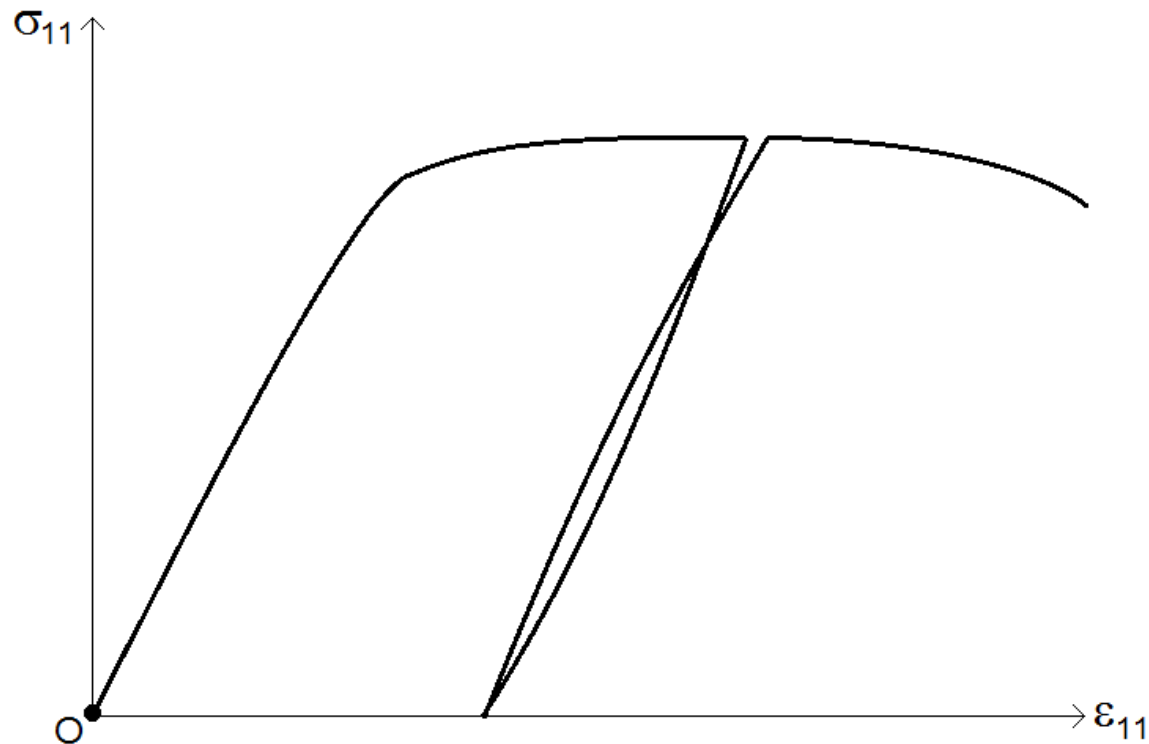


## A. Comportement des solides réels

### 1. Observation expérimentale

Il faut garder à l'esprit que le comportement que l'on a décrit reste une **modélisation de la réalité**, que l'on appelle généralement l'**élastoplasticité parfaite**.

Si on conduit une **expérience réelle** sur un matériau simple, avec un peu de chance le comportement de l'éprouvette aura l'allure suivante :



## A. Comportement des solides réels

### 2. Notion de limite élastique

Selon les contextes, la plastification est **parfois souhaitée, et parfois redoutée.**

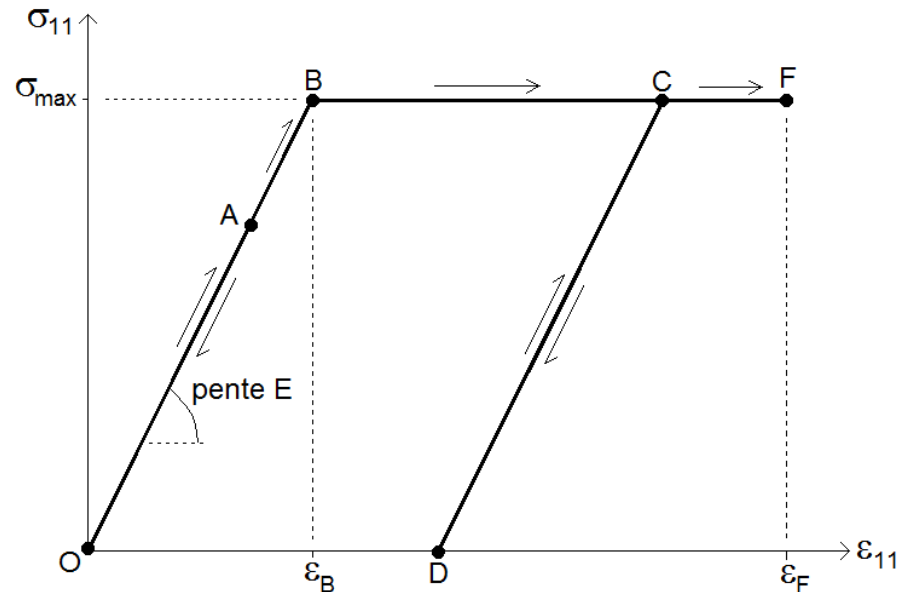
Dans tous les contextes, **la plastification être contrôlée.**



## A. Comportement des solides réels

### 2. Notion de limite élastique

Le meilleur moyen de contrôler la plastification d'un matériau est de savoir à partir de quelle contrainte celui-ci va entrer en plasticité. On va chercher à **localiser le point B**, ou plutôt à connaître la valeur de la contrainte  $\sigma_{max}$ .



On va donc devoir définir ce qu'on appelle une **limite élastique**, aussi appelée **critère de plasticité**. Ce critère déterminera si, **pour une contrainte donnée**, on est dans le domaine **élastique ou plastique**.

## A. Comportement des solides réels

### 2. Notion de limite élastique

Le critère de plasticité est une fonction de l'état de contrainte, on peut donc l'écrire de manière générale sous la forme suivante :

$$f(\bar{\sigma})$$

Par ailleurs, il doit permettre de définir si on est dans le domaine élastique ou plastique. **En un point donné et à un instant donné**, on utilisera de manière conventionnelle la méthode suivante :

-Si  $f(\bar{\sigma}) < 0$  , le matériau est dans le **domaine élastique**

-Si  $f(\bar{\sigma}) = 0$  , le matériau est dans le **domaine plastique**

-  $f(\bar{\sigma}) > 0$  correspond à une **impossibilité physique**

A un instant donné, on peut donc tout à fait être à l'état élastique dans une certaine partie du système et à l'état plastique dans une autre partie. C'est ce qui fait la difficulté majeure de l'élastoplasticité.



