



POLYTECH
GRENoble

Mécanique des milieux continus

Séance 6 : Contraintes

Guilhem MOLLON

GEO3 2012-2013

Plan de la séance

A. Théorème de Cauchy

B. Directions principales, invariants

C. Cercle de Mohr

1. Principe
2. Contrainte de cisaillement maximal
3. Description du grand cercle de Mohr

D. Etats de contrainte particuliers

1. Traction ou compression hydrostatique
2. Traction ou compression simple dans une direction
3. Cisaillement simple
4. Etat de contrainte triaxiale de révolution
5. Etat de contrainte plane

Séance 6

A. Théorème de Cauchy

A. Théorème de Cauchy

On a défini la contrainte comme étant analogue à une pression. Une définition plus rigoureuse fait appel à la notion mathématique de limite. Si on considère une petite facette de surface S et de normale \vec{n} , à laquelle on applique une force \vec{F} , la contrainte est définie par :

$$\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n}) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{S}$$

Une des propriétés de l'état de contrainte est qu'il est opposé pour deux facettes d'orientations opposées. Si on se place en un point M et que l'on considère deux facettes de normales opposées (il s'agit en fait des deux faces de la même facette), on peut écrire :

$$\vec{T}(\vec{x}, t, -\vec{n}) = -\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n})$$

C'est une version infinitésimale de la troisième loi de Newton (loi d'action-réaction).

A. Théorème de Cauchy

Le théorème de Cauchy s'énonce comme suit :

En tout point M et à chaque instant t , la dépendance du vecteur contrainte $\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n})$ à la normale \vec{n} est linéaire.

Il existe donc un champ de tenseur de second ordre noté $\bar{\bar{\sigma}}$ tel que, dans une base orthonormée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ quelconque, on ait :

$$\begin{cases} T_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ T_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ T_3 = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{cases}$$

Ceci peut également s'écrire : $T_i = \sigma_{ip}n_p$ ou encore : $\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n}) = \bar{\bar{\sigma}}(\vec{x}, t)\vec{n}$

Le théorème de Cauchy est donc le théorème d'existence du tenseur du même nom. Ce tenseur est donc un outil qui fournit le vecteur contrainte dans n'importe quelle direction définie par un vecteur normal unitaire. Il caractérise donc l'**état de contrainte** en un point et à un instant donnés.



Louis Augustin Cauchy
1789-1857

A. Théorème de Cauchy

On va maintenant s'intéresser à la description de ce tenseur en un point donné et à un instant donné. Par conséquent, on abrègera $\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n})$ par $\vec{T}(\vec{n})$.

On revient sur la formule :

$$\begin{cases} T_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ T_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ T_3 = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{cases}$$

La matrice du tenseur de Cauchy dans une base donnée $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est donc :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Les termes diagonaux $\sigma_{\underline{ii}}$ sont des contraintes normales dans les directions \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , et \vec{e}_3 .

Les termes non-diagonaux σ_{ij} sont des contraintes de cisaillement, que l'on note souvent τ_{ij} .

A. Théorème de Cauchy

On peut donc noter que :

le terme de la matrice de $\bar{\bar{\sigma}}$ noté σ_{ij} représente la projection sur la direction \vec{e}_j du vecteur contrainte appliqué à la facette de normale \vec{e}_i .

La symétrie du tenseur de Cauchy entraîne la propriété suivante, connue sous le nom de **réciprocité des contraintes tangentielles** :

La composante selon \vec{e}_i de la contrainte pour la direction \vec{e}_j est égale à la composante selon \vec{e}_j de la contrainte pour la direction \vec{e}_i .

Finalement, on écrit le plus souvent la matrice du tenseur de Cauchy de la façon suivante :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

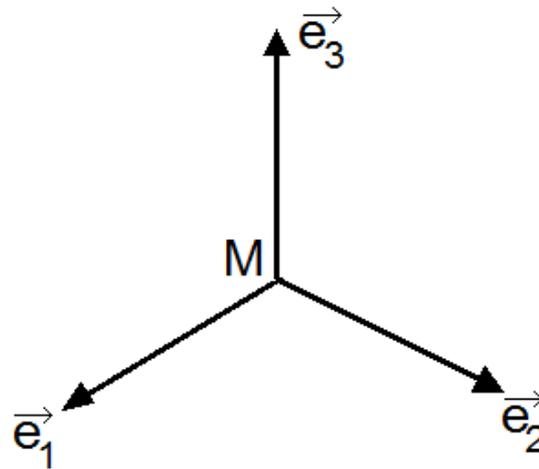
A. Théorème de Cauchy

Imaginons un volume cubique infinitésimal autour d'un point M , défini par les directions d'une base quelconque :

$$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

On peut représenter graphiquement les différents termes de la matrice du tenseur de Cauchy au voisinage de ce point et pour cette base :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



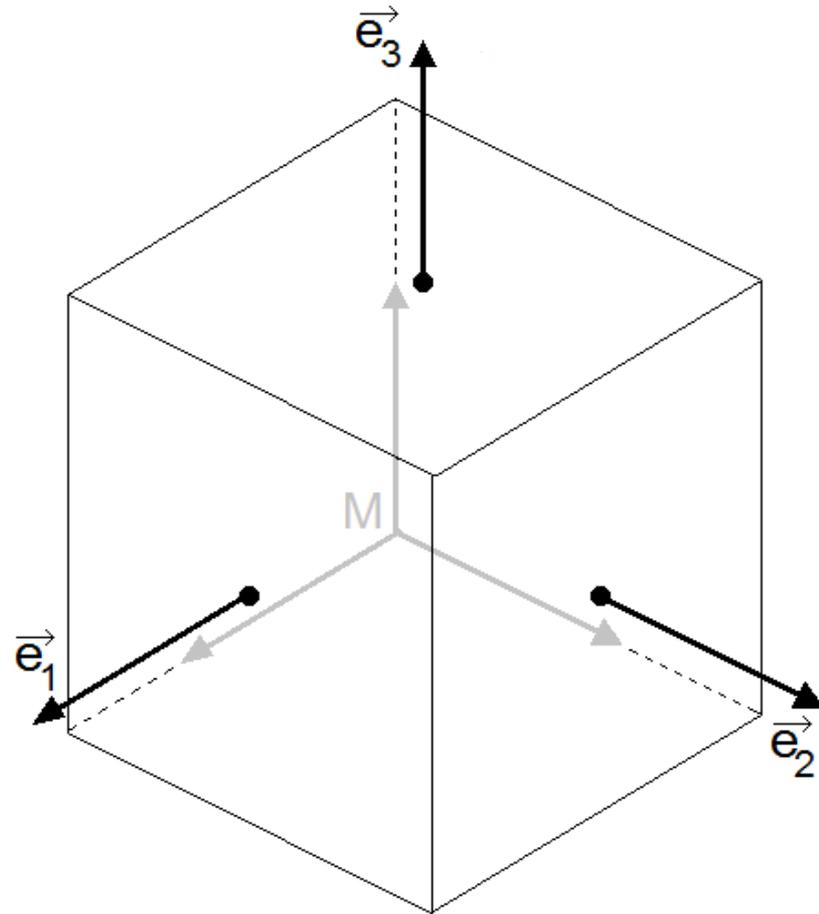
A. Théorème de Cauchy

Imaginons un volume cubique infinitésimal autour d'un point M , défini par les directions d'une base quelconque :

$$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

On peut représenter graphiquement les différents termes de la matrice du tenseur de Cauchy au voisinage de ce point et pour cette base :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



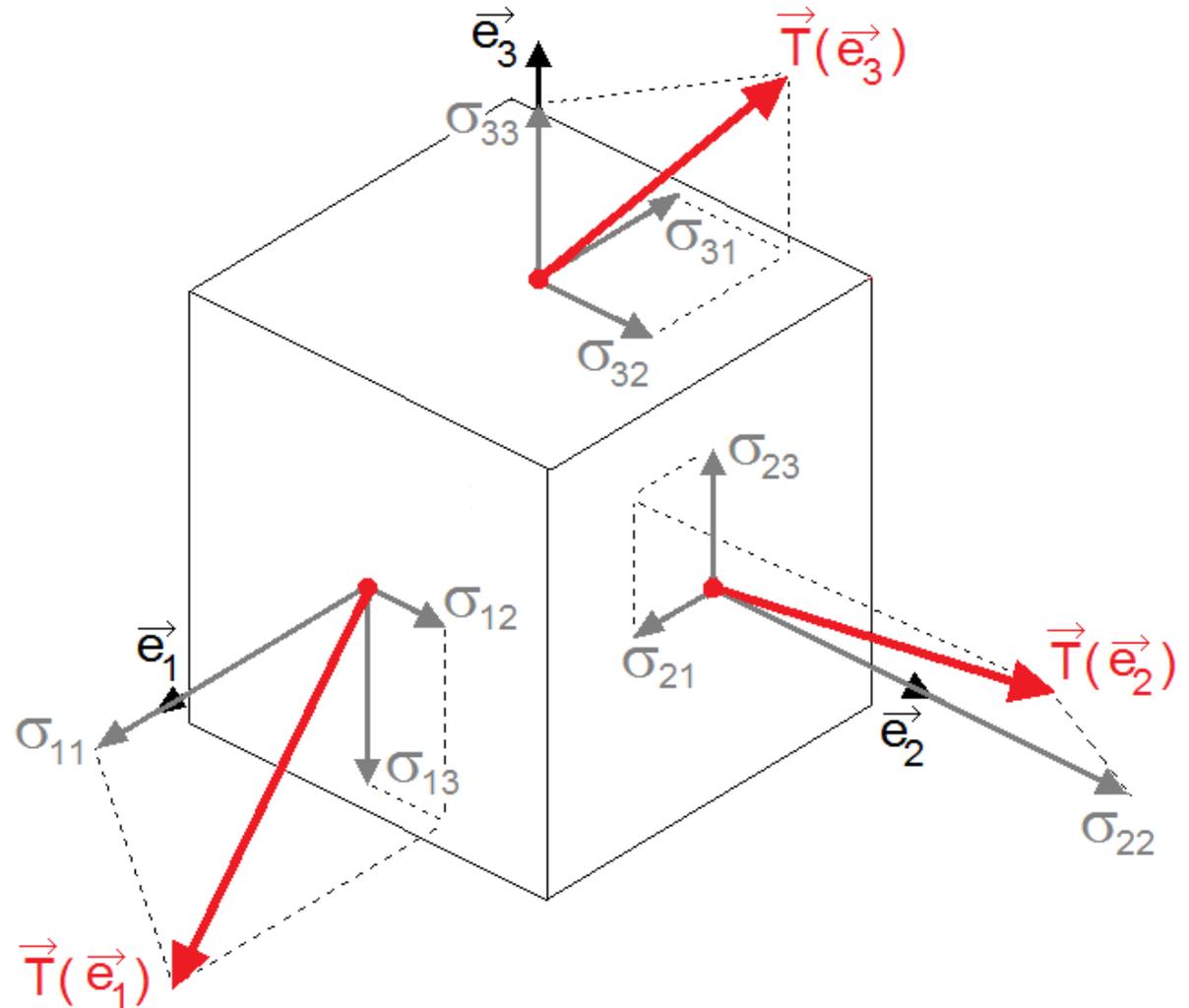
A. Théorème de Cauchy

Imaginons un volume cubique infinitésimal autour d'un point M, défini par les directions d'une base quelconque :

$$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

On peut représenter graphiquement les différents termes de la matrice du tenseur de Cauchy au voisinage de ce point et pour cette base :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



