Mécanique des milieux continus

Séance 7 : Elasticité

Guilhem MOLLON

GEO3 2012-2013

Plan de la séance

A. Lois de comportement

B. Le modèle élastique linéaire isotrope

1. Définition
2. Paramètres usuels

C. Elasticité en sollicitations simples

1. Contrainte uniaxiale
2. Cisaillement simple
3. Compression hydrostatique

Séance 7

A. Lois de comportement

A. Lois de comportement

On a présenté en détail depuis le début de ce cours de MMC deux personnages essentiels :

-Le tenseur des déformations linéarisées $\bar{\bar{\varepsilon}}$

Ce tenseur possède une base propre $\left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}\right)$, dans laquelle la matrice du tenseur fait apparaître les trois **déformations principales** :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

-Le tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$

Ce tenseur possède également une base propre $(\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3})$, dans laquelle la matrice du tenseur fait apparaître les trois **contraintes principales** :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

A. Lois de comportement

Pour l'instant, on n'a jamais établi de correspondance entre les deux tenseurs $\bar{\bar{\varepsilon}}$ et $\bar{\bar{\sigma}}$.

En particulier, il n'y a aucune raison a priori pour que les directions principales de déformation et de contraintes soient les mêmes.

Pour mettre en relation ces deux objets physiques, on introduit ici la notion de **modèle de comportement**.

Mathématiquement, un modèle de comportement est une fonctionnelle qui fournit la contrainte $\bar{\bar{\sigma}}$ en un point donné à partie de l'historique des déformations dans le système.

On peut donc écrire :

$$\bar{\bar{\sigma}}(\vec{x},t) = \mathcal{F}\left[\bar{\bar{E}}(\tau) \mid \tau \leq t\right]$$

On remarque que cette formulation fait intervenir $\bar{\bar{E}}$, tenseur des déformations, en tout point du système d'étude et à tout instant antérieur à t.

A. Lois de comportement

Cette formulation est beaucoup trop complexe pour un usage pratique, et on va s'attacher à la simplifier en posant plusieurs hypothèses crédibles.

-On suppose que la loi de comportement est **locale**, c'est-à-dire que la contrainte en un point donné n'est fonction que de l'historique de déformation de la particule matérielle qui occupe ce point :

$$\bar{\bar{\sigma}}(\vec{x},t) = \mathcal{F}\left[\bar{\bar{E}}(\vec{x},t') \mid t' \leq t \; et \; \vec{x} = \vec{x}\left(\vec{X},t\right)\right]$$

-Si on travaille sous l'**HPP**, on peut assimiler la position actuelle à la position initiale, et utiliser le tenseur des déformations linéarisées :

$$\bar{\bar{\sigma}}(\vec{x},t) = \mathcal{F}[\bar{\bar{\varepsilon}}(\vec{x},t') \mid t' \leq t]$$

-Enfin, on se limite à une classe de matériaux dits « **sans mémoire** », c'est-à-dire que l'état de contrainte à un instant donné se déduit uniquement de l'état de déformation au même instant :

$$\bar{\bar{\sigma}}(\vec{x},t) = \mathcal{F}[\bar{\bar{\varepsilon}}(\vec{x},t)\ ]$$

A. Lois de comportement

Sous toutes ces hypothèses, le modèle de comportement n'est plus une fonctionnelle, mais tout simplement une fonction :

$$\bar{\bar{\sigma}}(\vec{x},t) = f[\bar{\bar{\varepsilon}}(\vec{x},t)]$$

Cette fonction est parfois inversible, et on peut donc obtenir l'état de déformation à partir de l'état de contraintes :

$$\bar{\bar{\varepsilon}}(\vec{x},t) = f^{-1}[\bar{\bar{\sigma}}(\vec{x},t)]$$

Les lois décrites sous ces hypothèses s'appliquent très bien aux solides, mais pas aux fluides. Dans ce dernier cas, on fait souvent usage du modèle de « **milieu à mémoire infiniment courte** », pour lequel la contrainte n'est pas fonction de l'historique de déformation mais du taux de déformation à un instant donné :

$$\bar{\bar{\sigma}}(\vec{x},t) = \mathcal{F}\left[\bar{\bar{\varepsilon}}(\vec{x},t), \frac{d}{dt}\bar{\bar{\varepsilon}}(\vec{x},t)\right]$$

C'est le cas par exemple du modèle du fluide visqueux.