## A. Comportement des solides réels

### 2. Notion de limite élastique

La limite élastique est donc une fonction mathématique de l'état de contrainte. Cette fonction dépend très largement du matériau considéré, et peut prendre des formes très variées.

Dans un matériau **isotrope**, le critère de plasticité doit être le même **dans toutes les directions**.

La fonction  $f(\bar{\sigma})$  doit donc être **invariante par rotation**, et on peut la réécrire en fonction des seuls invariants du tenseur de contrainte :

$$f(\bar{\sigma}) = f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \sigma_I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{tr}(\bar{\sigma}) \\ \sigma_{II} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 = \text{tr}(\bar{\sigma})^2 - \text{tr}(\bar{\sigma}^2) \\ \sigma_{III} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \det(\bar{\sigma}) \end{cases}$$

La plupart du temps, on l'écrira néanmoins **en fonction des contraintes principales** :

$$f(\bar{\sigma}) = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

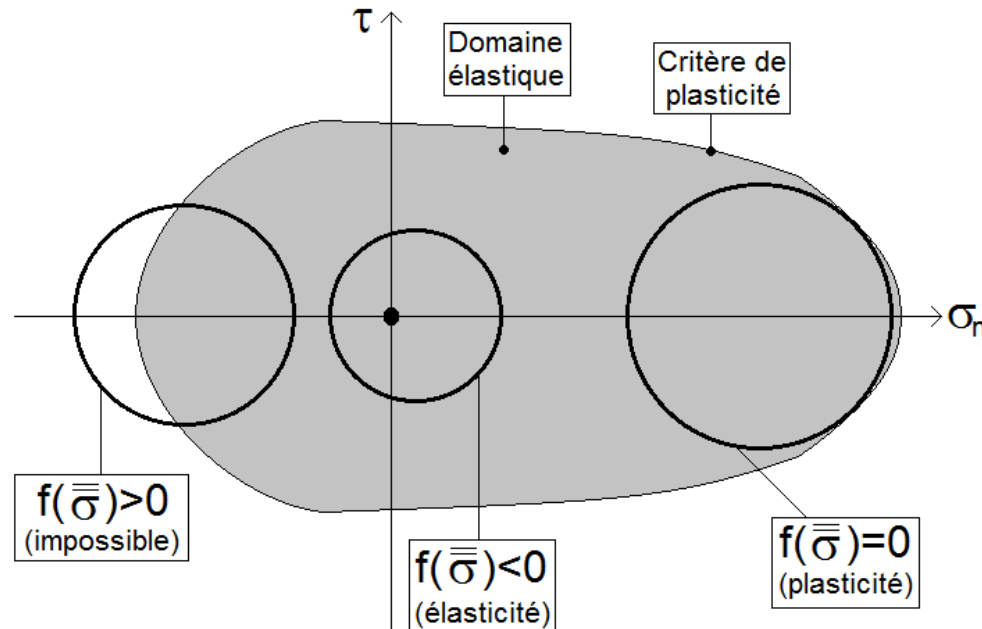
## A. Comportement des solides réels

### 3. Représentation graphique

Les différents états de contraintes pour lesquels un matériau donné est à l'état élastique forment un sous-domaine de l'espace des contraintes, que l'on appelle domaine élastique et qui est défini par :

$$f(\bar{\sigma}) < 0$$

Pour un état de contrainte donné, on est à l'état élastique ou plastique selon qu'on est à l'intérieur ou à l'extérieur de ce domaine. On a donc coutume de représenter graphiquement un tel domaine dans le **plan de Mohr**.





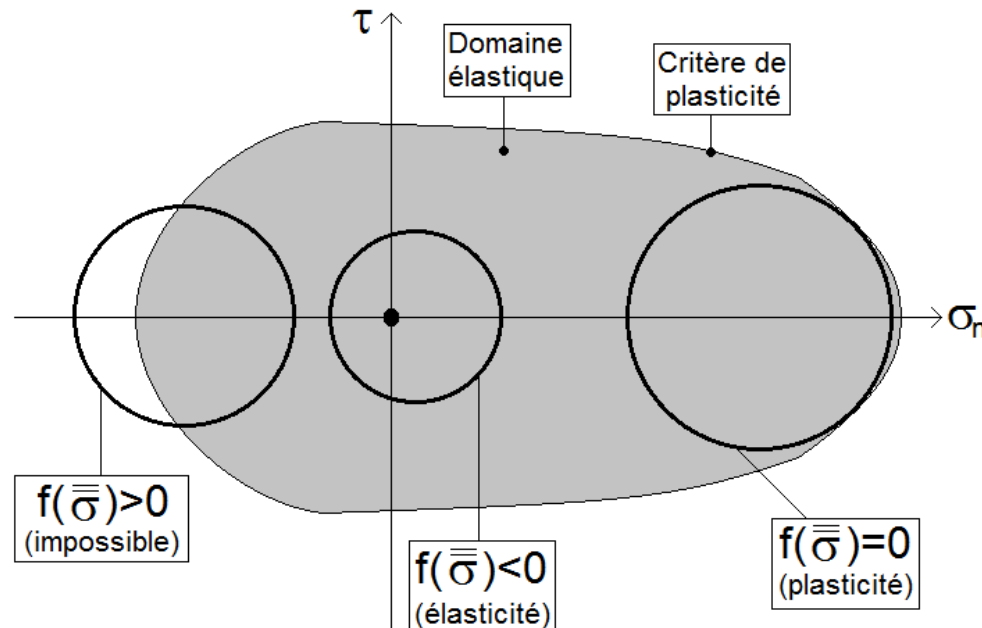
## A. Comportement des solides réels

### 3. Représentation graphique

Selon cette représentation, un **état de contrainte** est défini par un **tricerclle de Mohr**, et en particulier par le grand cercle de Mohr (correspondant au plan de cisaillement maximal).