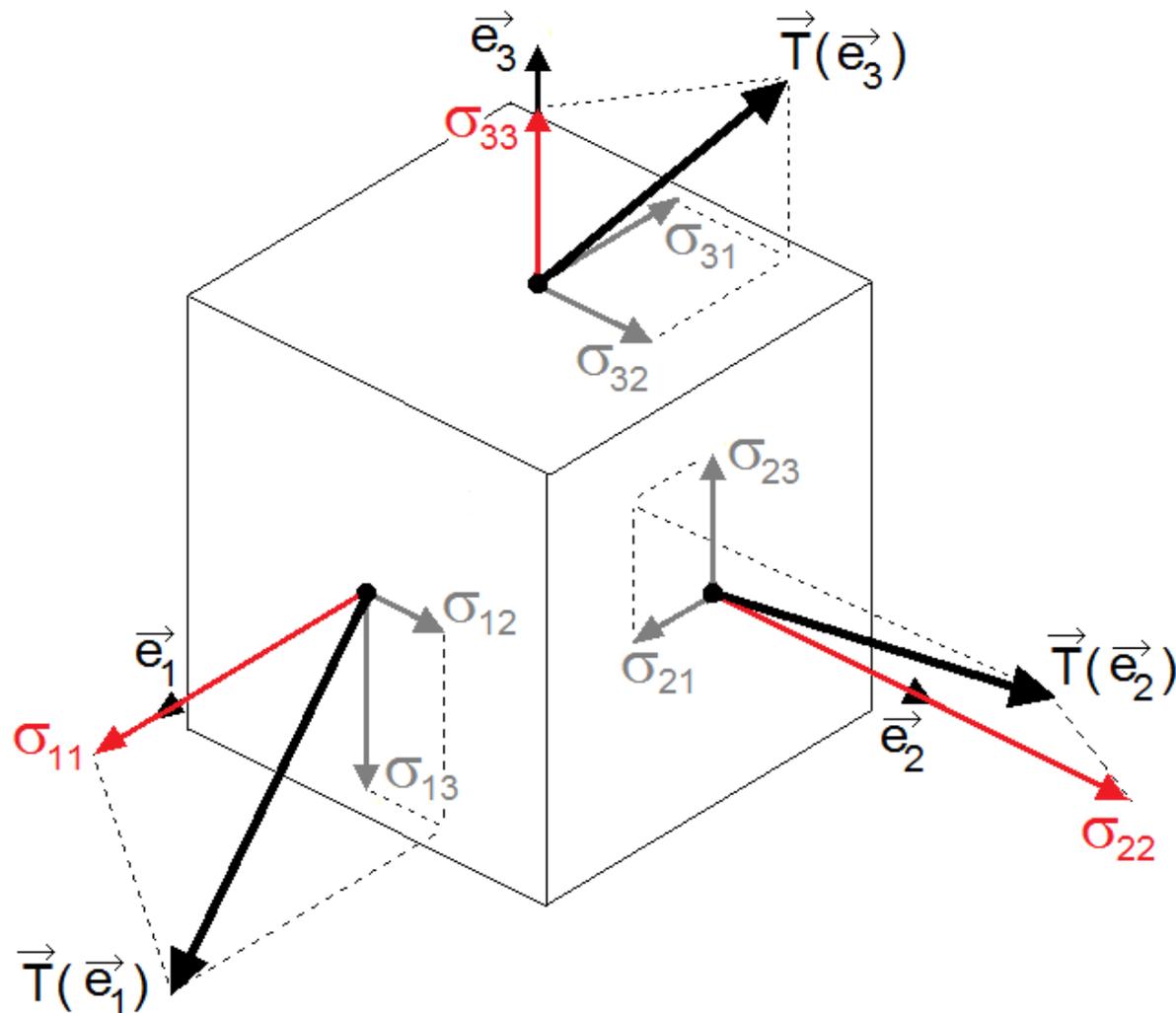
A. Théorème de Cauchy

Imaginons un volume cubique infinitésimal autour d'un point M, défini par les directions d'une base quelconque :

$$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

On peut représenter graphiquement les différents termes de la matrice du tenseur de Cauchy au voisinage de ce point et pour cette base :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



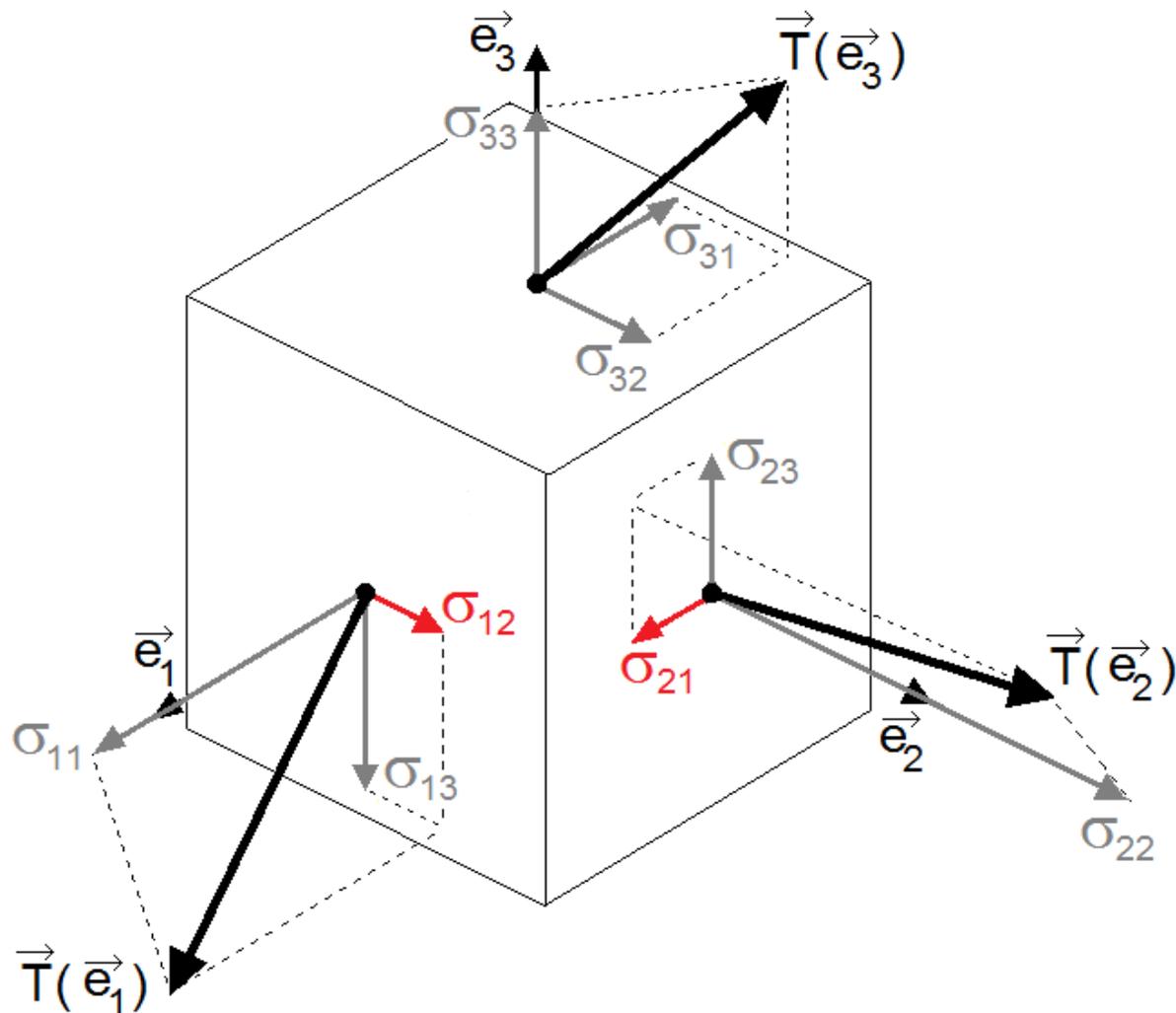
A. Théorème de Cauchy

Imaginons un volume cubique infinitésimal autour d'un point M , défini par les directions d'une base quelconque :

$$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

On peut représenter graphiquement les différents termes de la matrice du tenseur de Cauchy au voisinage de ce point et pour cette base :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



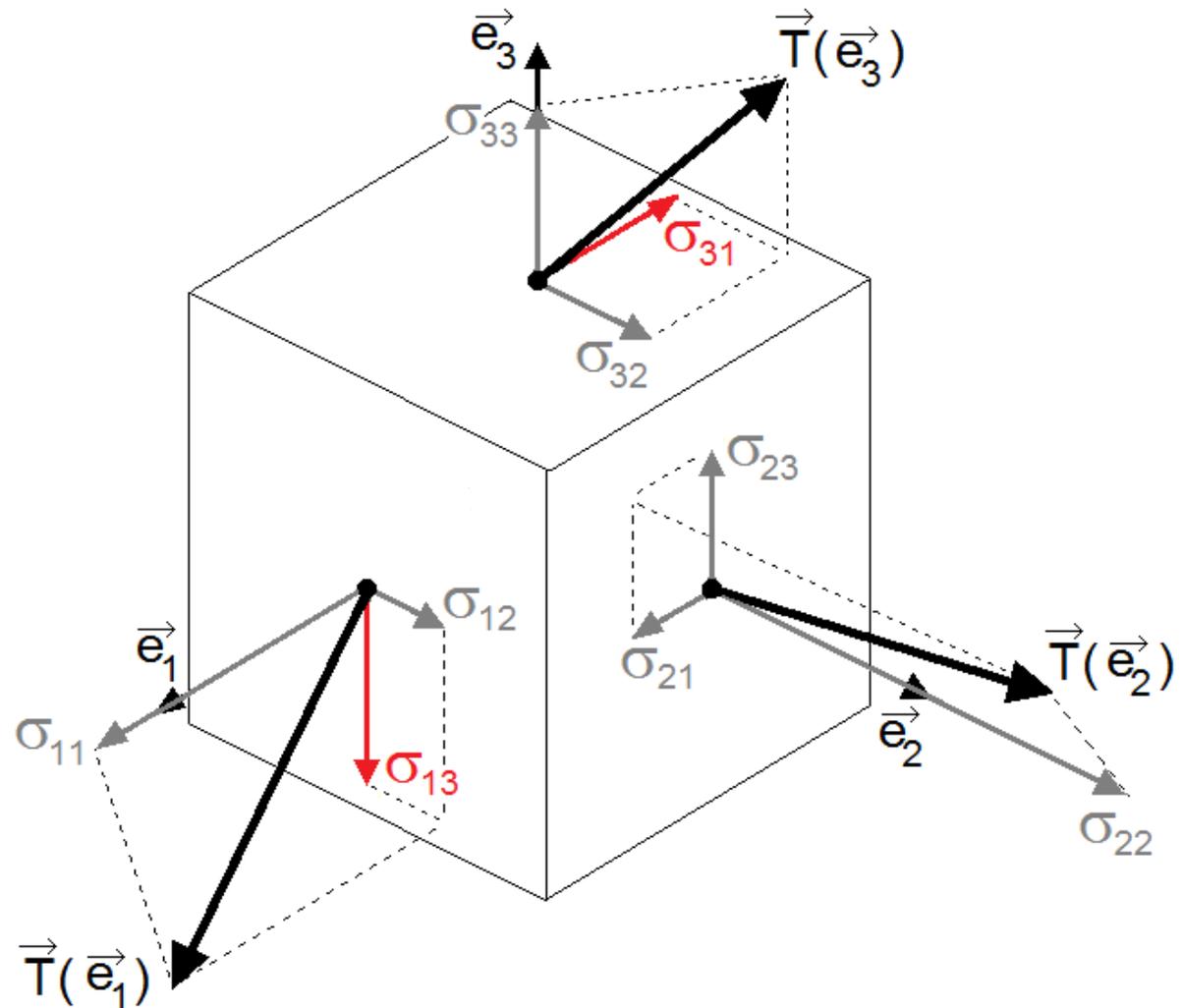
A. Théorème de Cauchy

Imaginons un volume cubique infinitésimal autour d'un point M, défini par les directions d'une base quelconque :

$$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

On peut représenter graphiquement les différents termes de la matrice du tenseur de Cauchy au voisinage de ce point et pour cette base :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