Séance 7

B. Le modèle élastique linéaire isotrope

B. Le modèle élastique linéaire isotrope

Le modèle de comportement élastique est une loi **locale** et **sans mémoire**, qui possède en outre les propriétés suivantes :

-Il existe pour chaque particule du milieu un **état de référence**, appelé état au repos, tel que **le tenseur des déformations linéarisées et le tenseur des contraintes sont tous les deux égaux au tenseur nul**.

-L'état de contrainte d'une particule à un instant donné ne dépend que de son **état de déformation par rapport à l'état de référence**. Cet état de référence peut donc être assimilé à **l'état initial au sens lagrangien** du terme.

Plus simplement, un milieu élastique est un milieu qui se déforme sous un chargement (la nature et la quantification de cette déformation étant quelconques), et qui revient exactement à son état initial si on supprime le chargement.

B. Le modèle élastique linéaire isotrope

La notion de milieu élastique est donc très générale, puisqu'on n'a apporté aucune information sur la nature de la fonction qui relie les contraintes aux déformations. On peut aller plus loin en parlant de modèle **élastique linéaire**. Dans ce cas, on ajoute les hypothèses suivantes :

-**Le mouvement est conforme à l'HPP**

-**La relation entre contraintes et déformations est affine**

Grâce à ces hypothèses, on peut écrire une **relation de proportionnalité** entre chaque terme de la matrice du tenseur des déformations linéarisées et chaque terme de la matrice du tenseur des contraintes :

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}$$

Chaque terme du tenseur des contraintes est donc obtenue comme une **composition linéaire** de tous les termes de la matrice des déformations linéarisées.

B. Le modèle élastique linéaire isotrope

Par la formule précédente, on a fait apparaître un tenseur d'ordre 4 qui fait le lien entre $\bar{\bar{\sigma}}$ et $\bar{\bar{\varepsilon}}$. Le plus souvent, pour simplifier les notations, on a adopte plutôt le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{42} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$

La matrice a est alors appelée **matrice des raideurs élastiques**, et possède 21 termes indépendants (du fait de certaines symétries).

B. Le modèle élastique linéaire isotrope

Pour décrire un matériau de manière pratique, 21 paramètres sont encore beaucoup trop. Ils ne sont d'ailleurs pas nécessaires. Pour la plupart des matériaux élastiques, on peut en effet émettre une dernière hypothèse simplificatrice, qui correspond au **modèle élastique linéaire isotrope** :

-Le comportement mécanique du milieu est invariant par rotation. Autrement dit, il se comporte **de la même manière dans toute les directions**.

Sous cette hypothèse, on travaille avec 2 paramètres au lieu de 21, et on appelle ces paramètres les **coefficients de Lamé**, notés λ et μ . Ces deux coefficients ont la dimension d'une pression (kPa ou Mpa).

Il faut noter que l'hypothèse d'isotropie est parfois mise en défaut dans certains matériaux qui ont une direction structurelle privilégiée : bois, composites, certains sols stratifiés, etc.

B. Le modèle élastique linéaire isotrope

Robert Hooke
1635-1703

Dans le cas d'un milieu élastique linéaire et isotrope, la relation contraintes-déformations prend une forme simplifiée, appelée **Loi de Hooke**. En s'appuyant sur les coefficients de Lamé, cette loi s'écrit :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \lambda \cdot tr(\bar{\bar{\varepsilon}}) \cdot \bar{\bar{I}} + 2\mu \cdot \bar{\bar{\varepsilon}}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij}$$

On voit que selon cette loi, le tenseur de Cauchy s'obtient à partir du tenseur des déformations linéarisées en la multipliant par la constante 2μ et en lui ajoutant le scalaire $\lambda \cdot tr(\bar{\bar{\varepsilon}})$. On en déduit une propriété très intéressante :

En élasticité linéaire isotrope, les directions principales de déformations et de contraintes sont identiques.