**Un état de contrainte donné correspondra à de l'élasticité si et seulement si la totalité du tricerclle de Mohr qui lui correspond est strictement à l'intérieur du domaine élastique.**

Si c'est le cas, on ne plastifie sur aucune facette, c'est-à-dire en aucun point du tricerclle.

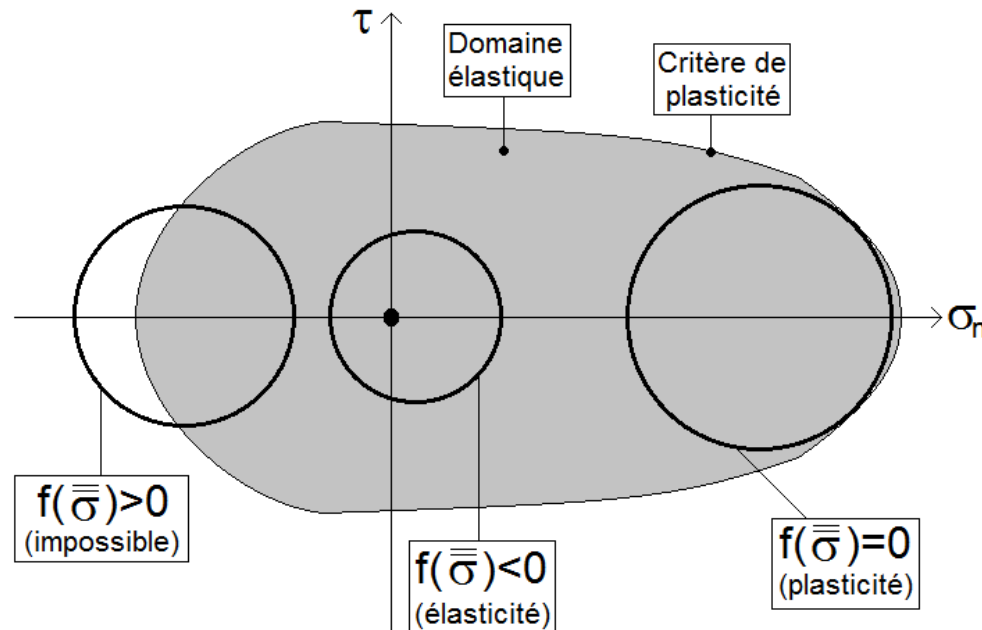


## A. Comportement des solides réels

### 3. Représentation graphique

Le domaine élastique correspond alors à une surface du plan de Mohr, qui doit respecter les conditions suivantes :

- le domaine élastique contient l'**origine**
- le domaine élastique est **convexe**
- le domaine élastique est **symétrique par rapport à l'axe horizontal**



## A. Comportement des solides réels

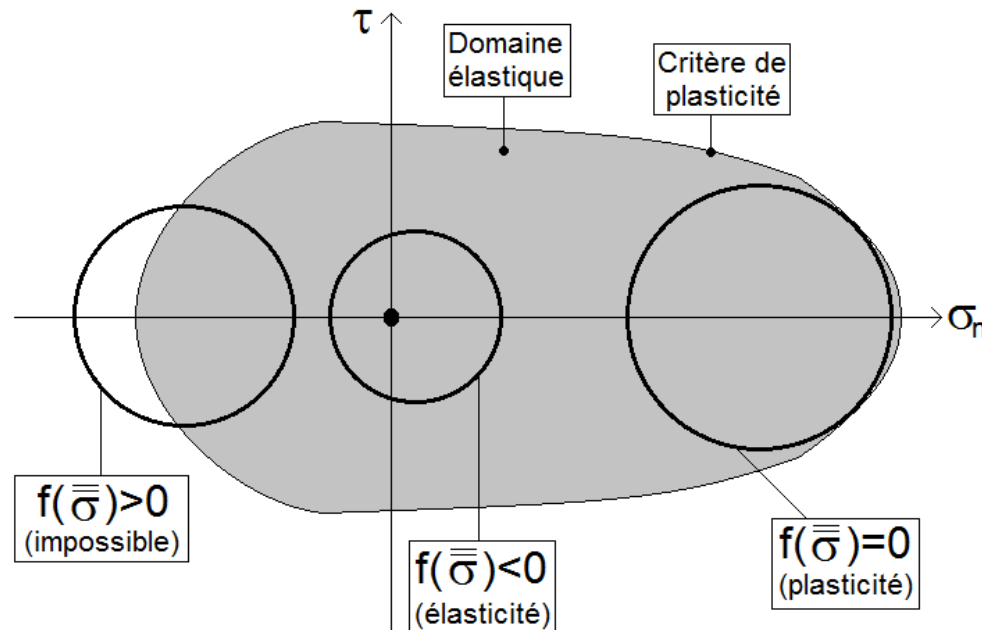
### 3. Représentation graphique

Selon ces définitions, on peut alors dire que :

-un cercle compris **entièrement à l'intérieur du domaine** correspond à de l'**élasticité**

-un cercle **tangent à la limite du domaine** correspond à de la **plasticité**

-un cercle **ne peut pas « sortir » du domaine**, car cela correspondrait à des contraintes que le matériau ne pourrait pas reprendre