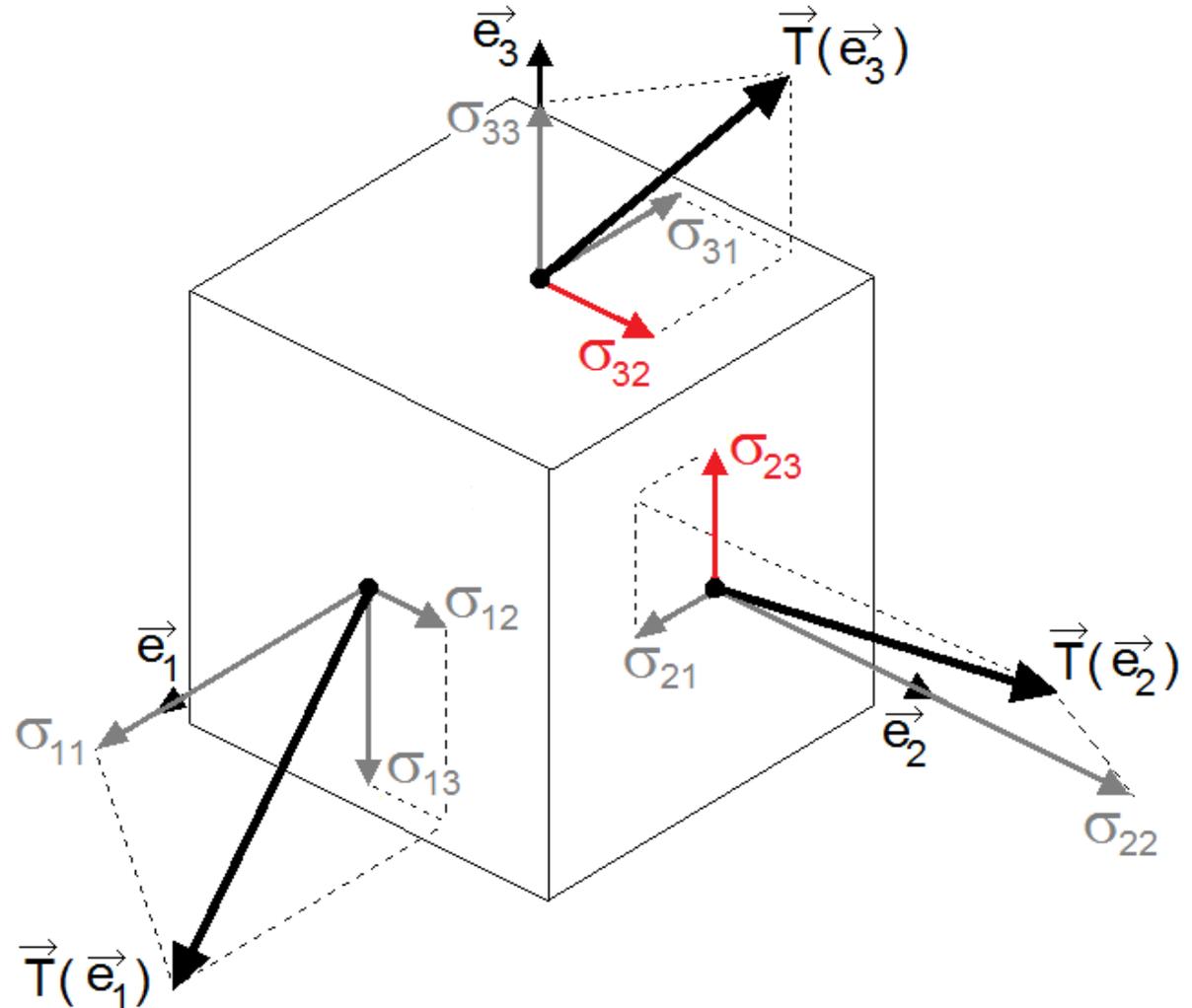
A. Théorème de Cauchy

Imaginons un volume cubique infinitésimal autour d'un point M , défini par les directions d'une base quelconque :

$$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

On peut représenter graphiquement les différents termes de la matrice du tenseur de Cauchy au voisinage de ce point et pour cette base :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



Séance 6

B. Directions principales, invariants

B. Directions principales, invariants

Le tenseur des contraintes étant symétrique, on peut lui transposer toutes les notions utilisées pour le tenseur $\bar{\bar{\epsilon}}$ des déformations linéarisées.

$\bar{\bar{\sigma}}$ possède donc une **base principale** orthonormée, composée de **vecteurs propres** :

$$(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$$

Ces vecteurs propres sont unitaires et orthogonaux deux-à-deux. Ils définissent les **directions principales de contraintes**. Dans cette base principale, la matrice du tenseur de Cauchy s'exprime par :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Les termes diagonaux de cette matrice sont les **valeurs propres** du tenseur, et sont appelées **contraintes principales**.

Notons que, dans un champ de tenseur quelconque, il n'y a aucune raison que les valeurs propres et vecteurs propres soient identiques d'un point à l'autre ou d'un instant à l'autre.

B. Directions principales, invariants

L'ordre des valeurs propres importe peu, donc on applique généralement la convention suivante :

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

On ordonne ces valeurs par ordre décroissant, et on ordonne également les trois vecteurs propres en conséquence.

On appelle :

σ_1 la **contrainte principale maximale**

σ_2 la **contrainte principale intermédiaire**

σ_3 la **contrainte principale minimale**

La base principale de contrainte a une signification physique. C'est celle dans laquelle il n'y a **pas de contrainte de cisaillement**, car tous les termes non-diagonaux de la matrice sont nuls.

Dans cette base, la contrainte pour une direction principale (par exemple pour $\vec{n} = \vec{e}_1$) est toujours colinéaire à cette direction.

B. Directions principales, invariants

Comme pour le tenseur des déformations linéarisées, il n'y a pas de moyen simple pour trouver les vecteurs et valeurs propres d'un tenseur de contraintes quelconque.

Les **invariants principaux** du tenseur de Cauchy sont les coefficients de son polynôme caractéristique :

$$\det(\bar{\sigma} - \sigma \bar{I}) = -\sigma^3 + \sigma_I \sigma^2 - \sigma_{II} \sigma + \sigma_{III}$$

Avec :

$$\begin{cases} \sigma_I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ \sigma_{II} = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 \\ \sigma_{III} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{cases}$$

Le premier invariant principal σ_I est la trace de $\bar{\sigma}$, et le troisième σ_{III} est son déterminant.

Les valeurs propres du tenseur de contraintes sont celles qui vérifient :

$$\begin{aligned} \det(\bar{\sigma} - \sigma \bar{I}) &= -\sigma^3 + \sigma_I \sigma^2 - \sigma_{II} \sigma + \sigma_{III} \\ &= -(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) \end{aligned}$$

B. Directions principales, invariants

Comme tout tenseur symétrique, on peut décomposer $\bar{\sigma}$ en une partie sphérique et une partie à trace nulle que l'on nomme **déviateur de contraintes** :

$$\bar{\sigma} = \sigma_m \bar{I} + \bar{\sigma}^d$$

Le scalaire σ_m est nommé contrainte moyenne et se calcule par :

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_I = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} \text{tr} \bar{\sigma} = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$$

Si le déviateur est nul, alors le tenseur de Cauchy est un tenseur sphérique, et on a :

$$\bar{\sigma} = \sigma_m \bar{I}$$

Dans ce cas toute direction est direction principale, et toutes les contraintes principales sont égales à la contrainte moyenne.

B. Directions principales, invariants

Le déviateur $\bar{\bar{\sigma}}^d$ est un tenseur qui exprime la partie **non-sphérique** de $\bar{\bar{\sigma}}$.

Dans une base quelconque, sa matrice s'écrit :

$$\bar{\bar{\sigma}}^d = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{3} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{33} - \sigma_{11}}{3} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}}{3} \end{bmatrix}$$

Et dans la base principale $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ de contraintes :

$$\bar{\bar{\sigma}}^d = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \end{bmatrix}$$

Séance 6

C. Cercle de Mohr

C. Cercle de Mohr

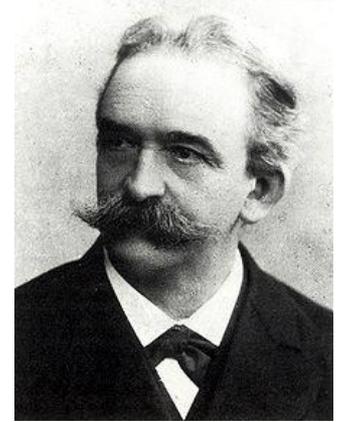
La méthode du **cercle de Mohr** est une technique de représentation graphique d'usage pratique pour le tenseur de Cauchy.

Cette représentation s'effectue dans le **plan de Mohr**, aussi appelé **plan image**. Il s'agit d'un repère abstrait dans lequel l'axe horizontal représente la composante normale d'un vecteur contrainte, et l'axe vertical représente sa composante tangentielle.

Chaque point de ce plan est donc l'extrémité d'un vecteur contrainte de coordonnées (T_n, T_t) , tel que ce vecteur contrainte s'exprime par :

$$\vec{T} = T_n \vec{n} + T_t \vec{t}$$

Il est possible de définir l'ensemble des positions licites que peut occuper cette extrémité T d'un vecteur contrainte $\overrightarrow{OT} = \vec{T}(\vec{n})$ quelconque dans le plan (O, T_n, T_t) , quand \vec{n} varie.



Christian Otto Mohr
1835-1918

C. Cercle de Mohr

On se place dans la base principale de contrainte $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$. Dans ce cas, on peut écrire :

$$\vec{T}(\vec{n}) = \vec{T}(n_j \vec{c}_j) = n_j \vec{T}(\vec{c}_j) = \sigma_j n_j \vec{c}_j$$

Le vecteur d'orientation \vec{n} de la facette à laquelle le vecteur contrainte est appliqué est unitaire, on peut donc écrire :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

La composante normale du vecteur contrainte s'obtient par projection de $\vec{T}(\vec{n})$ sur la direction normale définie par \vec{n} , ce qui s'obtient par un produit scalaire :

$$T_n = \vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{n} = \sigma_j n_j^2$$

Enfin, la norme de $\vec{T}(\vec{n})$ est donnée par $\|\vec{T}(\vec{n})\|^2 = \sigma_j^2 n_j^2$, et le théorème de Pythagore donne

$$\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = T_n^2 + T_t^2$$

C. Cercle de Mohr

On a donc un système linéaire de trois équations à trois inconnues, qui sont n_1^2 , n_2^2 , et n_3^2 , et dont la solution est donnée par :

$$n_1^2 = \frac{(T_n - \sigma_2)(T_n - \sigma_3) + T_t^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$n_2^2 = \frac{(T_n - \sigma_3)(T_n - \sigma_1) + T_t^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)}$$

$$n_3^2 = \frac{(T_n - \sigma_1)(T_n - \sigma_2) + T_t^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

Si on utilise la convention $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, les trois équations précédentes impliquent les trois inégalités suivantes :

$$\begin{cases} (T_n - \sigma_2)(T_n - \sigma_3) + T_t^2 \geq 0 \\ (T_n - \sigma_3)(T_n - \sigma_1) + T_t^2 \leq 0 \\ (T_n - \sigma_1)(T_n - \sigma_2) + T_t^2 \geq 0 \end{cases}$$

C. Cercle de Mohr

Ces inégalités peuvent se reformuler par :

