Mécanique des milieux continus

Séance 8 : Le problème élastique

Guilhem MOLLON

GEO3 2012-2013

Plan de la séance

A. Equations constitutives

1. Introduction
2. Equations
3. Fermeture du problème

B. Résolution analytique

C. Théorème de superposition

D. Problèmes plans

1. Déformations planes
2. Contraintes plane

A. Equations constitutives

A. Equations constitutives

Depuis le début du cours de MMC, on a introduit plusieurs équations de différents types, faisant intervenir différentes grandeurs, liées à différentes hypothèses, etc.

On va les récapituler afin de formuler de manière rigoureuse les données d'un problème de MMC type, fondé sur l'élasticité linéaire et isotrope.

Les équations posées sont de différents types :

- **Equations cinématiques**
- **Equations d'équilibre**
- **Equations de comportement**

Elles peuvent également s'appliquer en différents lieux :

- **Equations de volume**
- **Equations de surface**

A. Equations constitutives

Les hypothèses les plus importantes du problème élastique sont les suivantes :

-Elasticité linéaire isotrope

-Hypothèse des petites perturbations

On en déduit que le champ de déplacement est très faible devant les dimensions du système étudié, et que les vecteurs position initiale $\vec{X}$ et position actuelle $\vec{x}$ sont quasi-confondus.

A cela, on ajoute deux axiomes importants de la théorie :

-Principe de conservation de la masse

-Principe fondamental de la dynamique

On va traduire toutes ces données en langage mathématique, **sur un domaine** D **de surface extérieure** S . Du fait de l'HPP, D et S sont supposés quasi-indépendants du temps.

A. Equations constitutives

La première **équation cinématique** est celle qui relie déplacements et déformations :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{grad}}\,\vec{U} + \left(\overline{\overline{grad}}\,\vec{U}\right)^T\right)\ sur\ D$$

On l'appelle **équation de compatibilité** (Chapitres **3** et **4**)

Elle est valable en tout point du domaine D .

A. Equations constitutives

La deuxième **équation cinématique** est une équation de surface :

$$\vec{U} = \overrightarrow{U_D} \; sur \; S_U$$

Cette équation fait apparaître deux nouveaux termes :

- **S_U est une partie de S, la surface extérieure au domaine D.**
- **$\overrightarrow{U_D}$ est un déplacement imposé au milieu en un point donné de S_U.**

Il s'agit d'une **condition aux limites cinématique, ou condition aux limites en déplacement**. Elle impose donc que le champ de déplacement dans le milieu est compatible avec certaines valeurs qui sont imposées sur ses limites extérieures.

Généralement, le déplacement imposé $\overrightarrow{U_D}$ est **une des données** du problème à résoudre.

A. Equations constitutives

Outre les équations cinématiques, on a également des **équations d'équilibre**.

La plus importante d'entre-elles est la **forme locale du principe fondamental de la dynamique** (Chapitre **5**).

$$\overrightarrow{div}\ \bar{\bar{\sigma}} + \vec{g} = \vec{0}\ sur\ D$$

Cette forme locale fait implicitement intervenir le principe de conservation de la masse.

Il faut préciser que, sous cette forme, le PFD **représente un équilibre statique** (car le **terme d'accélération est égal à zéro**). Il représente donc l'équilibre du système élastique **après son chargement**, et à la fin de sa déformation.

Pour étudier le milieu **pendant** son chargement et sa déformation, il faudrait tenir compte de l'accélération qu'il subit, et on entre alors dans le domaine beaucoup plus complexe de la **dynamique**. Exemple : calcul d'une structure soumise au séisme.

Dans ce cours, on restera en **statique**.

A. Equations constitutives

La deuxième **équation d'équilibre** est une équation de surface :

$$\bar{\bar{\sigma}}\vec{n} = \overrightarrow{T_D} \ sur \ S_T$$

Cette équation fait apparaître de nouveaux termes :

- **S_T est une partie de S, la surface extérieure au domaine D.**
- **$\overrightarrow{T_D}$ est une contrainte imposée au milieu en un point donné de S_T .**
- **$\vec{n}$ est la normale sortante du domaine en un point donné de S_T .**

Il s'agit d'une **condition aux limites d'équilibre, ou condition aux limites en effort**. Elle impose donc que le champ de contrainte dans le milieu est compatible avec certaines valeurs qui sont imposées sur ses limites extérieures.

Généralement, la contrainte imposée $\overrightarrow{T_D}$ est **une des données** du problème à résoudre.

A. Equations constitutives

La dernière équation constitutive du problème élastique est une **équation de comportement**.

Puisque l'on travaille en élasticité linéaire isotrope, il s'agit de la **loi de Hooke**, qui fait intervenir le module d'Young et le coefficient de Poisson (ou les deux coefficients de Lamé, indifféremment) :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \lambda \cdot tr(\bar{\bar{\varepsilon}}) \cdot \bar{\bar{I}} + 2\mu \cdot \bar{\bar{\varepsilon}} \quad sur\ D$$

Dans notre cas on a choisi l'élasticité, mais il existe beaucoup d'autres modèles de comportement pour différents types de matériaux (liquides, plastiques, etc.). Dans ce cas, on ferait intervenir une autre équation, qui se présenterait également comme une relation entre contraintes et déformations.