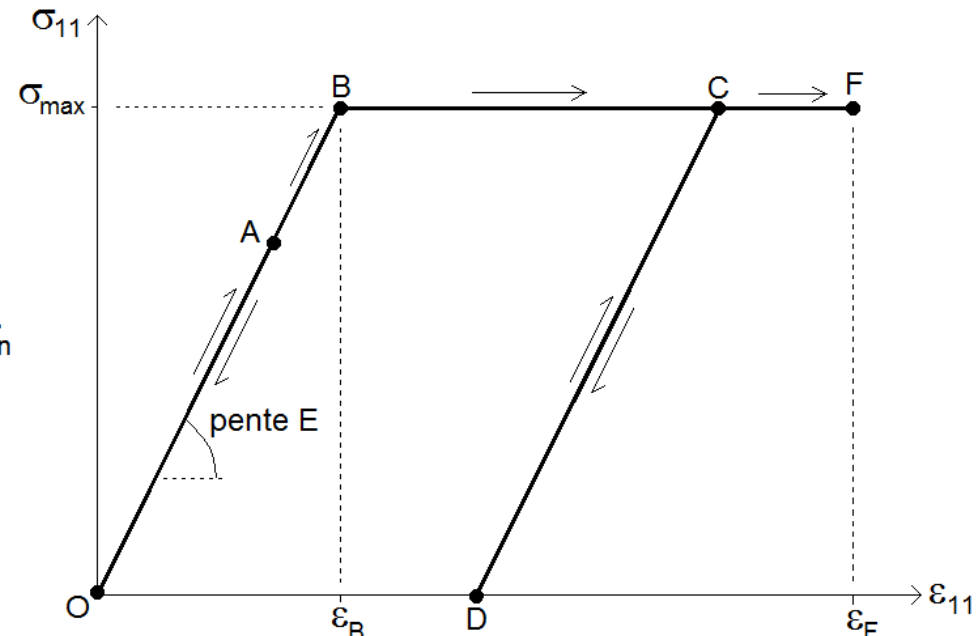
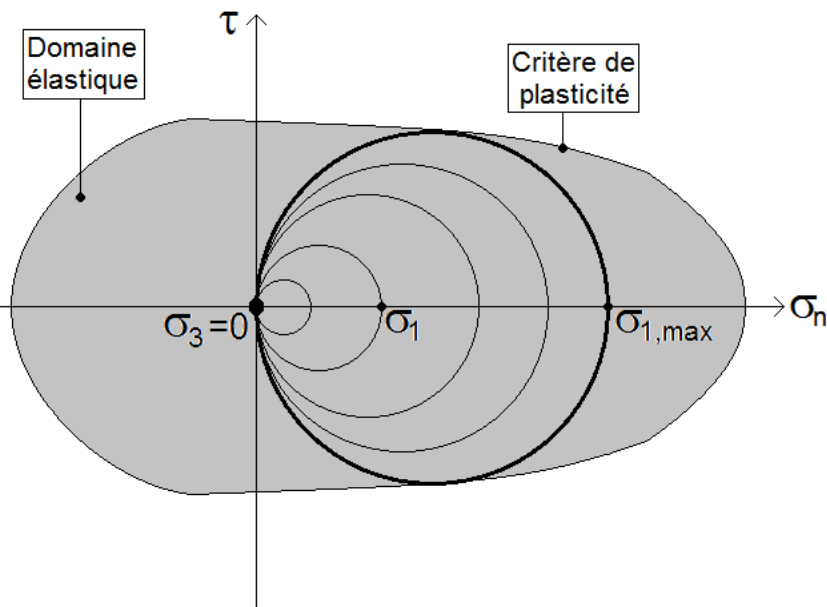
## A. Comportement des solides réels

### 3. Représentation graphique

Reprenons l'expérience de début de cours : chargeons une éprouvette en **traction pure** selon le tenseur de contraintes suivant :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les deux autres contraintes principales sont nulles :  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

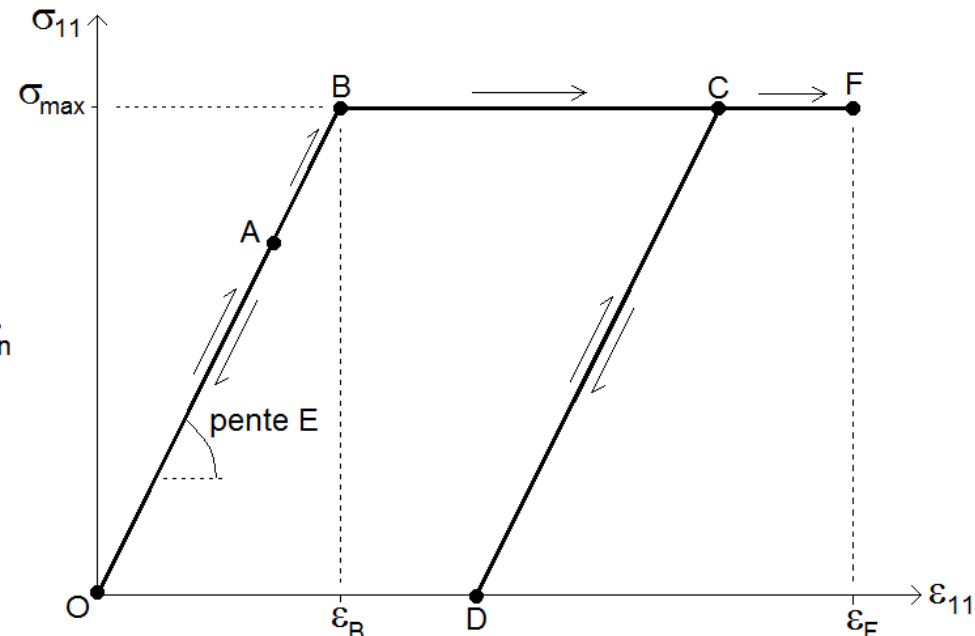
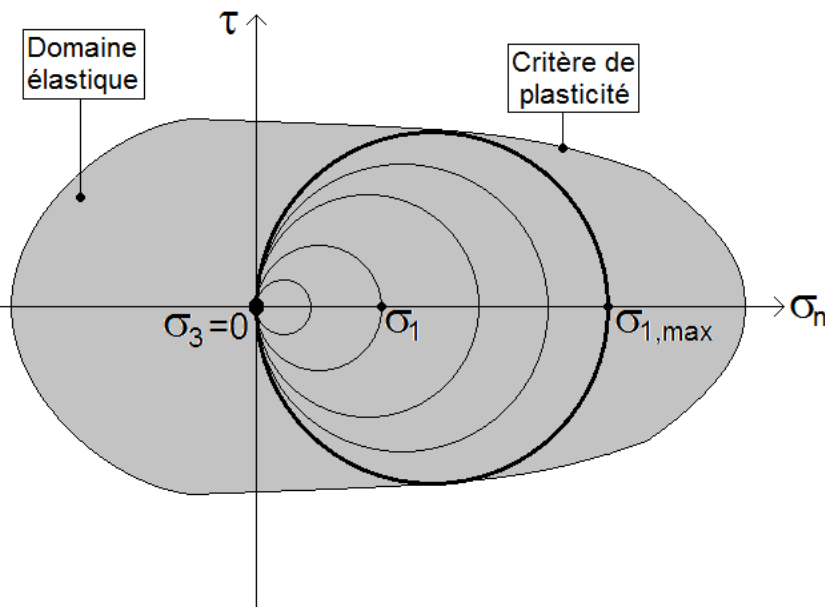


## A. Comportement des solides réels

### 3. Représentation graphique

Par conséquent, pour **chacun des points A de la droite élastique**, on peut définir le **grand cercle de Mohr** correspondant dans le plan de Mohr, et celui-ci est tangent à l'axe vertical (car  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ). Plus la contrainte est élevée, plus le cercle est grand.