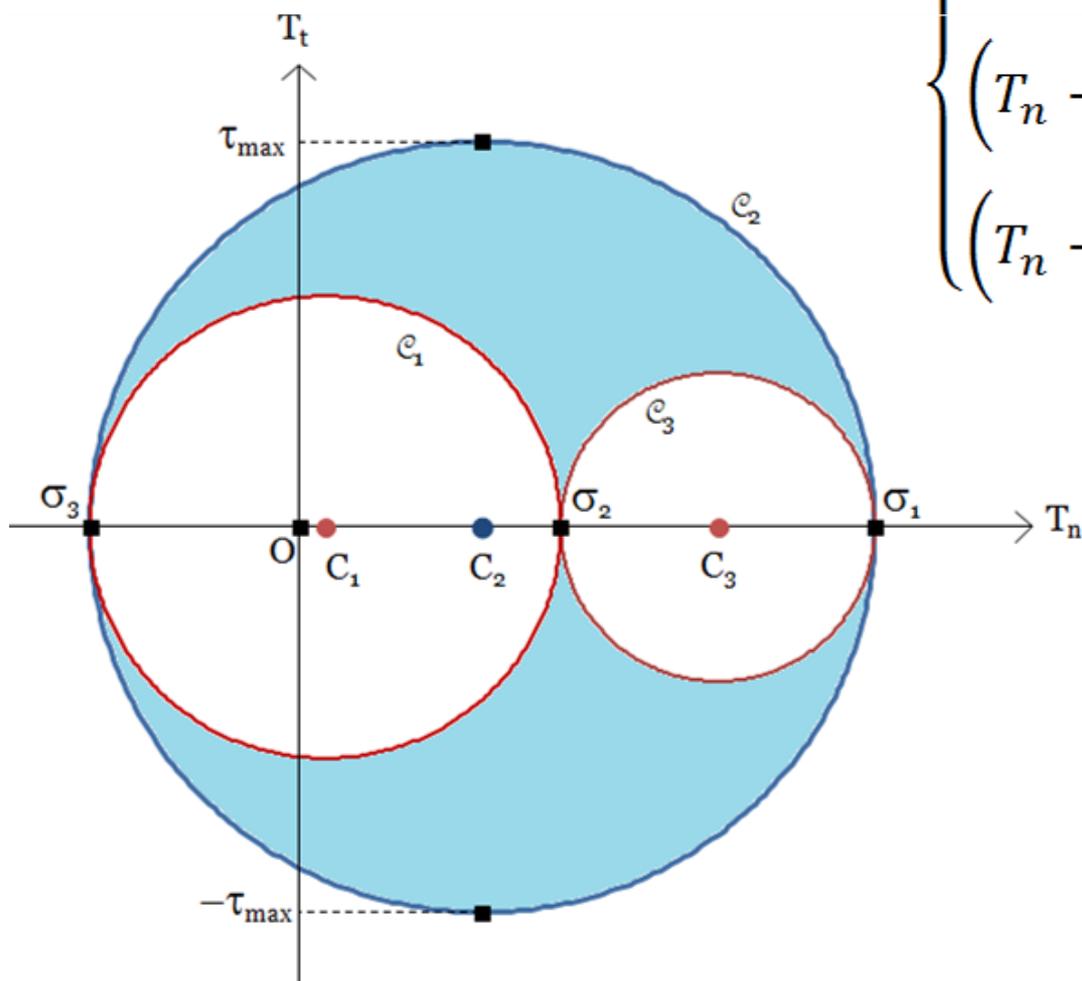
$$\begin{cases} \left(T_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + T_t^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \\ \left(T_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + T_t^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \\ \left(T_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + T_t^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \end{cases}$$

On reconnaît ici trois équations de cercles. Par exemple, la première expression décrit un cercle de centre $\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0 \right)$ et de rayon $\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$. Pour être plus précis, l'équation exprime que l'extrémité du vecteur $\vec{T}(\vec{n})$ se situe à l'extérieur de ce cercle.

La deuxième expression décrit l'intérieur d'un second cercle, et la troisième expression décrit l'extérieur d'un troisième cercle. L'extrémité du vecteur contrainte est donc située à l'intérieur de l'intersection de trois domaines du plan.

C. Cercle de Mohr

Le **tricerкле de Mohr** se représente ainsi :



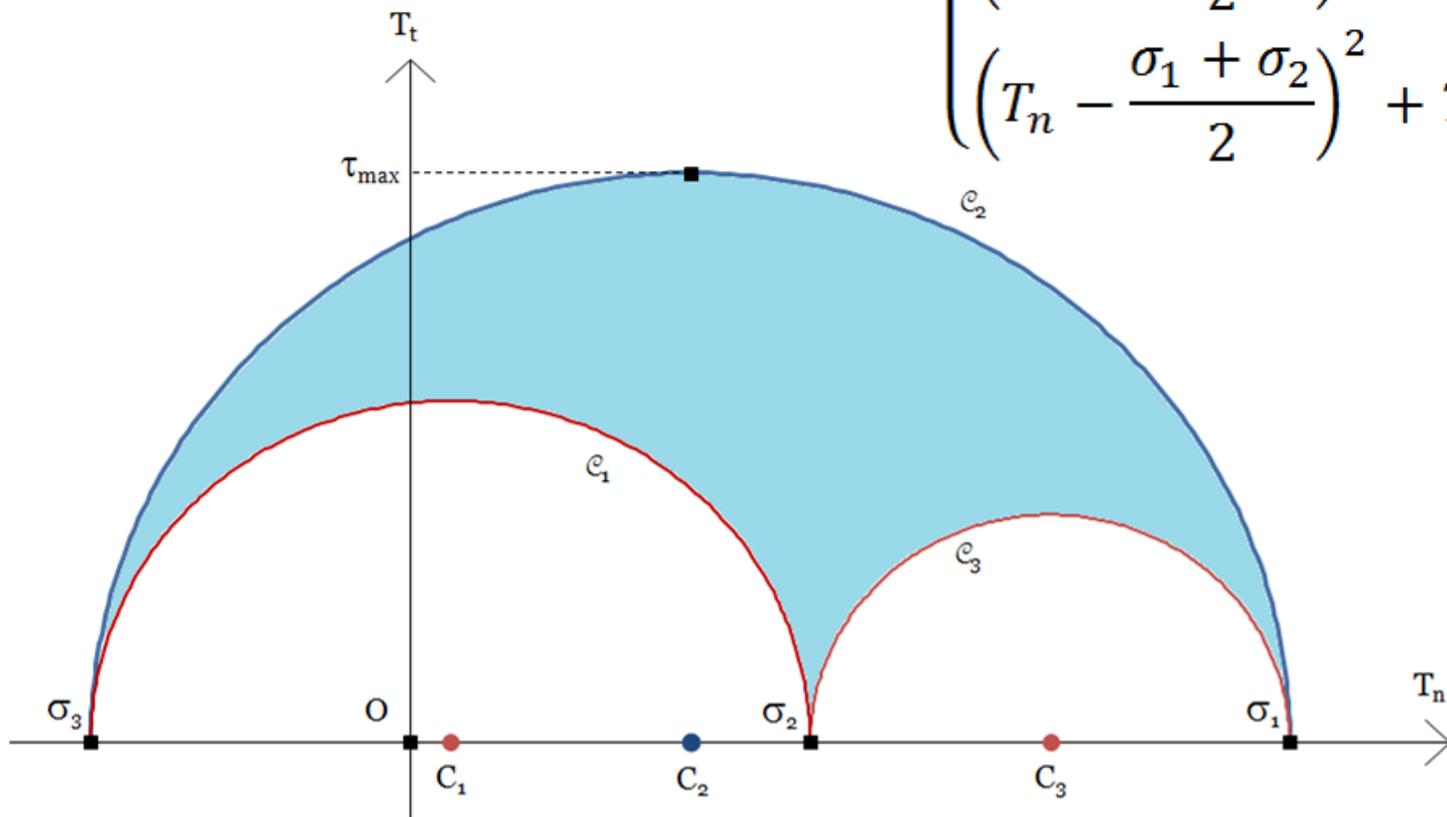
$$\left\{ \begin{array}{l} \left(T_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + T_t^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \\ \left(T_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + T_t^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \\ \left(T_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + T_t^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \end{array} \right.$$

Les équations de la MMC expriment que l'extrémité du vecteur contrainte se situe dans la zone bleue, c'est-à-dire à la fois à l'intérieur du cercle \mathcal{C}_2 et à l'extérieur des cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_3 .

C. Cercle de Mohr

Pour des raisons de symétrie, on a souvent coutume de ne représenter que la moitié supérieure du plan de Mohr :

$$\begin{cases} \left(T_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + T_t^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \\ \left(T_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + T_t^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \\ \left(T_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + T_t^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \end{cases}$$

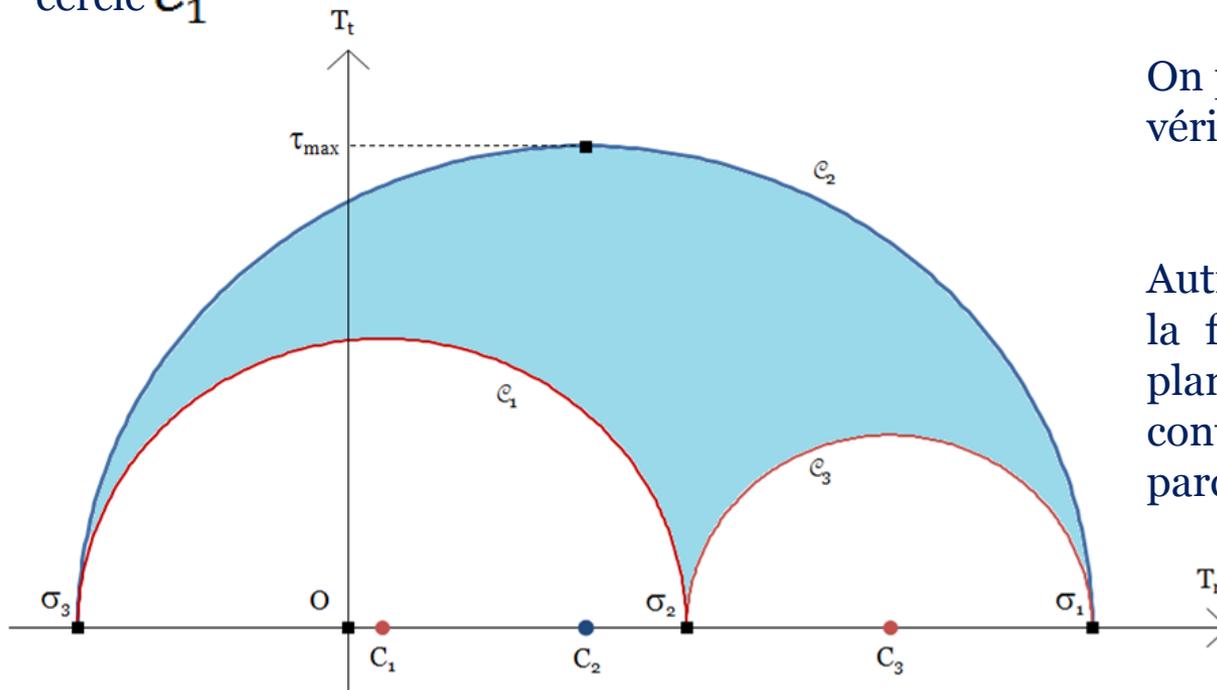


C. Cercle de Mohr

Attardons-nous de nouveau sur la première des trois inégalités proposées :

$$\left(T_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + T_t^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

Si on remplace cette inégalité par une égalité, on obtient alors très exactement l'équation du cercle \mathcal{C}_1



On peut montrer que, dans ce cas, on vérifie la formule :

$$n_1 = 0$$

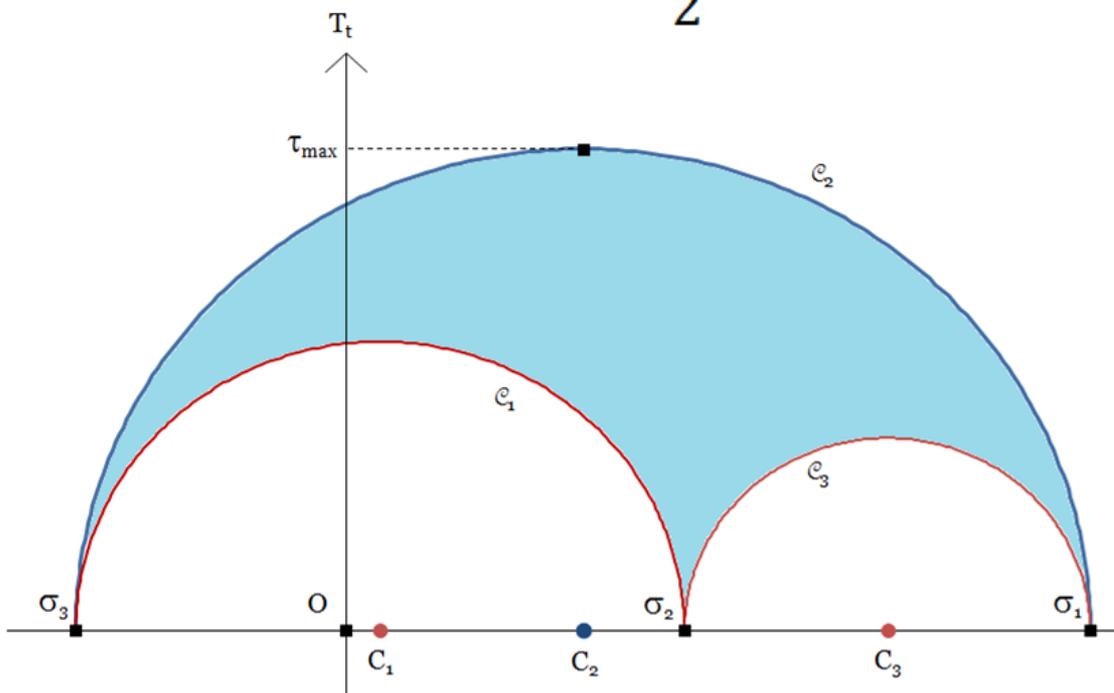
Autrement dit, lorsque la normale à la facette considérée appartient au plan (\vec{c}_2, \vec{c}_3) , l'extrémité du vecteur contrainte dans le plan de Mohr parcourt le cercle \mathcal{C}_1 .