On peut donc récapituler les cinq équations du problème élastique :

-Equations cinématiques :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{grad}}\,\vec{U} + \left(\overline{\overline{grad}}\,\vec{U}\right)^T\right) \; sur\ D$$

$$\vec{U} = \overrightarrow{U_D} \; sur\ S_U$$

-Equations d'équilibre :

$$\overrightarrow{div}\,\bar{\bar{\sigma}} + \vec{g} = \vec{0} \; sur\ D$$

$$\bar{\bar{\sigma}}\vec{n} = \overrightarrow{T_D} \; sur\ S_T$$

-Equation de comportement :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \lambda \cdot tr(\bar{\bar{\varepsilon}}) \cdot \bar{\bar{I}} + 2\mu \cdot \bar{\bar{\varepsilon}} \;\; sur\ D$$

A. Equations constitutives

Généralement, un problème élastique se présente de la manière suivante :

-Les **inconnues du problème** sont trois champs qui sont à définir sur le domaine D et sur sa surface extérieure S :

Champ de contraintes

Champ de déformations

Champ de déplacement

-Les **données du problème** sont de plusieurs types :

Géométrie du problème : définition du domaine D et de sa surface extérieure S

Conditions aux limites en déplacement, définies sur S_U

Conditions aux limites en contraintes, définies sur S_T

A. Equations constitutives

Un théorème fondamental de la **théorie de l'élasticité** nous dit que le système suivant

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{grad}}\ \vec{U} + \left(\overline{\overline{grad}}\ \vec{U}\right)^T\right)\ sur\ D$$

$$\overrightarrow{div}\ \bar{\bar{\sigma}} + \vec{g} = \vec{0}\ sur\ D$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = \lambda \cdot tr(\bar{\bar{\varepsilon}}) \cdot \bar{\bar{I}} + 2\mu \cdot \bar{\bar{\varepsilon}}\ \ sur\ D$$

$$\vec{U} = \overrightarrow{U_D}\ sur\ S_U$$

$$\bar{\bar{\sigma}}\vec{n} = \overrightarrow{T_D}\ sur\ S_T$$

admet **exactement une et une seule solution** sous la forme des trois champs

$$\bar{\bar{\sigma}} \qquad \bar{\bar{\varepsilon}} \qquad \vec{U}$$

si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$S_U \cap S_T = \emptyset$$

$$S_U \cup S_T = S$$

A. Equations constitutives

Les deux expressions sont appelées **conditions de fermeture** du problème élastique. Si elles sont remplies, on dit que le problème élastique que l'on cherche à résoudre est **« bien posé »**.

$$S_U \cap S_T = \emptyset$$

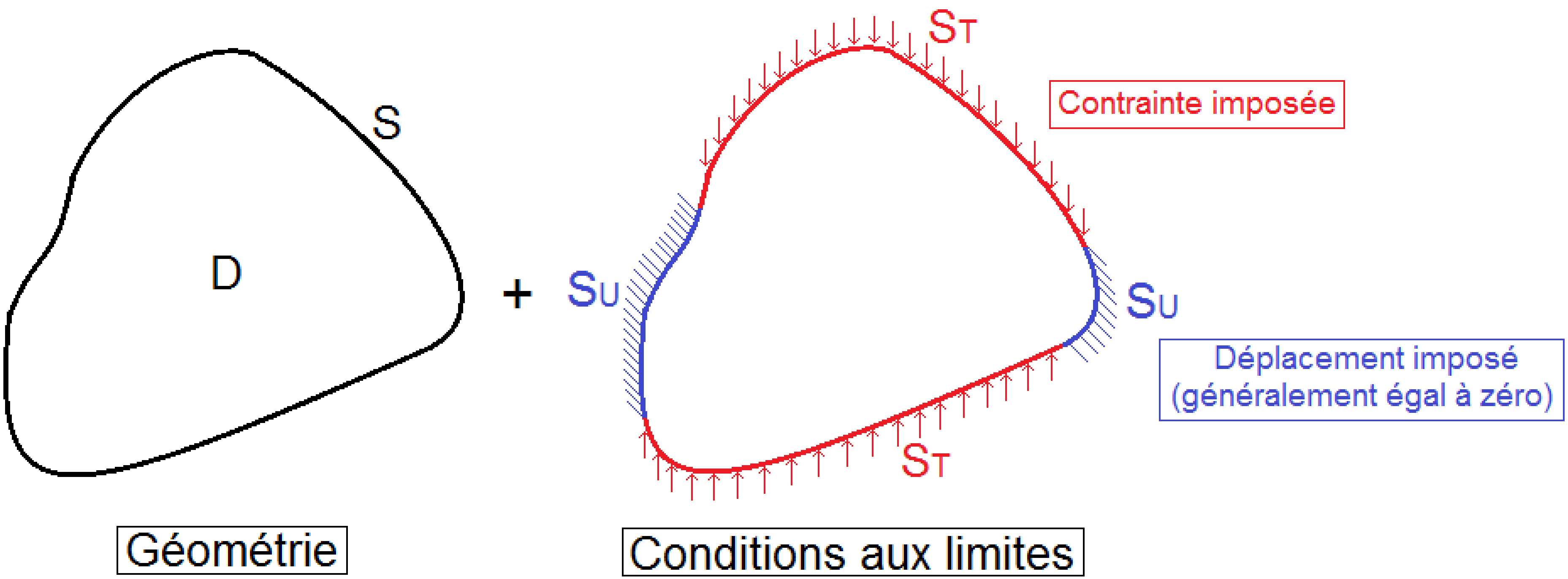
$$S_U \cup S_T = S$$

La première condition énonce **qu'un point donné de la surface** extérieure au domaine **ne peut pas se voir imposer à la fois une contrainte et un déplacement** dans l'énoncé du problème.