Lorsque le cercle est suffisamment grand pour être tangent au critère de plasticité dans le plan de Mohr, ça signifie qu'il y a exactement deux facettes (les deux points de tangence) pour lesquelles on a  $f(\bar{\sigma}) = 0$ .



## A. Comportement des solides réels

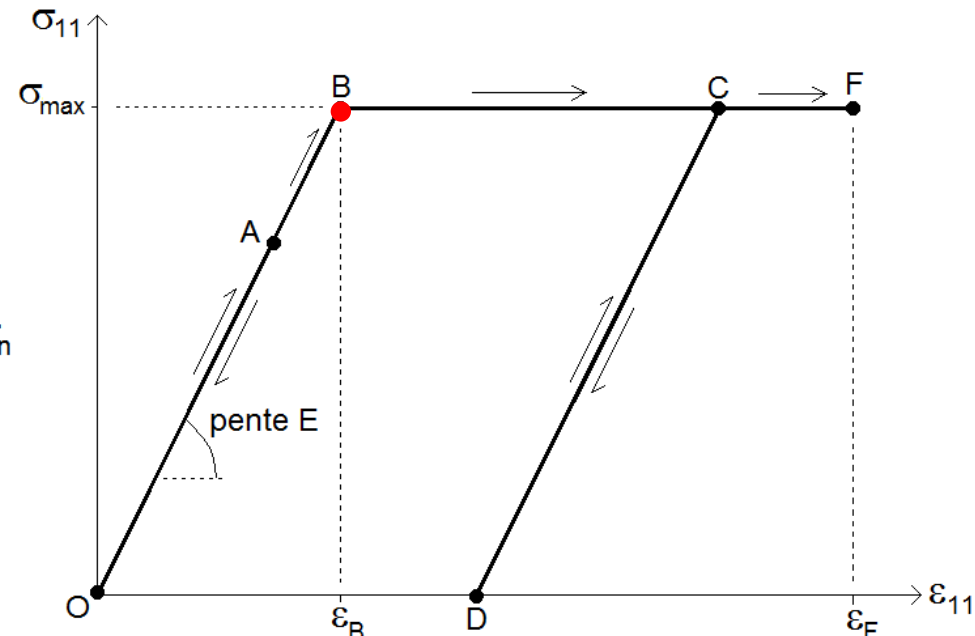
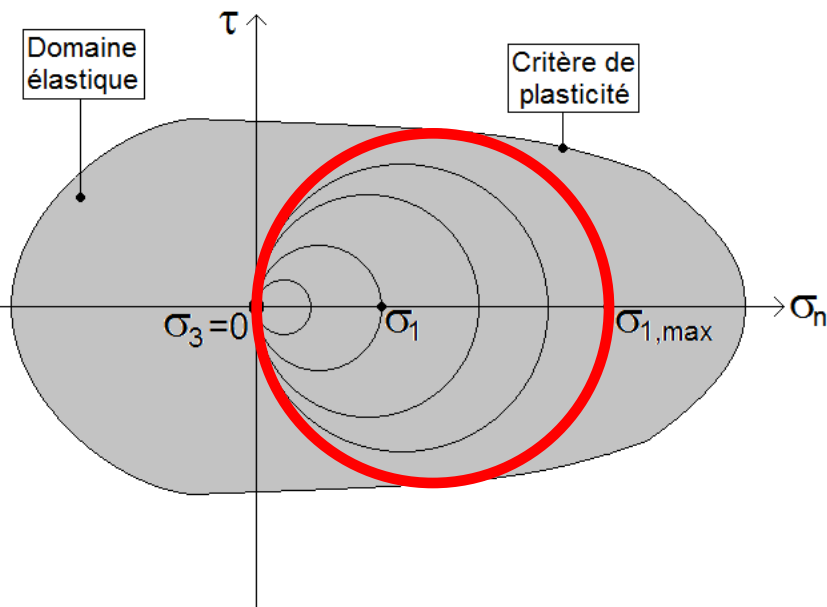
### 3. Représentation graphique

Dans ce cas, le matériau **entre en plastification** :

-> on ne peut plus faire encaisser de contraintes supérieures au matériau

-> on ne peut pas construire de tricerple de Mohr plus grand sans sortir du domaine élastique

-> on a donc atteint le **point B**, qui marque le début du pallier de plasticité.





## A. Comportement des solides réels

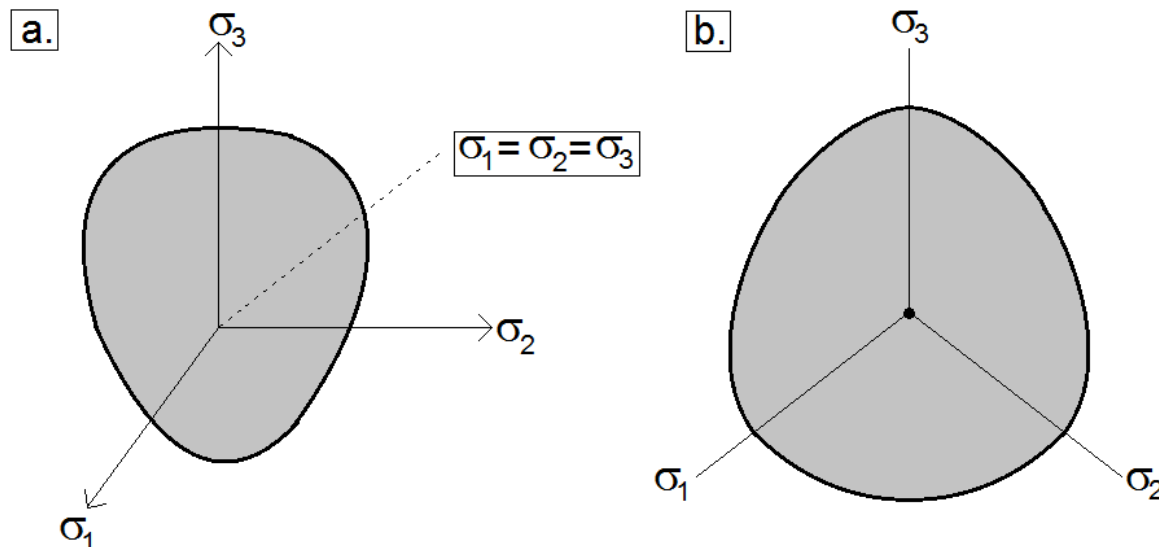
### 3. Représentation graphique

Cette représentation n'est en fait **valable que pour une classe particulière de critères de plasticité**, ceux qui peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$f(\bar{\sigma}) = f(\sigma_1, \sigma_3)$$