C. Cercle de Mohr

On remarque sur la représentation graphique que la valeur maximale de la composante tangentielle T_t est égale au rayon du cercle \mathcal{C}_2 , que l'on appelle aussi **grand cercle de Mohr**.

La valeur de cette composante est appelée **contrainte de cisaillement maximale**, et vaut

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$



La contrainte normale vaut alors :

$$T_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

Le point correspondant à cette situation est situé sur \mathcal{C}_2 , donc il correspond à une orientation de facette dont la normale appartient au plan (\vec{c}_1, \vec{c}_3) .

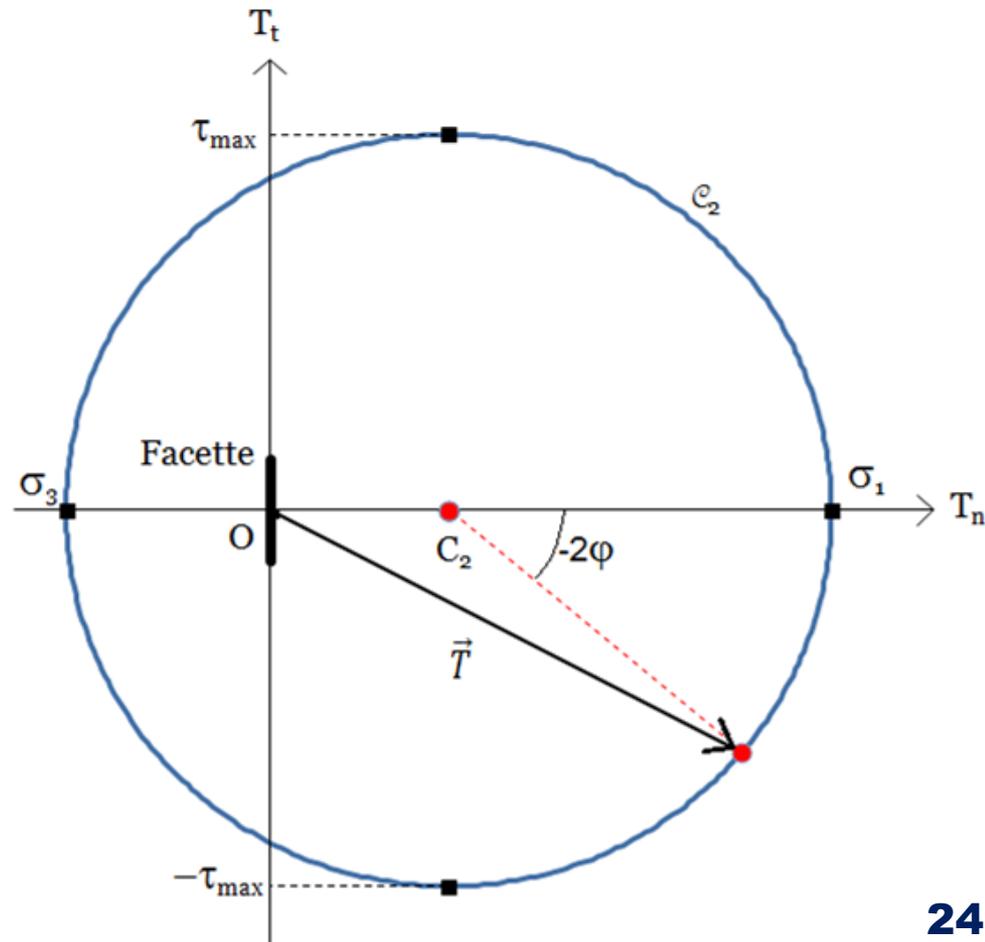
Le cisaillement maximal s'obtient toujours dans le plan défini par les contraintes principales maximale et minimale.

C. Cercle de Mohr

On va maintenant se concentrer sur le grand cercle de Mohr, qui est celui qui contient la facette de cisaillement maximal. C'est une démarche très courante, notamment en mécanique des sols. Tous les raisonnements sur \mathcal{C}_2 s'appliquent également aux deux autres cercles.

Comme on l'a vu, se placer sur le grand cercle \mathcal{C}_2 revient à considérer une facette dont la normale appartient au plan des directions de contraintes principales maximale et minimale, noté (\vec{c}_1, \vec{c}_3) .

Une telle facette est représentée sur ce schéma :



C. Cercle de Mohr

La normale à la facette a une orientation donnée, qu'on peut définir à partir d'un angle φ dans le repère $(M, \vec{c}_1, \vec{c}_3)$.

Les coordonnées de cette normale \vec{n} et du vecteur tangent \vec{t} dans le repère principal de contraintes $(M, \vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ (aussi appelé **espace réel**) sont donc :

$$\vec{n} = \begin{cases} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{cases} \quad \vec{t} = \begin{cases} -\sin\varphi \\ 0 \\ \cos\varphi \end{cases}$$

Dans le même repère, le vecteur contrainte sur la facette a donc les coordonnées suivantes :

$$\vec{T}(\vec{n}) = \bar{\sigma}\vec{n} = \begin{cases} \sigma_1 \cos\varphi \\ 0 \\ \sigma_3 \sin\varphi \end{cases}$$

Les composantes normale et tangentielle de ce vecteur s'obtiennent par :

$$T_n = \vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{n} = \sigma_1 \cos^2\varphi + \sigma_3 \sin^2\varphi$$

$$T_t = \vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{t} = -\sigma_1 \cos\varphi \sin\varphi + \sigma_3 \cos\varphi \sin\varphi$$

C. Cercle de Mohr

On peut reformuler ces expressions par :

$$T_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\varphi)$$

$$T_t = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(-2\varphi)$$

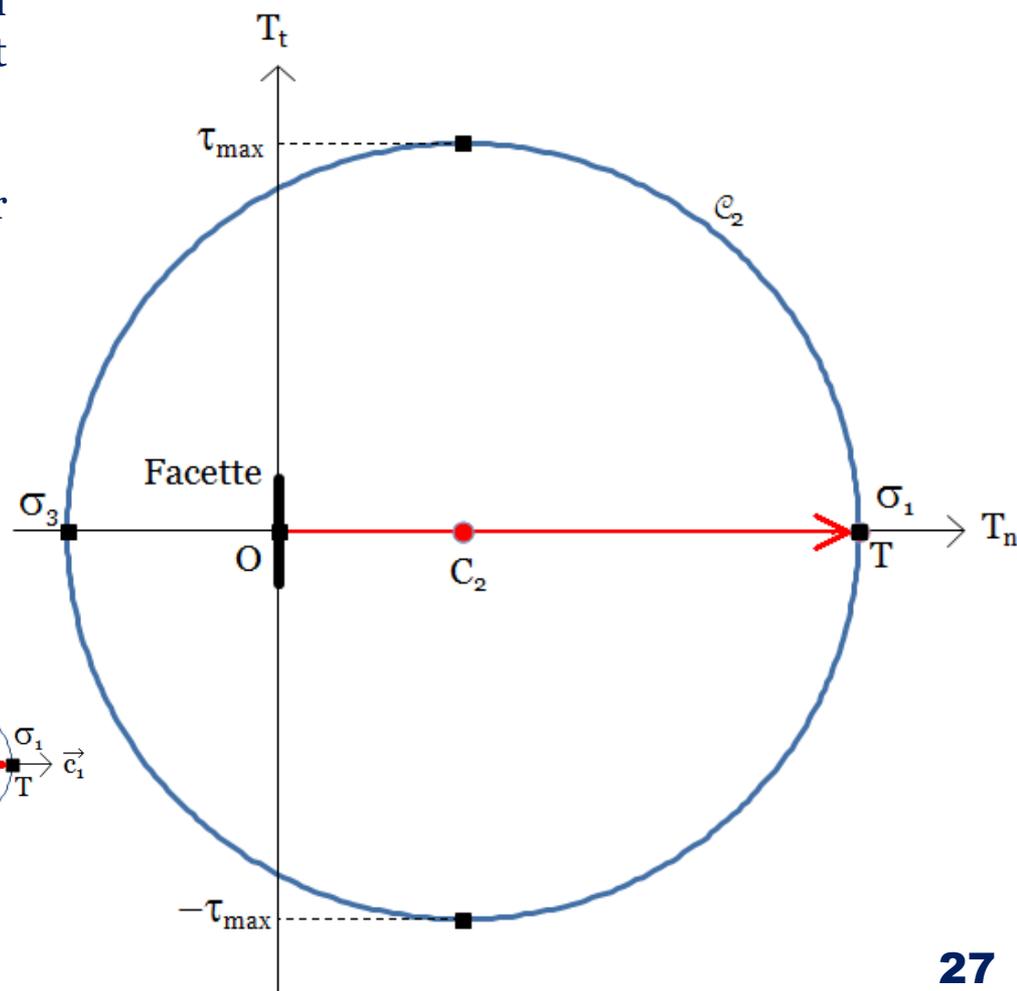
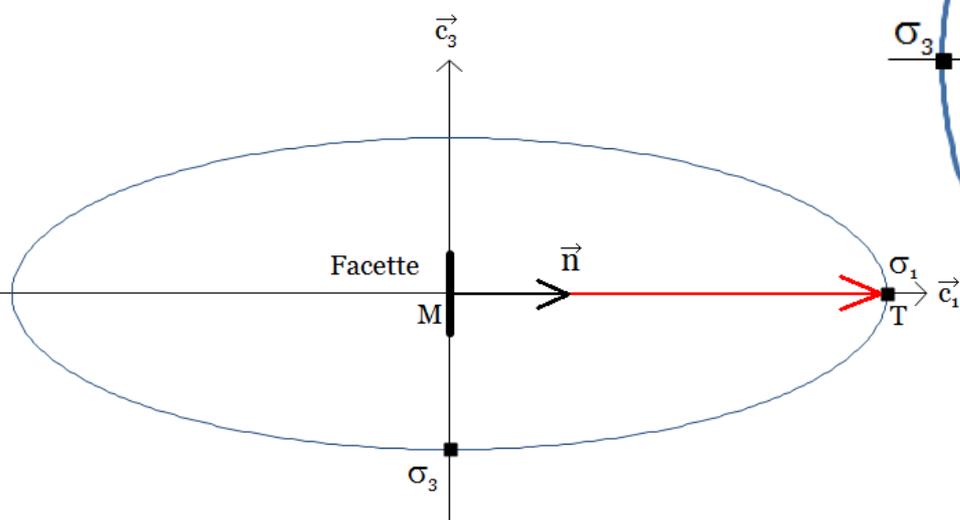
On retrouve donc l'équation du cercle \mathcal{C}_2 et on constate que lorsque la facette tourne d'un angle φ dans le plan réel, le vecteur $\overrightarrow{C_2T}$ (qui lie le centre du cercle à l'extrémité du vecteur contrainte) tourne de -2φ dans le plan image.

C'est une propriété intéressante que l'on va illustrer graphiquement, en faisant tourner progressivement la facette et en observant l'influence de cette rotation sur le vecteur contrainte.

C. Cercle de Mohr

Imaginons une facette dont la normale coïncide avec \vec{c}_1 . Elle est sur une direction principale, donc il n'y a pas de cisaillement et la contrainte normale vaut σ_1 .