La deuxième condition énonce que **tout point de la surface** extérieure au domaine **doit se voir imposer une condition aux limites** d'un type donné.

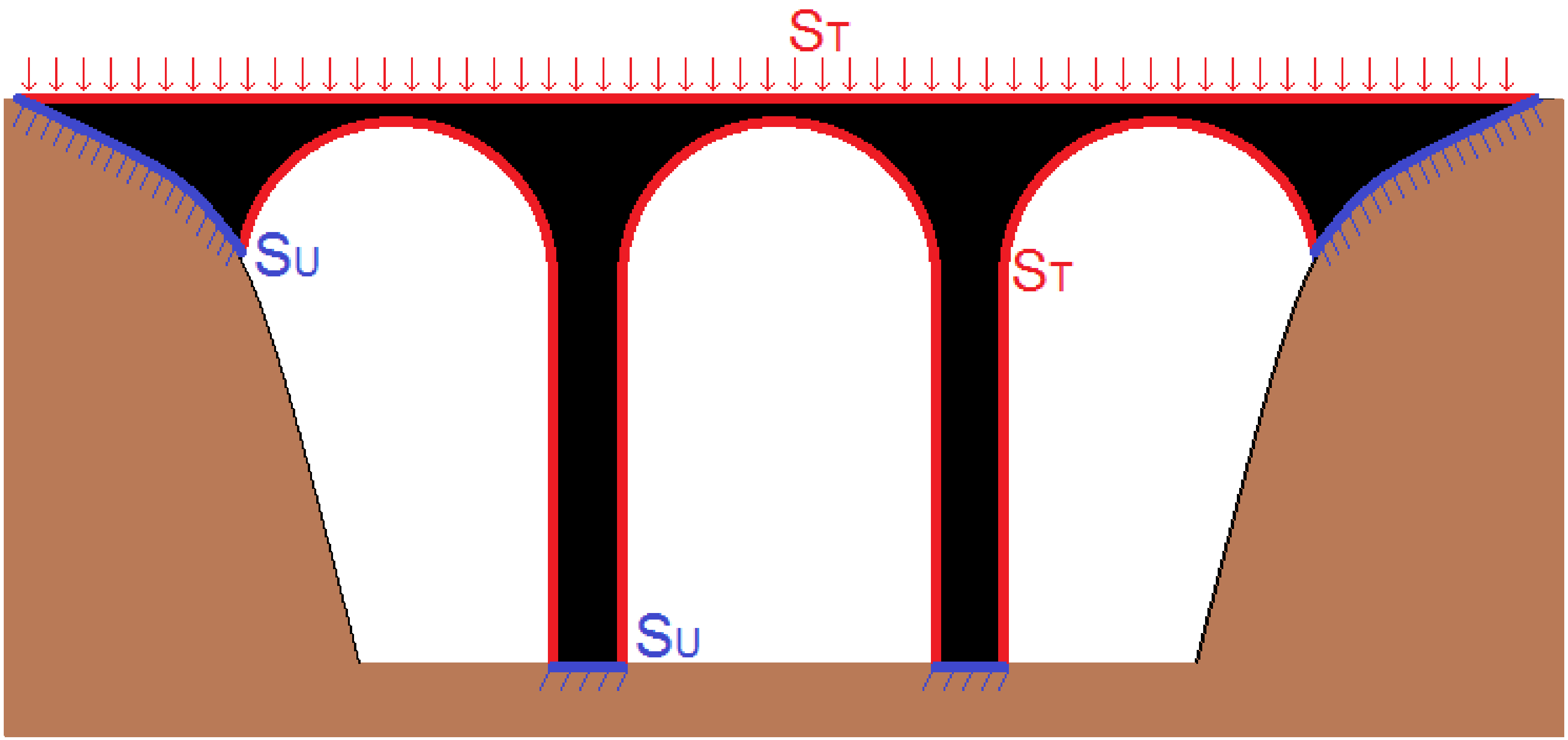
A. Equations constitutives

Finalement, un **problème élastique fermé** (i.e. bien posé) doit avoir l'allure suivante :



$$S_U \cap S_T = \emptyset \qquad S_U \cup S_T = S$$

Appliqué au cas concret d'un viaduc, le problème élastique se modélise par exemple comme suit :



B. Résolution analytique

B. Résolution analytique

On présente dans cette section des approches de **résolution exacte du problème élastique**. Dans l'immense majorité des cas, elles restent inapplicables car trop complexes mathématiquement.

La première difficulté du problème élastique est le nombre d'inconnues : 3 champs définis sur tout le domaine et sur sa surface extérieure :

$$\bar{\bar{\sigma}} \qquad \bar{\bar{\varepsilon}} \qquad \vec{U}$$

Une bonne idée serait donc de **réduire le nombre d'inconnues**. Pour ce faire, on utilise deux des cinq équations fondamentales :

Equation de compatibilité : $$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{grad}}\ \vec{U} + \left(\overline{\overline{grad}}\ \vec{U}\right)^T\right)\ sur\ D$$

Loi de Hooke : $$\bar{\bar{\sigma}} = \lambda \cdot tr(\bar{\bar{\varepsilon}}) \cdot \bar{\bar{I}} + 2\mu \cdot \bar{\bar{\varepsilon}}\ \ sur\ D$$

B. Résolution analytique

La première de ces équations (**équation de compatibilité**) fournit directement la déformation en fonction du champ de déplacement :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{grad}}\,\vec{U} + \left(\overline{\overline{grad}}\,\vec{U}\right)^T\right) \; sur\ D$$

La deuxième de ces équations (**Loi de Hooke**) fournit directement la contrainte en fonction de la déformation :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \lambda \cdot tr(\bar{\bar{\varepsilon}}) \cdot \bar{\bar{I}} + 2\mu \cdot \bar{\bar{\varepsilon}} \quad sur\ D$$

On voit donc que, si le champ de déplacement est connu, on peut directement obtenir les autres inconnues sans difficulté.