Ces critères ne font pas intervenir la contrainte principale intermédiaire, c'est pourquoi on peut les définir uniquement par le **grand cercle de Mohr**. Ils sont très répandus, notamment en mécanique des sols, car ils sont suffisants pour faire apparaître le cisaillement maximal.

**Or le cisaillement est souvent à l'origine de la plasticité.**



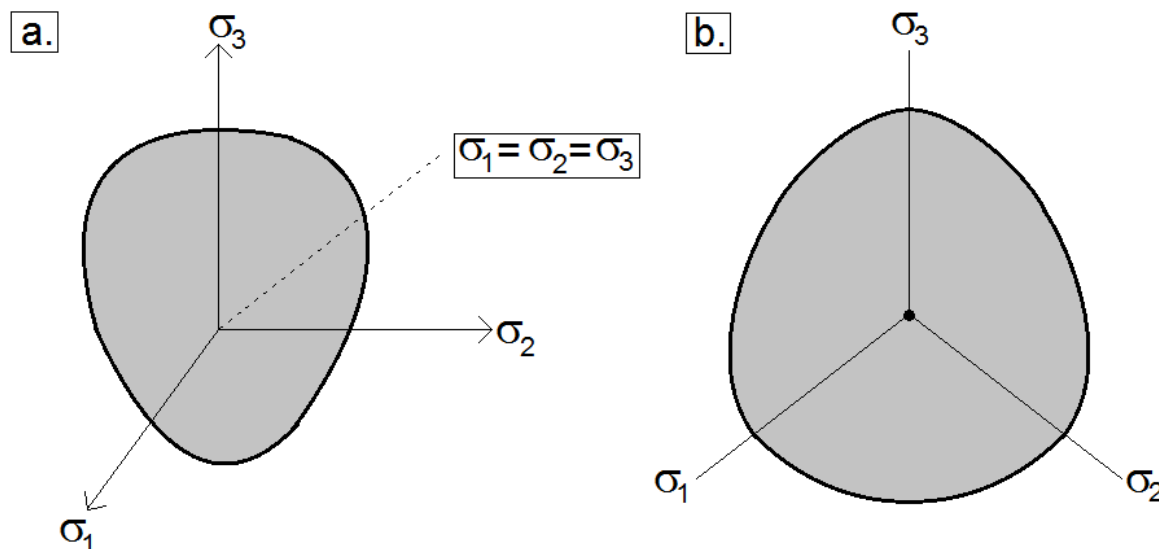


## A. Comportement des solides réels

### 3. Représentation graphique

Dans le cas le plus général des critères qui s'écrivent  $f(\bar{\sigma}) = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , on est obligé d'utiliser une **représentation tridimensionnelle du domaine élastique dans l'espace des trois contraintes principales**.

On a également coutume de représenter ce domaine par sa projection selon l'axe défini par l'équation  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , que l'on appelle **axe méridien**.



## Séance 9

### **B. Exemples de critères de plasticité**

## B. Exemples de critères de plasticité

### 1. Critère de Rankine

**Le critère de plasticité de Rankine** porte sur les contraintes maximales de **traction et de compression** que peut supporter un matériau.

On obtient ces contraintes en soumettant le matériau à un **essai de traction pure** jusqu'à la plasticité (on obtient la **contrainte de traction maximale**  $\sigma_e$ ), puis en le soumettant à un **essai de compression pure** jusqu'à la plasticité (on obtient la **contrainte de compression maximale**  $\sigma'_e$ ).

Le critère de Rankine s'énonce alors mathématiquement par l'expression suivante :

$$f(\bar{\sigma}) = \max\{(\sigma_1 - \sigma_e); (\sigma'_e - \sigma_3)\}$$

Il apparaît bien que le scalaire  $f(\bar{\sigma})$  est **strictement négatif** lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- la contrainte principale maximale est inférieure à la contrainte de traction admissible
- la contrainte principale minimale est supérieure à la contrainte de compression admissible