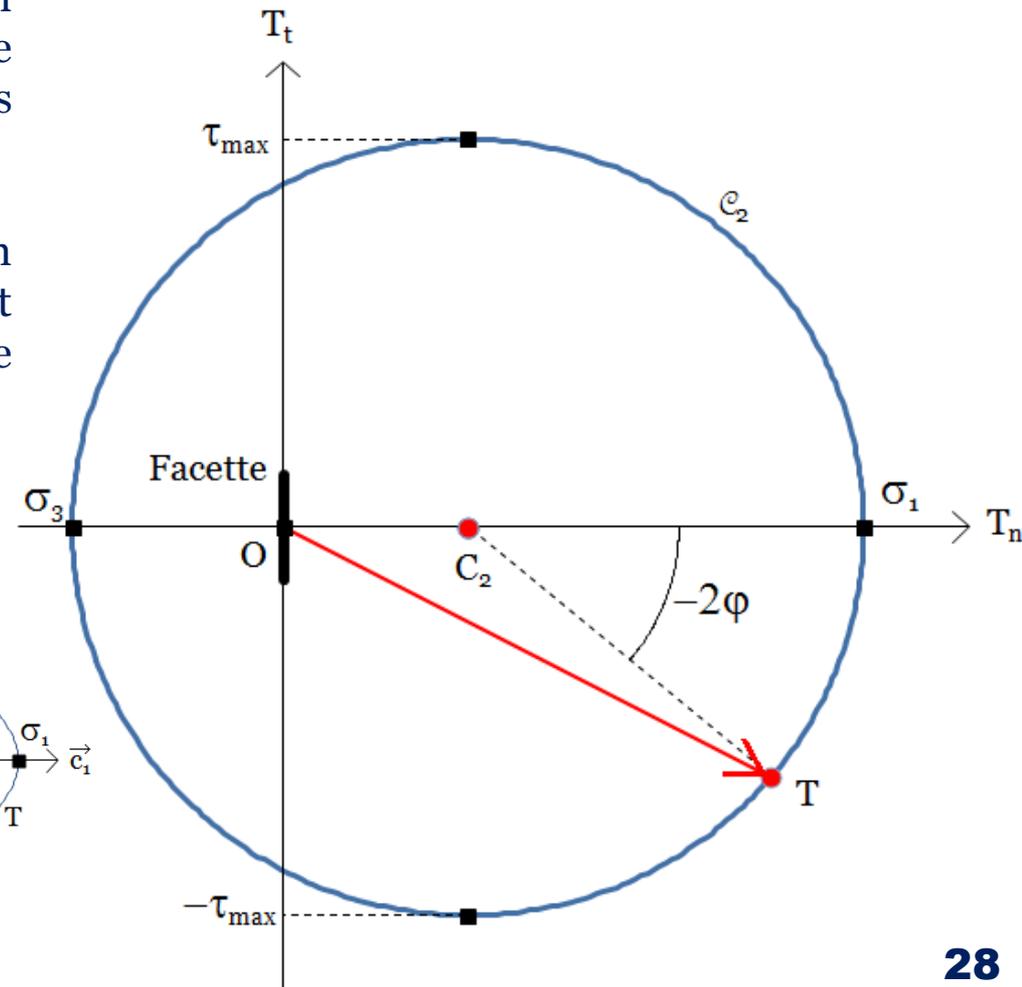
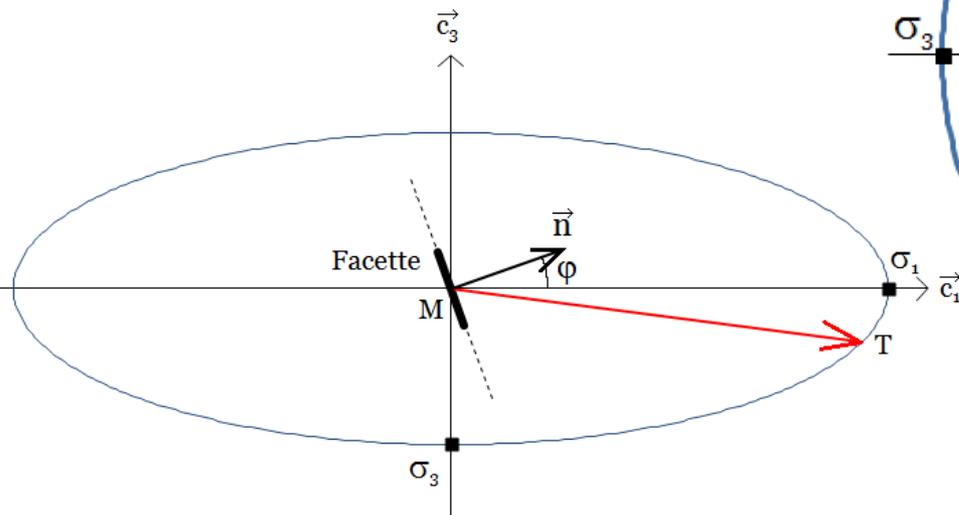
Dans le plan de Mohr, l'extrémité du vecteur contrainte est donc sur l'axe des abscisses.



C. Cercle de Mohr

On fait maintenant tourner cette facette d'un angle $\varphi = 20^\circ$ dans l'espace réel, ce qui fait apparaître une composante de cisaillement : le vecteur contrainte n'est plus colinéaire à \vec{n} .

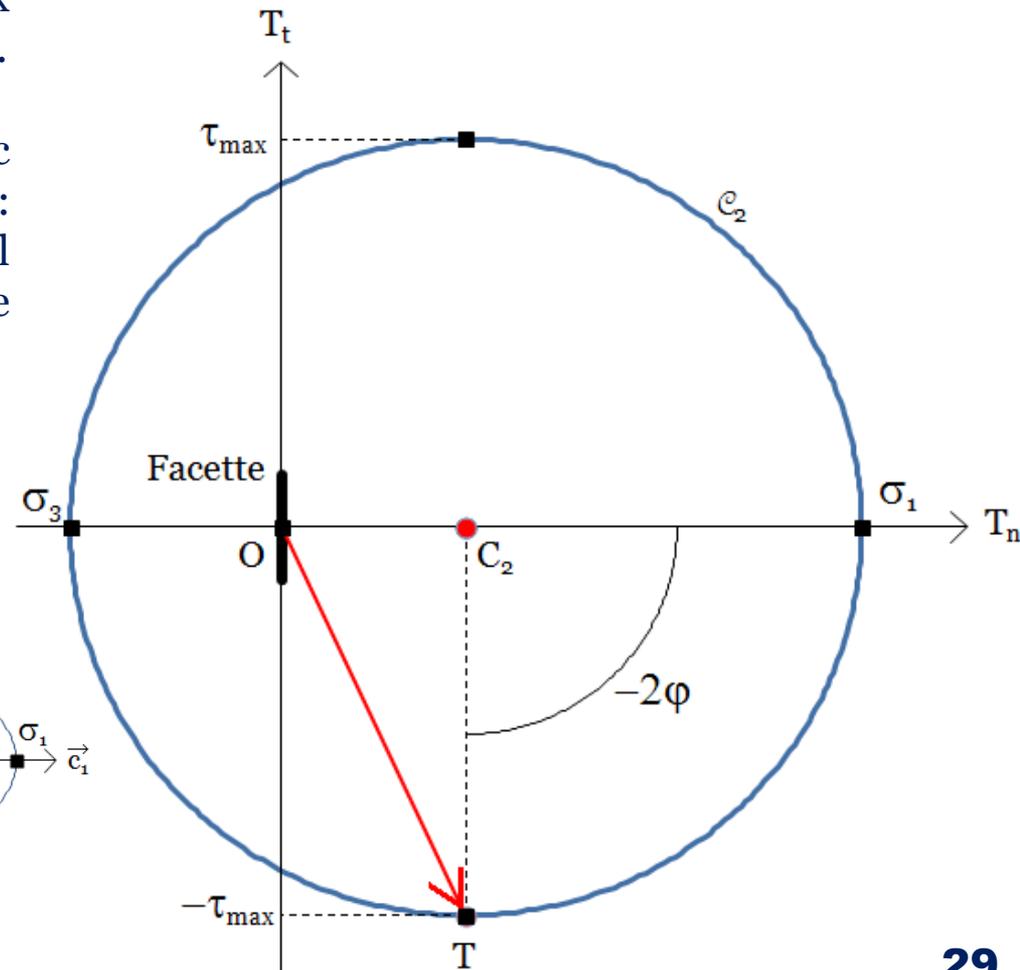
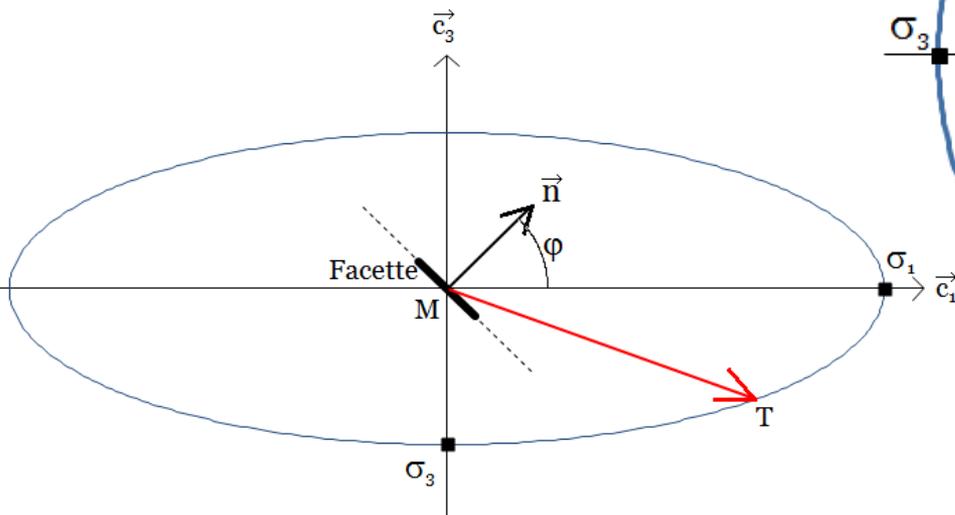
Dans le plan image, le vecteur $\overrightarrow{C_2T}$ a bien tourné de $-2\varphi = -40^\circ$, et le point T est sorti de l'axe des abscisses pour faire apparaître la contrainte de cisaillement.



C. Cercle de Mohr

Si on fait tourner la facette de $\varphi = 45^\circ$, on s'oriente selon une bissectrice des deux directions principales maximale et minimale.