A l'inverse, si on connaît le champ de contraintes, il est possible de « remonter » aux déformations et aux déplacements en retournant ces expressions.

On peut donc considérer le problème en supposant que la seule inconnue est le champ de déplacement ou bien le champ de contrainte.

B. Résolution analytique

La première approche analytique de résolution du problème élastique consiste à considérer que le champ de contraintes est la seule inconnue. Il s'agit de l'**approche en contraintes**.

Il faut donc faire disparaître les déformations et les déplacements du problème. Il faut en fait suivre les deux étapes suivantes :

-**Postuler** un champ de contraintes, tel qu'il vérifie les équations d'équilibre suivantes :

PFD : $$\overrightarrow{div}\,\bar{\bar{\sigma}} + \vec{g} = \vec{0}\ sur\ D$$

CL en contraintes : $$\bar{\bar{\sigma}}\vec{n} = \overrightarrow{T_D}\ sur\ S_T$$

-**Vérifier** que ce champ est conforme à l'équation de Beltrami, qui est dérivée des conditions de compatibilité en déformations exprimées sous forme de contraintes :

$$\Delta\bar{\bar{\sigma}} + \frac{1}{1+\nu}\,\overline{\overline{grad}}\;\overrightarrow{grad}\;tr\,\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{0}}$$

Si c'est le cas, alors le champ de contrainte choisi est la seule et unique solution du problème élastique.

B. Résolution analytique

La deuxième approche analytique de résolution du problème élastique consiste à considérer que le champ des déplacements est la seule inconnue. Il s'agit de l'**approche en déplacements**. Il faut donc faire disparaître les déformations et les contraintes du problème. On utilise la méthode suivante :

$$\boxed{\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{grad}}\,\vec{U} + \left(\overline{\overline{grad}}\,\vec{U}\right)^T\right) \ sur\ D}$$

$$\boxed{\bar{\bar{\sigma}} = \lambda \cdot tr(\bar{\bar{\varepsilon}}) \cdot \bar{\bar{I}} + 2\mu \cdot \bar{\bar{\varepsilon}} \ \ sur\ D}$$

$$\boxed{\overrightarrow{div}\,\bar{\bar{\sigma}} + \vec{g} = \vec{0}\ sur\ D}$$

Il en résulte la **formule de Navier** :

$$\mu\vec{\Delta}\vec{U} + (\lambda + \mu)\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{U} + \vec{g} = \vec{0}$$

B. Résolution analytique

On voit que cette formule de Navier fait totalement **disparaître les champs de déformation et de contrainte**, et exprime directement le problème élastique en fonction du **champ de déplacement** :

$$\mu\vec{\Delta}\vec{U} + (\lambda + \mu)\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{U} + \vec{g} = \vec{0}$$

Cette équation doit ensuite être résolue de manière à satisfaire les conditions aux limites :

$$\vec{U} = \overrightarrow{U_D}\ sur\ S_U$$
$$\bar{\bar{\sigma}}\vec{n} = \overrightarrow{T_D}\ sur\ S_T$$

La première est exprimée en déplacement et est donc conforme à la formulation. La deuxième en revanche est problématique car elle est exprimée en contraintes, et fait donc apparaître une variable qui est devenue « **extérieure** » au problème en déplacement.

La méthode consiste alors à conserver une indétermination lors de la résolution, puis à exprimer le résultat en contraintes (toujours avec l'indétermination), et enfin de lever l'indétermination par confrontation avec la CL en contraintes.

C. Théorème de superposition

C. Théorème de superposition

La théorie de l'élasticité fournit un outil essentiel pour la résolution de problèmes complexes : **le théorème de superposition**.

Imaginons un domaine matériel D de surface extérieure S , divisée en deux parties S_U et S_T .

On peut soumettre ce système à une **première sollicitation**, sous la forme des conditions aux limites suivantes :

$$\overrightarrow{U_1} = \overrightarrow{U_{D1}}\ sur\ S_U \qquad \overline{\overline{\sigma_1}}\vec{n} = \overrightarrow{T_{D1}}\ sur\ S_T$$

La **résolution de ce problème** (par une méthode quelconque) va nous fournir les champs résultants de cette sollicitation : $\overline{\overline{\varepsilon_1}}$, $\overline{\overline{\sigma_1}}$, et $\overrightarrow{U_1}$.

Imaginons maintenant une **deuxième sollicitation**, appliquée de manière indépendante sous la forme d'autres conditions aux limites :

$$\overrightarrow{U_2} = \overrightarrow{U_{D2}}\ sur\ S_U \qquad \overline{\overline{\sigma_2}}\vec{n} = \overrightarrow{T_{D2}}\ sur\ S_T$$

La **résolution de ce problème** (par la même méthode ou par une autre) va également nous fournir des champs résultats : $\overline{\overline{\varepsilon_2}}$, $\overline{\overline{\sigma_2}}$, et $\overrightarrow{U_2}$.