## B. Exemples de critères de plasticité

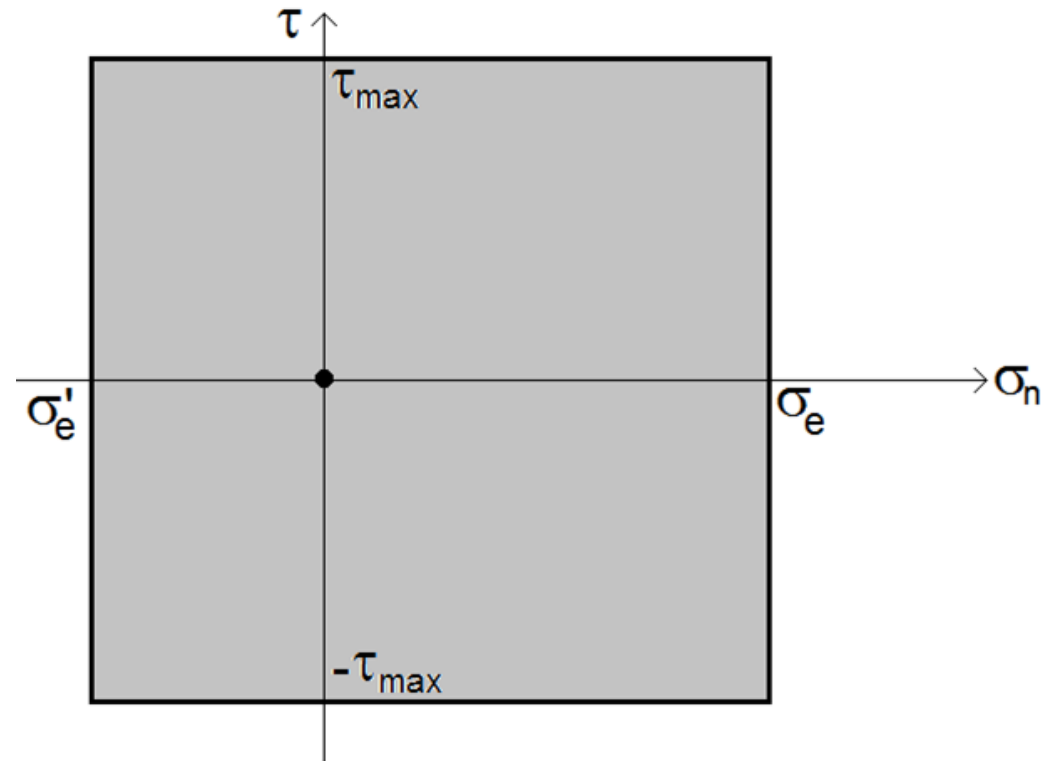
### 1. Critère de Rankine

Bien que n'ayant été défini que par les limites inférieure et supérieure de la contrainte normale, le critère de Rankine permet également de **faire apparaître la contrainte de cisaillement maximal** :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_e - \sigma'_e}{2}$$

Sur les matériaux réels, il est très **rare de retrouver expérimentalement cette valeur** par un essai de cisaillement. Le critère de Rankine est donc très imprécis.

Son avantage principal est qu'il permet d'introduire une **asymétrie entre traction et compression**.



$$f(\bar{\sigma}) = \max\{(\sigma_1 - \sigma_e); (\sigma'_e - \sigma_3)\}$$

## B. Exemples de critères de plasticité

### 2. Critère de Tresca

**Le critère de Tresca** est le critère opposé au précédent : il ne s'intéresse qu'à la **valeur maximale de la contrainte de cisaillement**  $\tau_e$  que le matériau peut reprendre.

Cette valeur peut s'obtenir expérimentalement par un essai de cisaillement direct (boite de Casagrande), par un essai triaxial, par un essai de torsion, etc.

Sa formulation mathématique est :

$$f(\bar{\sigma}) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \tau_e$$

Dans cette expression, on reconnaît la valeur de la **contrainte de cisaillement maximale** existant en un point :

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Pour rester en élasticité, il faut donc que cette valeur reste inférieure à la limite  $\tau_e$ .

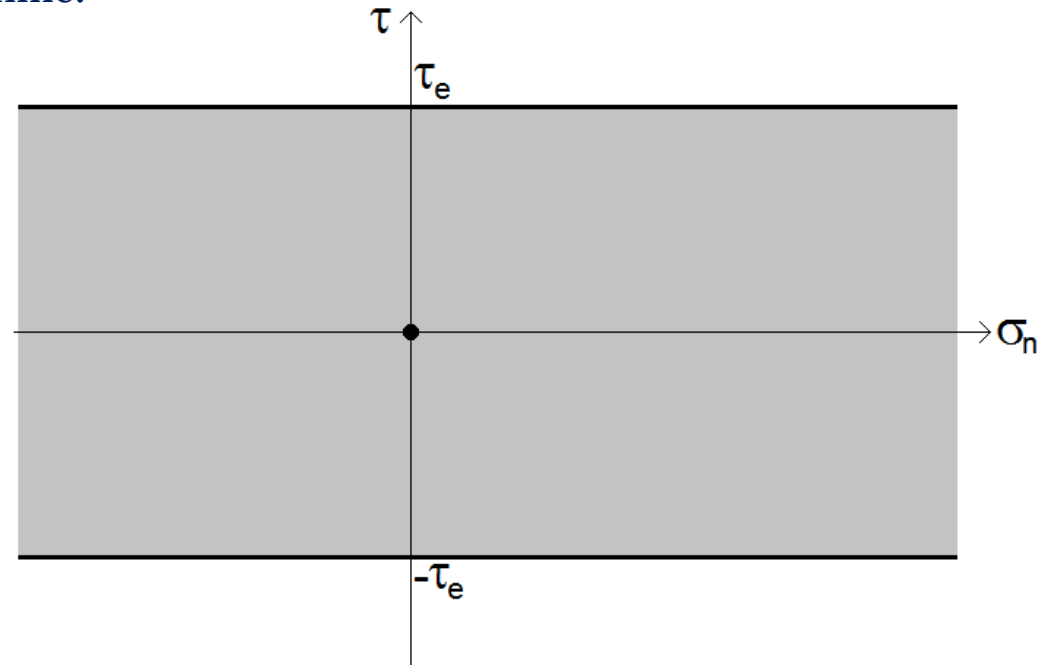
## B. Exemples de critères de plasticité

### 2. Critère de Tresca

Graphiquement, le critère de Tresca est défini par **deux lignes parallèles horizontales**. On observe que le **domaine élastique est infini dans la direction horizontale**. Par conséquent, selon ce critère, le milieu ne peut pas plastifier sous l'effet d'une traction ou d'une compression isotrope, même d'intensité infinie.

On utilise donc uniquement ce critère sur des matériaux soumis à du cisaillement, ou alors on le restreint avec un critère de Rankine.

**C'est un critère très répandu en mécanique des sols, car il décrit très bien le comportement en cisaillement d'une argile saturée et non drainée.**



$$f(\bar{\sigma}) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \tau_e$$



## B. Exemples de critères de plasticité

### 3. Critère de Von Mises

**Le critère de Von Mises** suppose que la plasticité est due à la partie purement déviatorique du tenseur des contraintes.

Il ne fait intervenir qu'un seul paramètre noté  $\sigma_e$ , qui dépend du matériau et qui peut s'obtenir par toute sorte d'essai mécanique expérimental.

Sa formulation mathématique est donnée par :

$$f(\bar{\sigma}) = \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] - \sigma_e^2$$

Sa formulation fait intervenir **les trois contraintes principales**, et pas seulement les deux contraintes principales extrêmes. Il est donc **impossible de le représenter dans le plan de Mohr** à cause de la présence de  $\sigma_2$ .