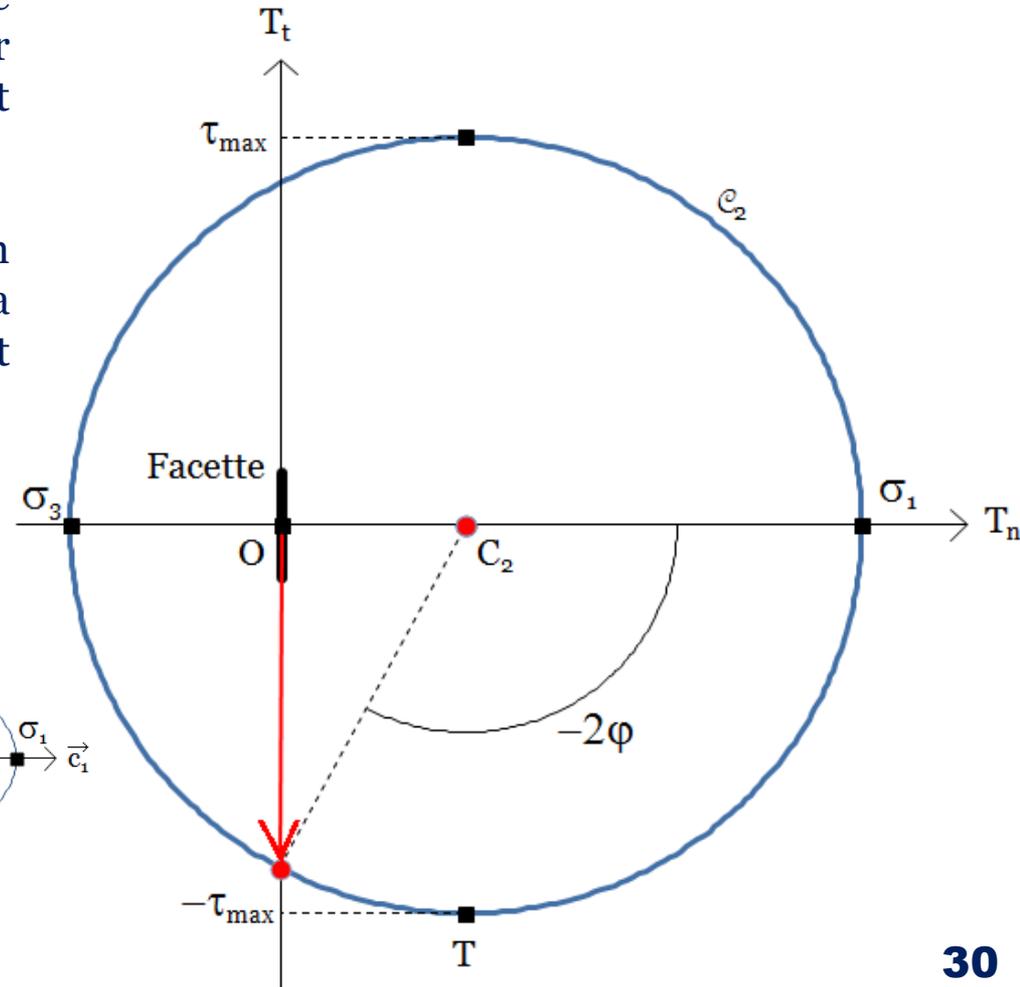
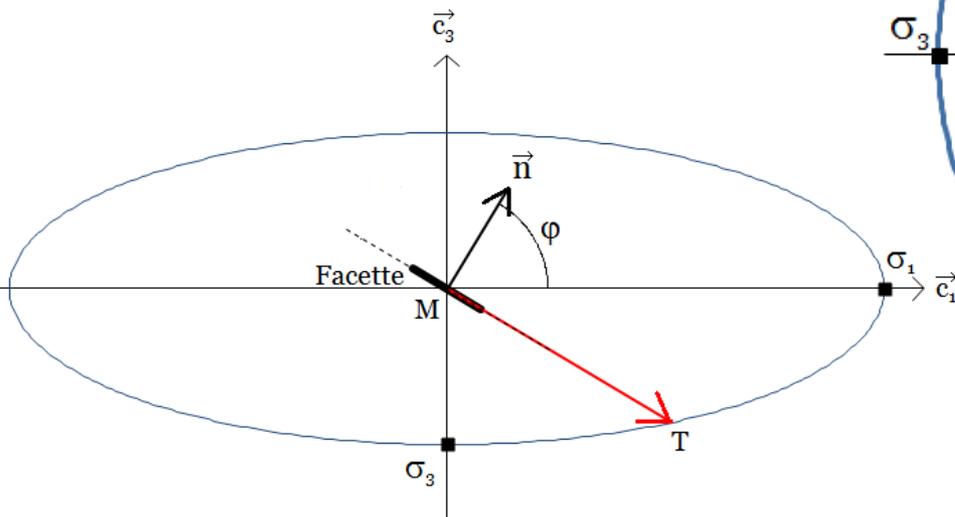
Dans le plan image, le vecteur $\overrightarrow{C_2T}$ a donc tourné de -90° et se place à la verticale : on atteint le point de cisaillement maximal (en valeur absolue), où la contrainte tangentielle est telle que $|T_t| = \tau_{max}$.



C. Cercle de Mohr

Pour une rotation d'environ $\varphi = 59^\circ$ (dans cet exemple seulement), on atteint une situation particulière pour laquelle le vecteur contrainte est colinéaire au vecteur tangent de la facette \vec{t} .

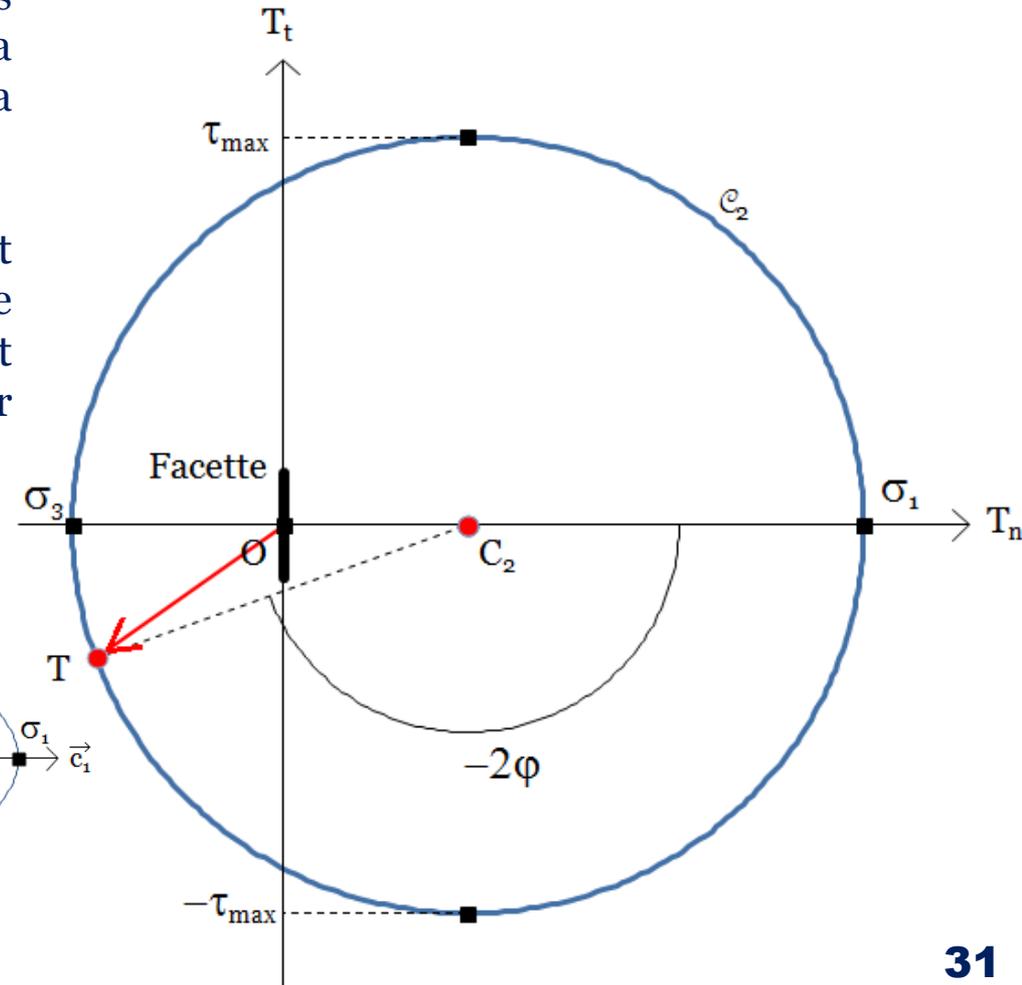
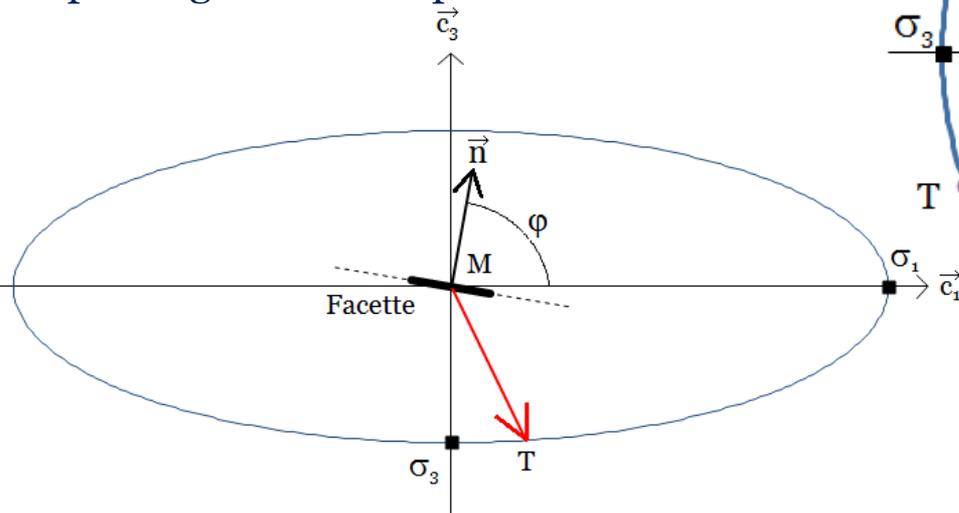
Dans le plan de Mohr, ceci correspond à un état de cisaillement pur, pour lequel la composante normale est nulle : le point T est maintenant sur l'axe des ordonnées.



C. Cercle de Mohr

Si on continue la rotation, on fait réapparaître une contrainte normale, mais celle-ci est maintenant orientée dans la direction opposée à l'orientation \vec{n} de la facette.

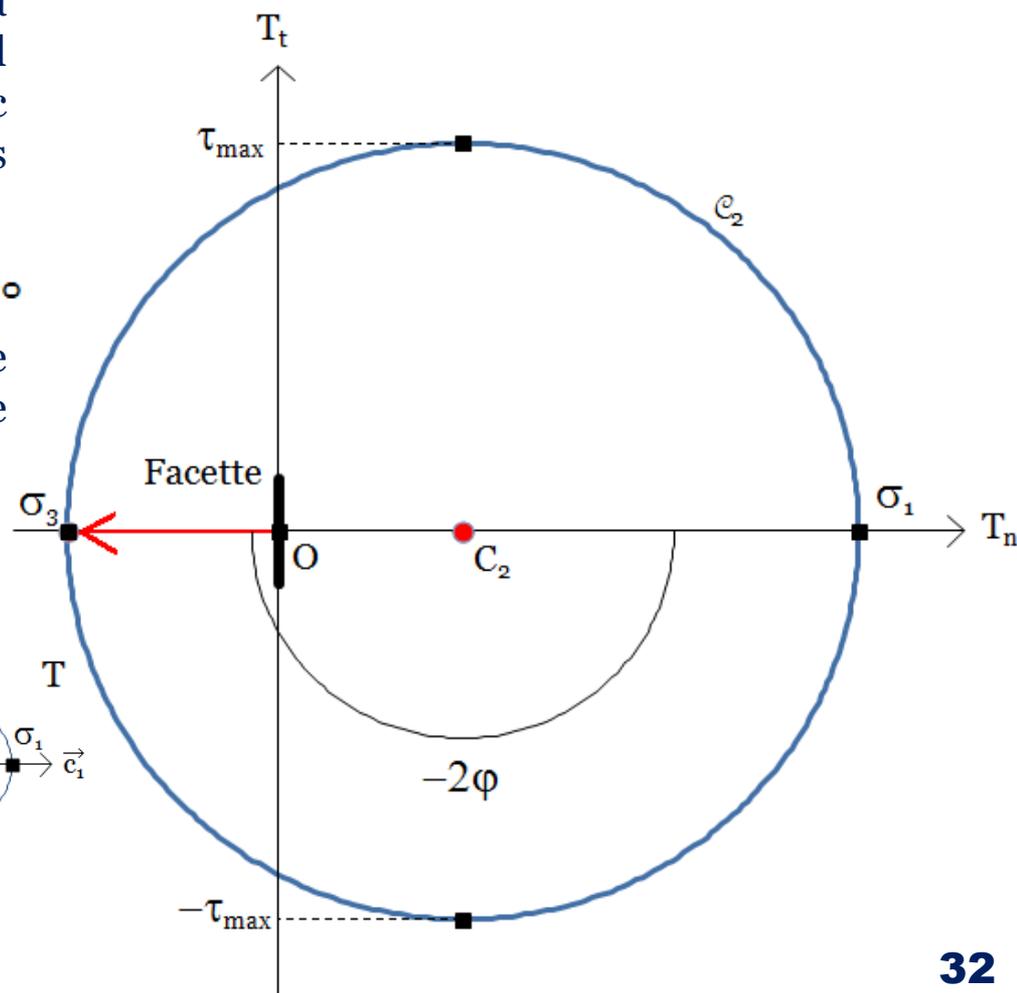
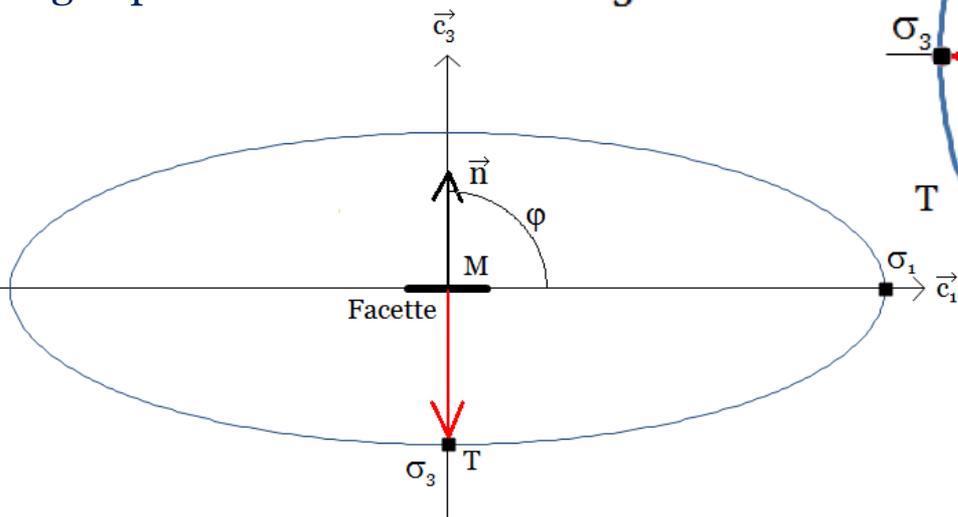
Dans le plan de Mohr, on tourne de -2φ et on fait également apparaître à nouveau une composante normale, mais celle-ci est négative : le point T est maintenant situé sur la partie gauche du repère.