C. Théorème de superposition

Le théorème de superposition permet d'obtenir directement, et sans calcul additionnel, la solution d'un **troisième problème**, défini par les conditions aux limites suivantes :

$$\vec{U} = \alpha \cdot \overrightarrow{U_{D1}} + \beta \cdot \overrightarrow{U_{D2}} \ \ sur\ S_U$$

$$\bar{\bar{\sigma}}\vec{n} = \alpha \cdot \overrightarrow{T_{D1}} + \beta \cdot \overrightarrow{T_{D2}} \ \ sur\ S_T$$

La **solution** de ce problème se déduit des solutions des deux problèmes « élémentaires » :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \alpha \cdot \bar{\bar{\varepsilon}}_1 + \beta \cdot \bar{\bar{\varepsilon}}_2$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = \alpha \cdot \overline{\overline{\sigma_1}} + \beta \cdot \overline{\overline{\sigma_2}}$$

$$\vec{U} = \alpha \cdot \overrightarrow{U_1} + \beta \cdot \overrightarrow{U_2}$$

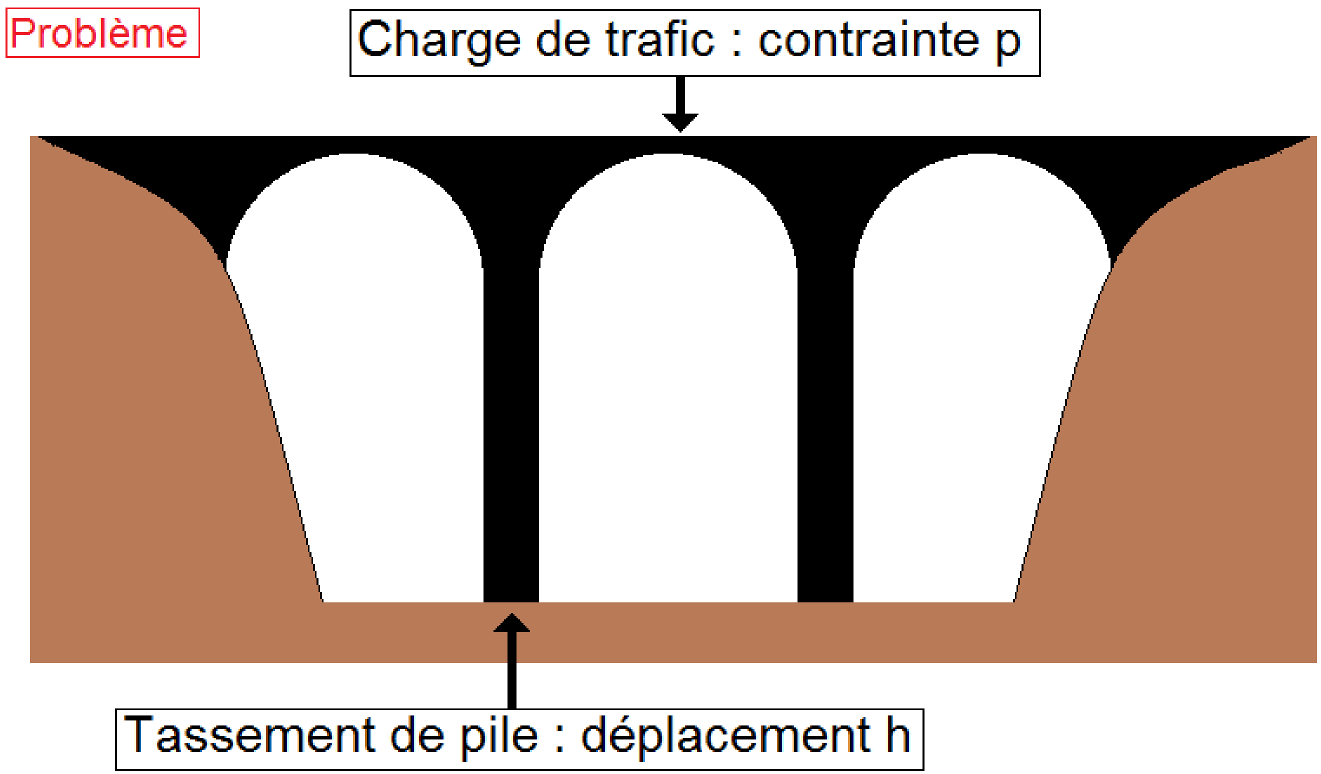
Le théorème de superposition énonce donc que :

-Si l'on additionne des sollicitations, on additionne également leurs effets

-Si on multiplie une sollicitation par un scalaire, on multiplie ses effets par la même quantité