Il faut bien noter que cette propriété est uniquement valable pour ce modèle de comportement, et disparaît dès que l'on sort de l'une des hypothèses (élasticité, linéarité, isotropie)

POLYTECH GRENOBLE

B. Le modèle élastique linéaire isotrope

2. Paramètres usuels

On a introduit les coefficients de Lamé car ils fournissent la formulation la plus simple de la loi de Hooke. Ils ont donc une grande importance théorique.

Dans un cadre pratique, pourtant, on utilise beaucoup plus souvent deux autres paramètres qui s'en déduisent directement : le **module d'Young** E et le **coefficient de Poisson** ν :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Ces deux paramètres sont très couramment utilisés car ils ont un sens physique beaucoup plus tangible que les coefficients de Lamé, notamment d'un point de vue expérimental.

Thomas Young
1773-1829

Siméon Denis Poisson
1781-1840

B. Le modèle élastique linéaire isotrope

La loi de Hooke peut se réécrire à l'aide de ces deux paramètres :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\bar{\bar{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} tr(\bar{\bar{\varepsilon}}) \cdot \bar{\bar{I}}\right)$$

On constate que cette expression est légèrement plus compliquée que celle faisant intervenir les coefficients de Lamé. On peut retourner la relation pour exprimer les déformations en fonction des contraintes :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E} tr(\bar{\bar{\sigma}}) \cdot \bar{\bar{I}}$$

Le module d'Young et le coefficient de Poisson sont des grandeurs caractéristiques de chaque matériau. Elles ne sont pas les mêmes pour l'acier, le béton, le caoutchouc, etc. D'une manière général, il s'agit de paramètres élastiques, qui décrivent donc la résistance d'un matériau à la déformation. On utilise souvent le terme de **raideur**.

B. Le modèle élastique linéaire isotrope

Dans le cas de l'élasticité linéaire isotrope, on peut également écrire la loi de Hooke sous forme matricielle, en faisant intervenir tous les termes des tenseurs de contrainte et de déformations :

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{23}\end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{23}\end{bmatrix}$$

Cette relation s'inverse par :

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{23}\end{bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0\\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0\\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{23}\end{bmatrix}$$

Grâce à l'isotropie du matériau, ces relations sont vraies dans toute base.

Séance 7

C. Elasticité en sollicitations simples

C. Elasticité en sollicitations simples

Imaginons un cube unitaire de matériau élastique, et soumettons-le à une traction uniaxiale définie par le tenseur de contraintes suivant, supposé homogène :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En appliquant la loi de Hooke, on détermine immédiatement le tenseur de déformation issu de cette sollicitation :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma \end{bmatrix}$$

La déformation selon $\overrightarrow{e_1}$ est une extension proportionnelle à la contrainte appliquée.