## B. Exemples de critères de plasticité

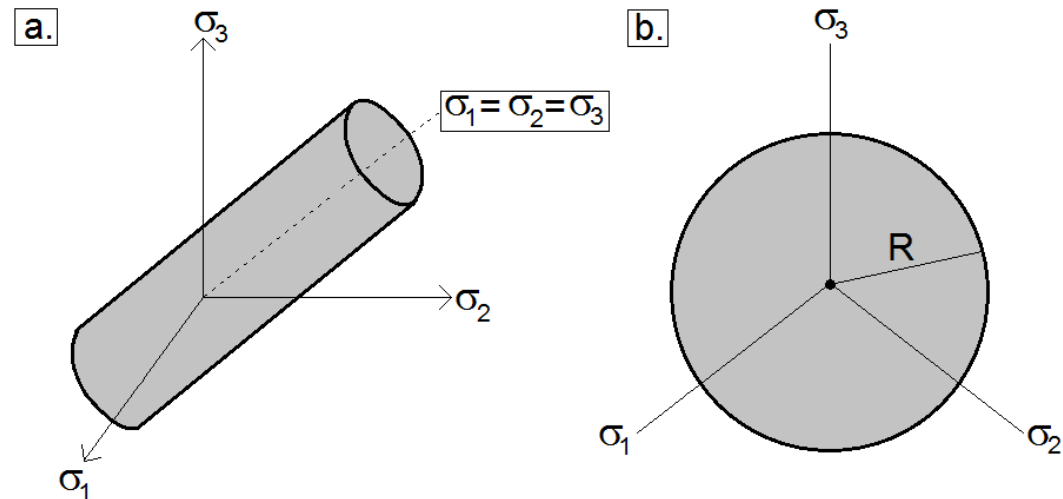
### 3. Critère de Von Mises

Dans l'espace abstrait des contraintes principales, le critère de Von Mises définit un domaine élastique de forme cylindrique. En projection selon la direction méridienne, il est défini par un cercle de rayon :

$$R = \sigma_e \sqrt{2}$$

Comme le critère de Tresca, il souffre du fait qu'il n'est pas limité en traction et compression hydrostatique.

**Malgré sa complexité, ce critère est très utilisé car il reproduit fidèlement le comportement des métaux**



$$f(\bar{\sigma}) = \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] - \sigma_e^2$$

## B. Exemples de critères de plasticité

### 4. Critère de Mohr-Coulomb

**Le critère de Mohr-Coulomb** dépend de deux paramètres :

-le premier est noté  $\varphi$  et s'exprime en degrés. Il s'agit de **l'angle de frottement interne du matériau**

-le second est noté  $c$  et s'exprime en kPa. Il s'agit de **la cohésion**.

L'expression mathématique de ce critère est donnée par :

$$f(\bar{\sigma}) = \sigma_1(1 + \sin\varphi) - \sigma_3(1 + \sin\varphi) - 2c \cdot \cos\varphi$$

Le critère de Mohr-Coulomb est une **généralisation de la notion de frottement de Coulomb**, étendue à l'intérieur d'un matériau granulaire.

Ce critère ne fait pas intervenir la contrainte principale intermédiaire, on peut donc le représenter dans le plan de Mohr.



**Charles-Augustin  
Coulomb  
1736-1806**

## B. Exemples de critères de plasticité

### 4. Critère de Mohr-Coulomb

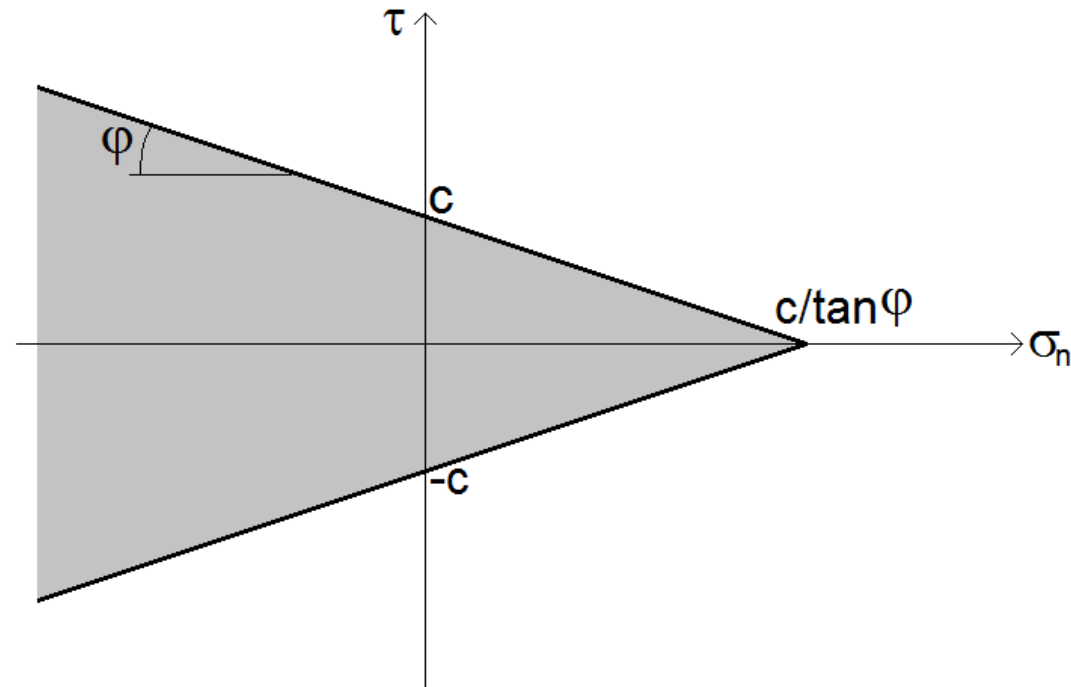
Graphiquement le critère se représente par deux droites inclinées. Ces droites ont des coefficients directeurs égaux à  $\pm \tan \varphi$  et des ordonnées à l'origine égales à  $\pm c$ .

Il est nécessaire d'effectuer deux essais expérimentaux de cisaillement pour déterminer les deux paramètres.

Si la **cohésion est nulle**, on dit que le matériau est **pulvérulent**.

Si l'**angle de frottement est nul**, on retrouve le **critère de Tresca**.

**Le critère de Mohr-Coulomb est le critère royal des milieux granulaires.**



$$f(\bar{\sigma}) = \sigma_1(1 + \sin \varphi) - \sigma_3(1 + \sin \varphi) - 2c \cdot \cos \varphi$$