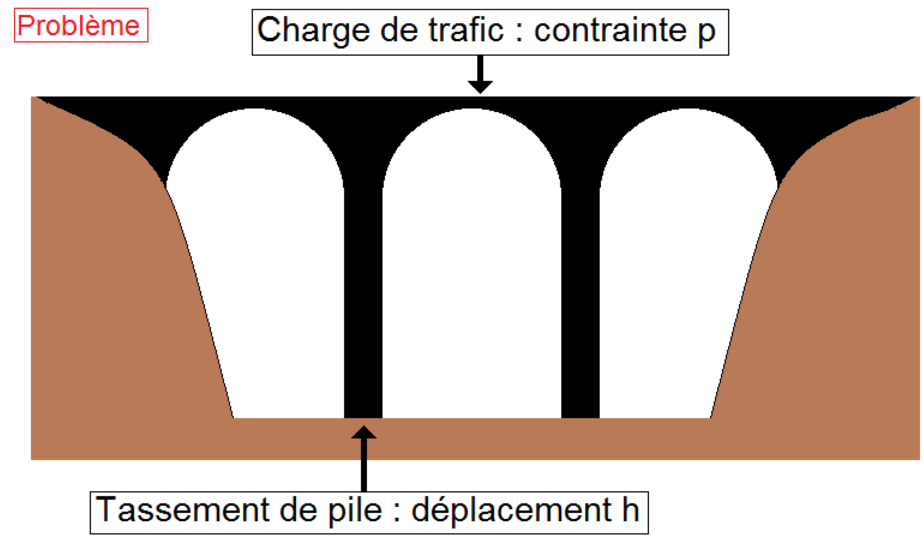
C. Théorème de superposition

Imaginons par exemple le problème suivant appliqué à un **ouvrage d'art** :

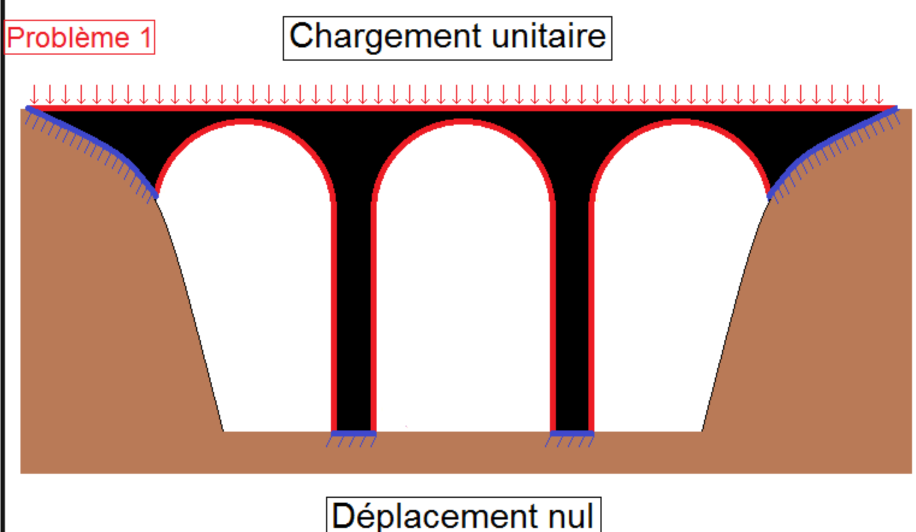


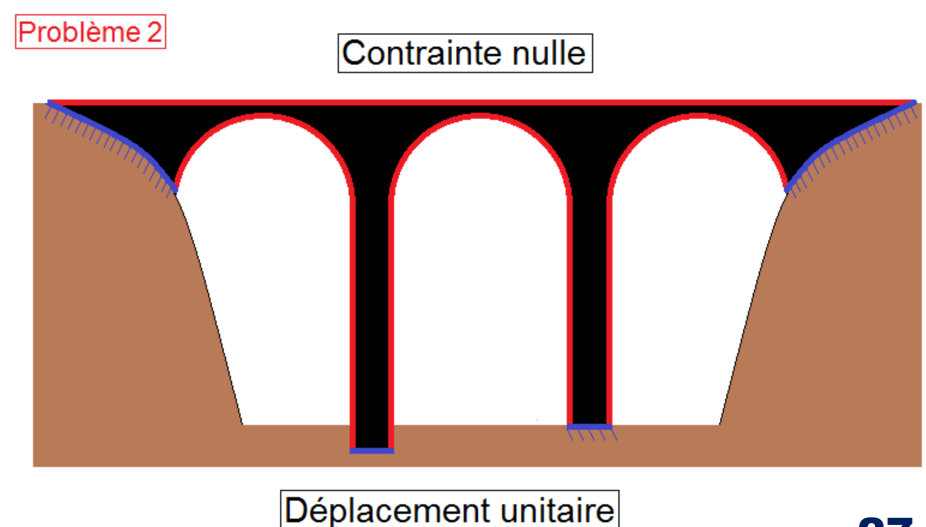
On cherche les champs de **contraintes, déformations, et déplacements** résultant de ces sollicitations

C. Théorème de superposition



Au lieu de traiter ce problème dans son ensemble, une méthode intelligente consiste à le diviser en **deux sous-problèmes, généralement beaucoup plus simples** :