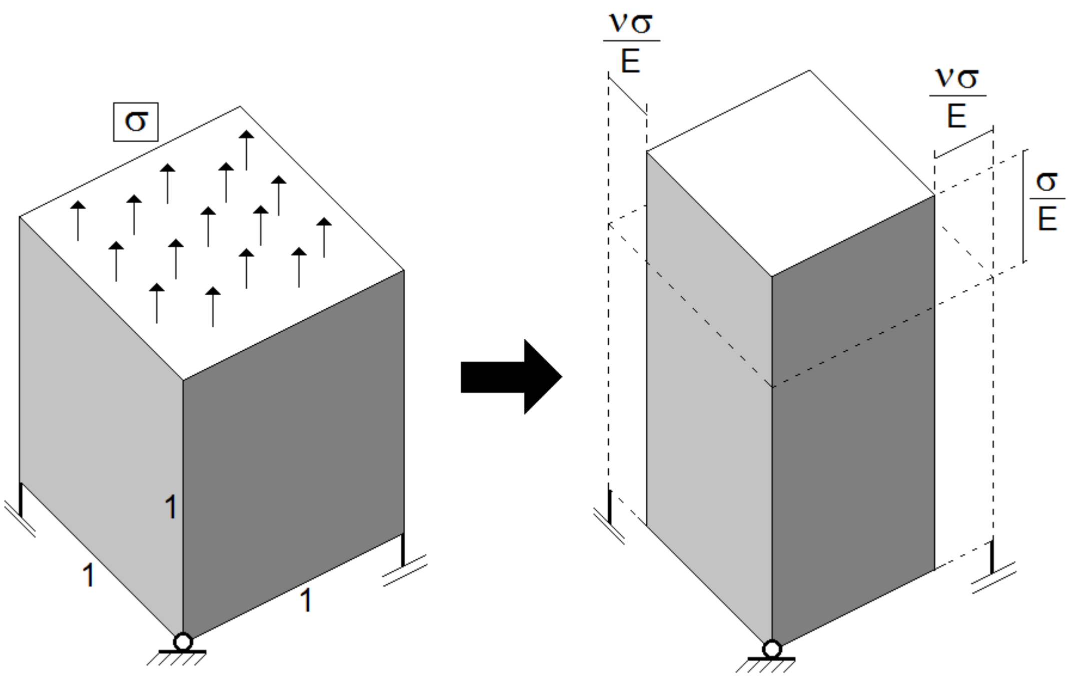
Le module d'Young est donc le coefficient de proportionnalité entre une déformation axiale et la contrainte normale qui l'a produite.

C. Elasticité en sollicitations simples

Par ailleurs, on constate que les déformations dans les directions $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ ne sont manifestement pas nulles, bien qu'elles soient dans des directions normales au chargement.

On appelle ce phénomène l'**effet Poisson**.

Le coefficient de Poisson est donc, au signe près, le rapport entre l'extension dans la direction de chargement et la contraction dans les deux directions normales.



$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma \end{bmatrix}$$

C. Elasticité en sollicitations simples

Pour la même sollicitation, la loi de Hooke donne également :

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11}$$

On peut alors distinguer **deux cas limites pour le coefficient de Poisson :**

-si $\nu = 0$, une contrainte uniaxiale n'induit pas de déformation transversale. l'effet Poisson disparaît.

-si $\nu = 0.5$, on observe que $tr(\bar{\bar{\varepsilon}}) = 0$. Ce cas limite correspond donc à un milieu parfaitement incompressible.

Par conséquent, on aura toujours la règle suivante :