C. Théorème de superposition

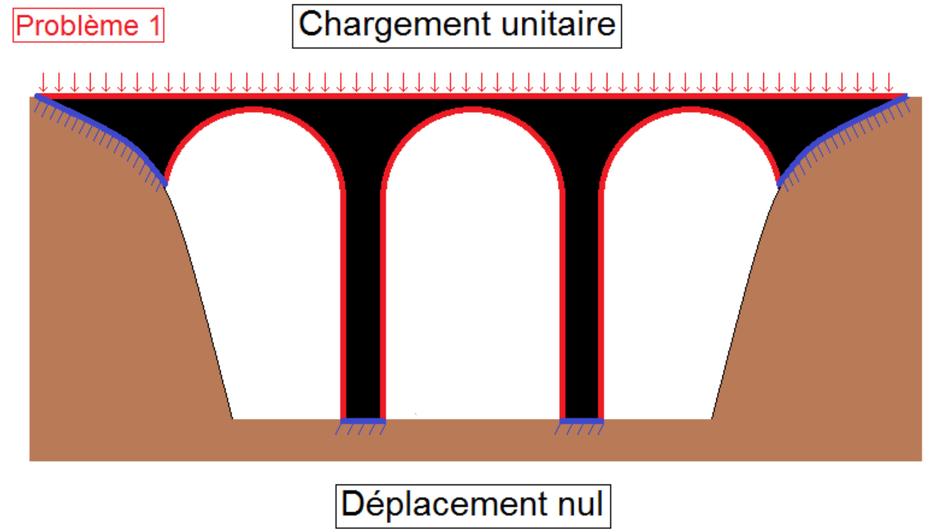
Si on est capable de résoudre chacun de ces problèmes indépendamment, on obtient directement la solution du problème complet :

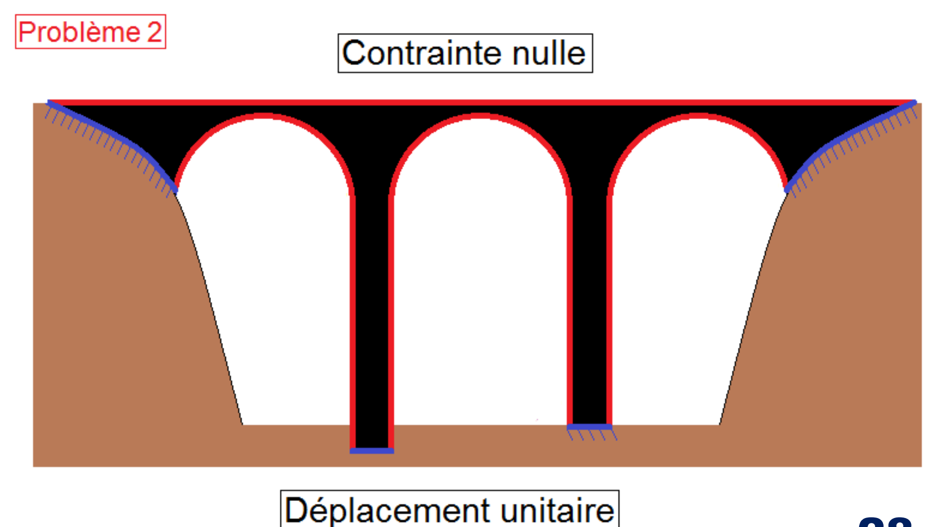
$$\bar{\bar{\varepsilon}} = p \cdot \overline{\overline{\varepsilon_1}} + h \cdot \overline{\overline{\varepsilon_2}}$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = p \cdot \overline{\overline{\sigma_1}} + h \cdot \overline{\overline{\sigma_2}}$$

$$\vec{U} = p \cdot \overrightarrow{U_1} + h \cdot \overrightarrow{U_2}$$

Cette méthode est également à la base de la plupart des méthodes numériques de résolution approchée de problèmes élastiques.





Séance 8

D. Problèmes plans

D. Problèmes plans

La notion de **déformation plane** a déjà été définie dans le chapitre 4. Cette déformation découle d'un **mouvement plan**, défini par un champ de déplacement de la forme suivante :

$$U_3 = 0 \qquad\qquad \frac{\partial U_1}{\partial x_3} = \frac{\partial U_2}{\partial x_3} = 0$$

Il en résulte un tenseur de déformations de la forme suivante :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(x_1, x_2) & \varepsilon_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \varepsilon_{12}(x_1, x_2) & \varepsilon_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Par application de la loi de Hooke, on en déduit la forme du tenseur de contraintes :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot tr(\bar{\bar{\varepsilon}}) + 2\mu \cdot \varepsilon_{11} & 2\mu \cdot \varepsilon_{12} & 0 \\ 2\mu \cdot \varepsilon_{12} & \lambda \cdot tr(\bar{\bar{\varepsilon}}) + 2\mu \cdot \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \cdot tr(\bar{\bar{\varepsilon}}) \end{bmatrix}$$

D. Problèmes plans

On observe donc qu'un état de déformation plane n'entraîne pas une contrainte plane :

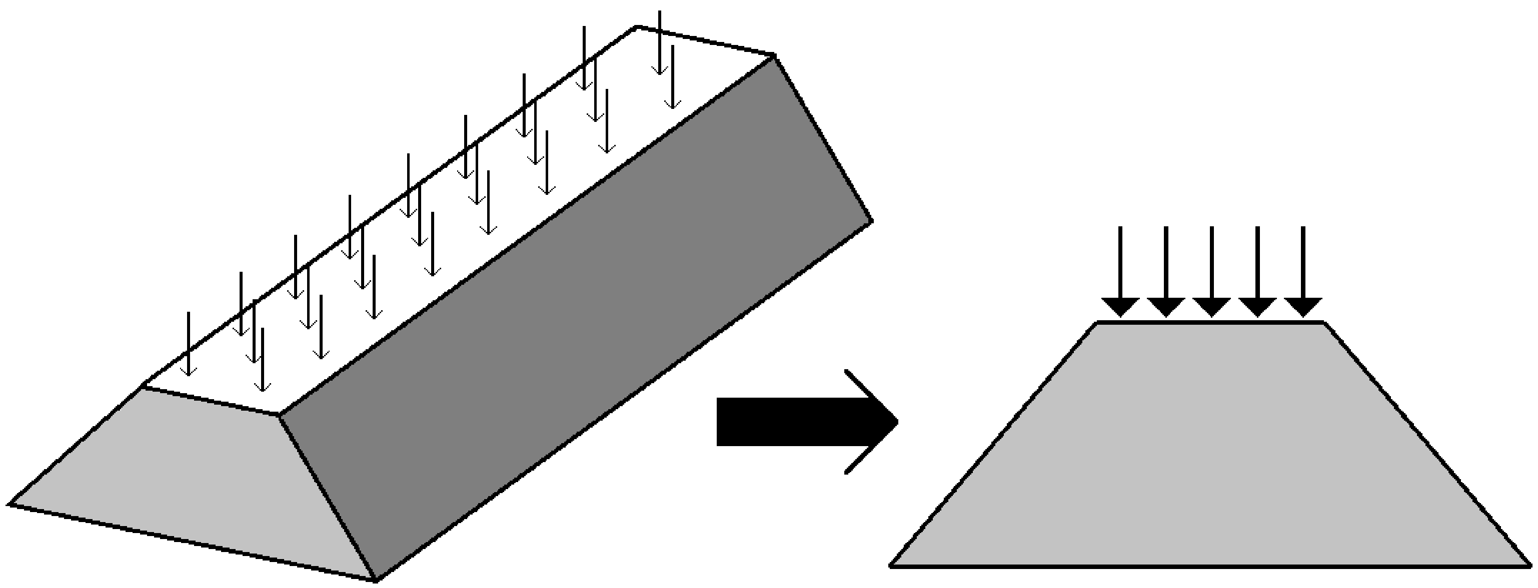
$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot tr(\bar{\bar{\varepsilon}}) + 2\mu \cdot \varepsilon_{11} & 2\mu \cdot \varepsilon_{12} & 0 \\ 2\mu \cdot \varepsilon_{12} & \lambda \cdot tr(\bar{\bar{\varepsilon}}) + 2\mu \cdot \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \cdot tr(\bar{\bar{\varepsilon}}) \end{bmatrix}$$

Dans la direction qui ne subit pas de déformation, une contrainte se développe du fait de l'**effet Poisson**.

C'est en fait la **restriction de déformation** qui induit cette contrainte hors du plan.

D. Problèmes plans

Cet état de déformation se rencontre dans le cas de structures allongées dans une direction donnée, et identiques à elles-mêmes dans cette direction (tant au niveau de la géométrie que du chargement) :



D. Problèmes plans

A l'inverse, l'état de contrainte plane est défini par le tenseur de contraintes suivant :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Par application de la **loi de Hooke**, on en déduit que l'état de déformation correspondant a l'allure suivante :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) \end{bmatrix}$$

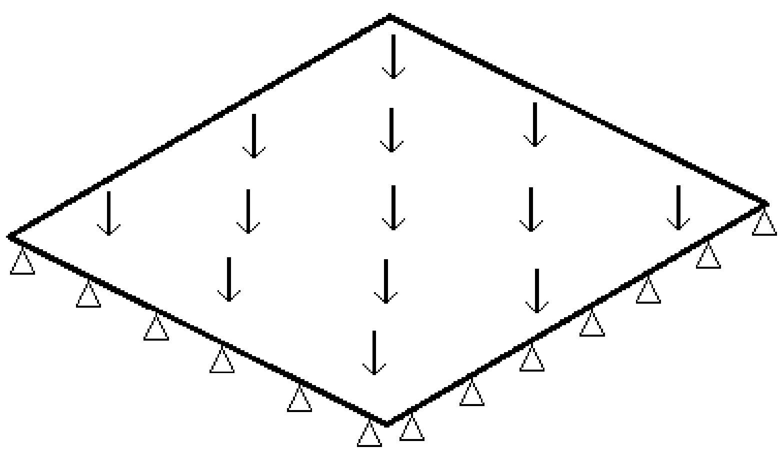
On observe donc qu'un état de contraintes planes n'induit pas une déformation plane, puisque la déformation « hors plan » n'est pas égale à zéro.

Ce phénomène est également lié à l'effet Poisson.

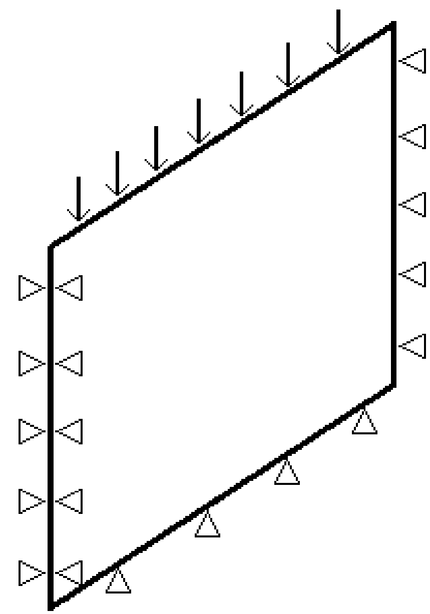
D. Problèmes plans

Des contraintes planes apparaissent par exemple dans le cas d'une **structure mince chargée uniquement dans son plan**.

Une telle structure est appelée une **coque**, et ne doit pas être confondue avec une **plaque**, de géométrie comparable mais **chargée perpendiculairement** à son plan.



Plaques
Contraintes quelconques



Coques
Contraintes planes