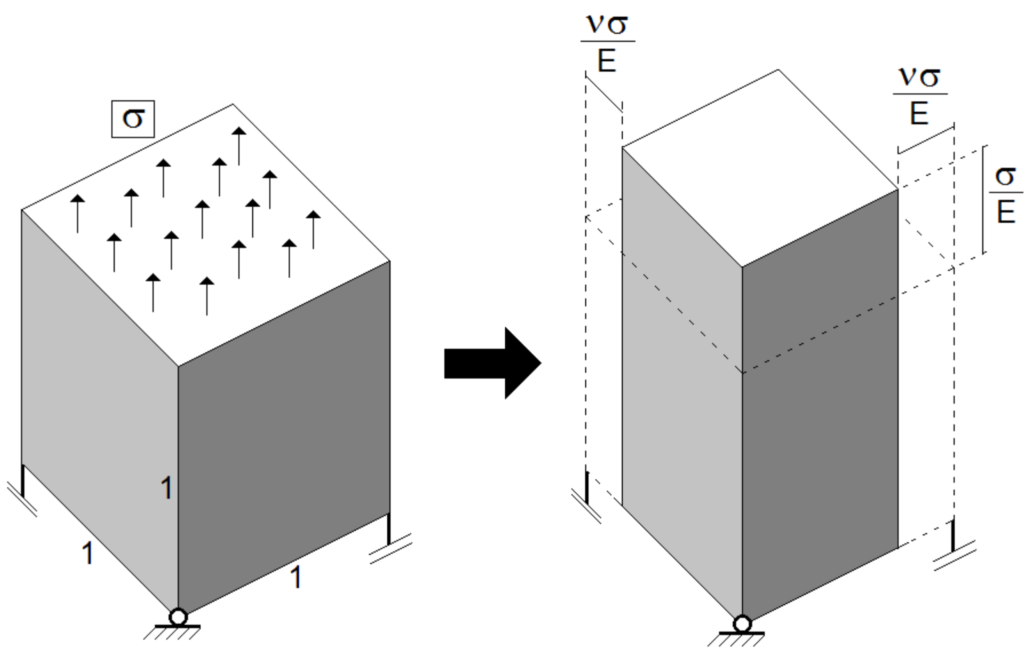
$$0 < \nu < 0.5$$

C. Elasticité en sollicitations simples

On constate que, par application d'une contrainte uniaxiale connue sur un échantillon de matériau, on est en mesure de déterminer très facilement ses propriétés élastiques :

-en mesurant sa **déformation axiale**, on accède au **module d'Young**

-en mesurant sa **déformation transversale**, on accède au **coefficient de Poisson**



Cette facilité d'accès expérimentale est la raison pour laquelle ces paramètres sont d'usage plus répandu que les coefficients de Lamé.

C. Elasticité en sollicitations simples

On sollicite maintenant un milieu continu par un cisaillement simple défini par le tenseur de contraintes suivant :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'application directe de la **loi de Hooke** donne le champ de déformation suivant, en faisant apparaître soit le module d'Young et le coefficient de Poisson, soit les coefficients de Lamé :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1+\nu}{E}\tau & 0 \\ \dfrac{1+\nu}{E}\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{2\mu}\tau & 0 \\ \dfrac{1}{2\mu}\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On constate qu'une sollicitation de cisaillement simple induit une déformation de glissement simple, sans produire d'extension-contraction, et à volume constant.

C. Elasticité en sollicitations simples

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1+\nu}{E}\tau & 0 \\ \dfrac{1+\nu}{E}\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{2\mu}\tau & 0 \\ \dfrac{1}{2\mu}\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le glissement observé correspond à un angle donné par :

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \frac{\tau}{\mu}$$

On constate donc que cet angle est proportionnel à la contrainte de cisaillement exercée sur le milieu.

Le deuxième coefficient de Lamé, noté μ apparaît donc comme le rapport de proportionnalité entre une contrainte de cisaillement et le glissement induit.

On l'appelle « module de cisaillement », et on le note parfois G

C. Elasticité en sollicitations simples

Si on se place dans la base principale, on voit alors apparaître des dilatations. Par définition, les glissements dans cette base sont nuls.

On a déjà démontré que cette base principale (à la fois de contraintes et de déformations) correspond aux bissectrices de la base de départ, et on peut donner directement le tenseur de déformations dans cette base :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{1+\nu}{E}\tau & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1+\nu}{E}\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\mu}\tau & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\mu}\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, une sollicitation de cisaillement simple dans un milieu élastique linéaire isotrope produit deux dilatations opposées selon les bissectrices de la base de départ, et ces dilatations sont proportionnelles à la contrainte de cisaillement. Cette proportionnalité fait intervenir le module de cisaillement.

C. Elasticité en sollicitations simples

3. Compression hydrostatique

On sollicite maintenant un milieu continu par une compression isotrope, aussi appelée compression hydrostatique et définie par une pression p :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

Par application de la loi de Hooke, la déformation associée est :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} -p\dfrac{1-2\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -p\dfrac{1-2\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -p\dfrac{1-2\nu}{E} \end{bmatrix}$$

Du fait de l'isotropie du matériau, on constate qu'une contrainte isotrope conduit logiquement à une déformation également isotrope.

On introduit la grandeur K suivante, appelée **module de compressibilité** :

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

En introduisant cette grandeur dans le tenseur des déformations, on obtient :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{-p}{3K} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-p}{3K} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-p}{3K} \end{bmatrix}$$

On constate alors directement que l'on a : $tr(\bar{\bar{\varepsilon}}) = \frac{-p}{K}$

On en déduit donc que le module de compressibilité correspond au **coefficient de proportionnalité entre la pression appliquée à un milieu continu et sa perte de volume.**