C. Cercle de Mohr

Lorsque l'on atteint $\varphi = 90^\circ$ dans le plan réel, on aligne de nouveau la normale à la facette sur une direction principale, mais il s'agit maintenant de \vec{c}_3 . Le vecteur \vec{T} est donc à nouveau colinéaire à \vec{n} , mais pointe dans la direction opposée.

Dans le plan de Mohr, on a tourné de -180° et on a de nouveau le point T situé sur l'axe des abscisses. La contrainte a changé de signe pour atteindre la valeur σ_3 .



C. Cercle de Mohr

On peut remarquer que :

-Lorsque l'on a fait tourner la facette de 90° dans le plan réel des directions principales, on a fait tourner le vecteur $\overrightarrow{C_2T}$ de -180° dans l'espace image du plan de Mohr. Au cours de cette rotation, on est passé de la contrainte principale maximale σ_1 à la contrainte principale minimale σ_3 .

-Au cours de cette rotation on a rencontré la **facette de cisaillement maximal**, qui a pour orientation la bissectrice des deux directions principales.

-Comme les deux contraintes principales sont de signes opposés dans cet exemple, on est également passé par une **facette de cisaillement pur**, pour laquelle la contrainte normale s'annule. Ça ne serait pas arrivé si les deux contraintes principales étaient de même signe.

-Au cours de la rotation, l'extrémité du vecteur contrainte dans l'espace réel a parcouru une ellipse de demi-grand axe σ_1 et de demi-petit axe σ_3 .

Dans les conventions de la MMC, une contrainte normale positive correspond à une traction et une contrainte négative à une compression. Dans d'autres disciplines (mécanique des structures, mécanique des sols, etc.), c'est la convention inverse qui est utilisée.

Séance 6

D. Etats de contrainte particuliers

D. Etats de contrainte particuliers

Comme pour le tenseur des déformations linéarisées, on peut définir des formes particulières du tenseur de Cauchy, qui correspondent à des états de contrainte particuliers.

Il n'y a pas de correspondance directe entre un état particulier de contrainte et un état particulier de déformation : l'un n'implique pas l'autre, et inversement.

On dit que $\bar{\bar{\sigma}}$ est un **tenseur de contrainte hydrostatique** s'il est sphérique. Dans ce cas son déviateur est nul, et il peut s'écrire :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sigma_m \bar{\bar{I}}$$

Les trois contraintes principales sont égales à la contrainte moyenne σ_m , et toutes les directions sont des directions principales de contrainte.

C'est en particulier l'état de contrainte qui règne au sein d'un fluide au repos. Dans le cas, l'opposée de la contrainte moyenne est nommée « pression » :

$$p = -\sigma_m$$

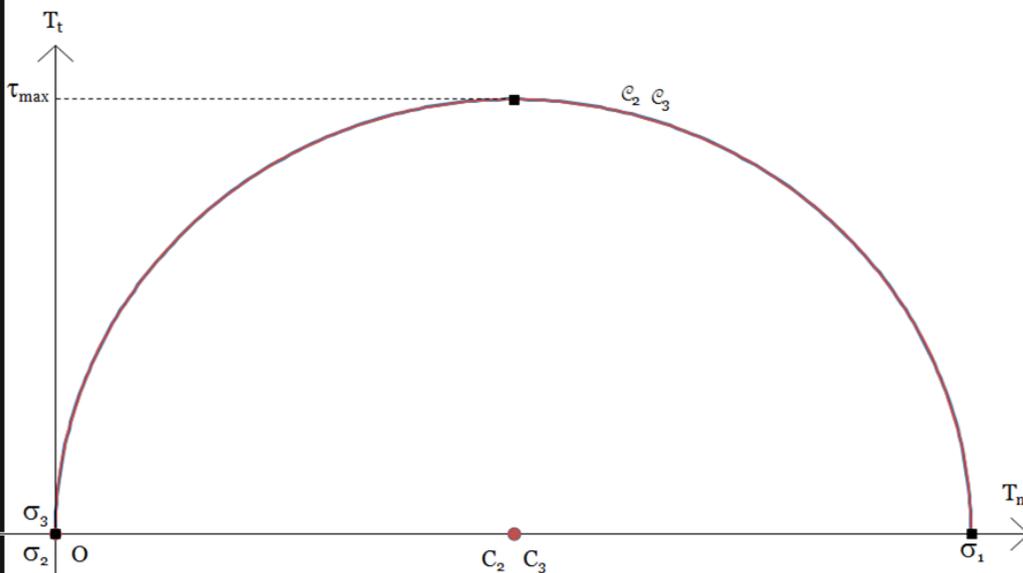
D. Etats de contrainte particuliers

On est en **état de traction ou de compression simple** selon la direction \vec{u} si \vec{u} est direction principale et si la contrainte principale correspondante est la seule non-nulle. La matrice du tenseur de contrainte a alors l'allure suivante dans une base principale :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur contrainte \vec{T} subi par toute facette est toujours colinéaire à \vec{u} . L'état de traction ou compression dépend du signe de la seule contrainte principale non-nulle.

Dans le plan de Mohr, cet état de contrainte se réduit à un cercle tangent à l'axe des ordonnées.



D. Etats de contrainte particuliers

On est en **état de cisaillement simple** selon les directions \vec{u} et \vec{u}' si la matrice du tenseur de contrainte dans une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{u}', \vec{u}'')$ a l'allure suivante :

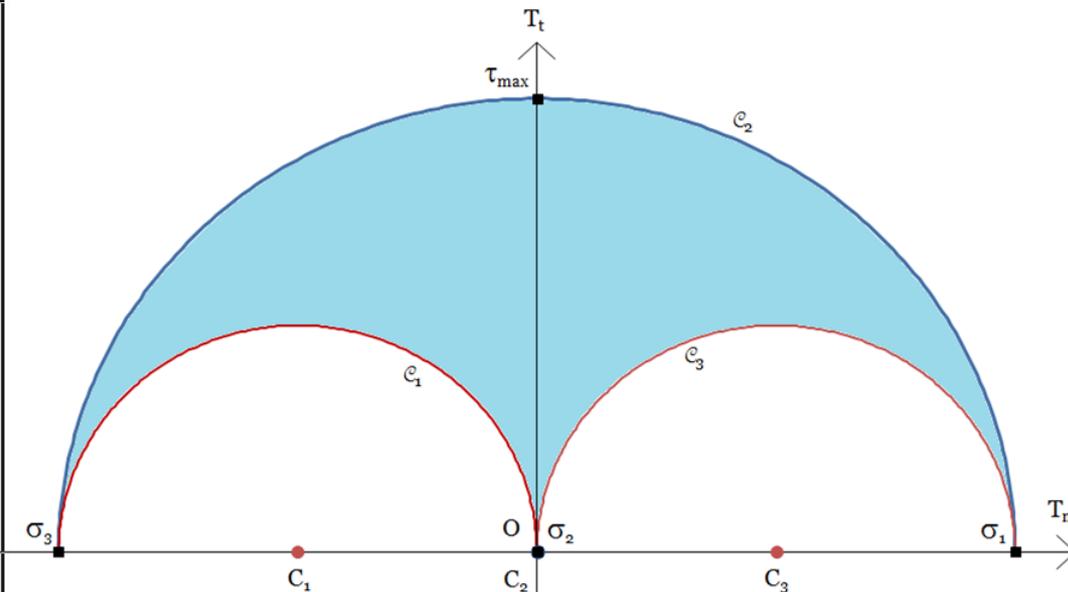
$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La base propre d'un tel état de contrainte est la base $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ telle que :

$$\begin{cases} \vec{c}_1 = \frac{\vec{u} + \vec{u}'}{\sqrt{2}} \\ \vec{c}_2 = \vec{u}'' \\ \vec{c}_3 = \frac{-\vec{u} + \vec{u}'}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Dans cette base, la matrice de $\bar{\bar{\sigma}}$ est :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_{12} \end{bmatrix}$$



D. Etats de contrainte particuliers

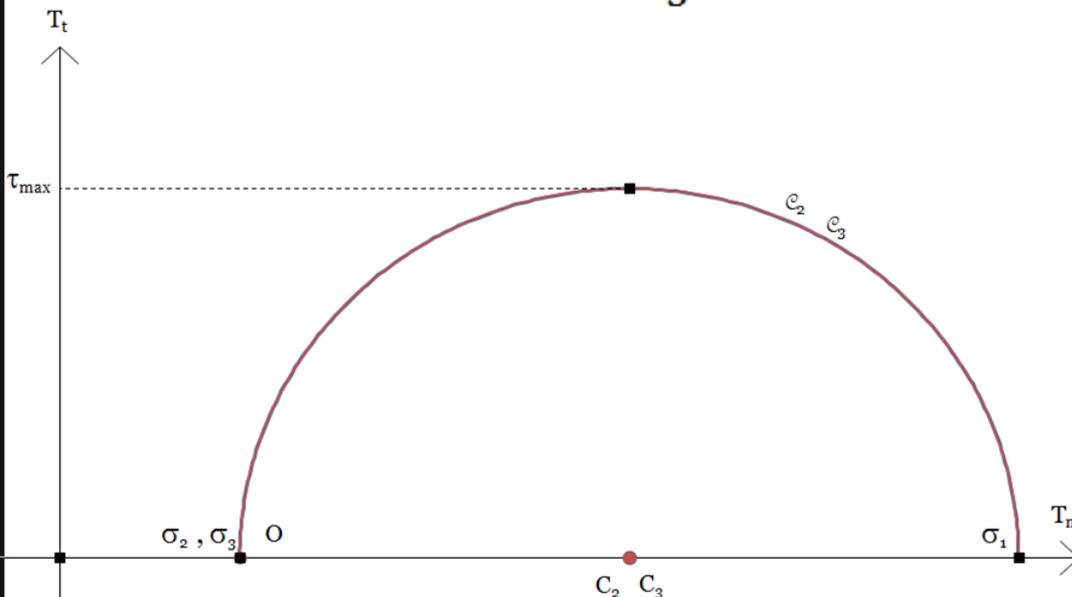
On est en **état de contrainte triaxial de révolution** si deux contraintes principales sont égales et non-nulles. Généralement il s'agit des contraintes minimale et intermédiaire, et la matrice du tenseur de contrainte dans la base principale a l'allure suivante :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

C'est un état extrêmement courant en mécanique des sols : c'est celui qui règne le plus souvent au sein d'un sol simple (la contrainte principale maximale étant verticale, et les deux autres étant selon deux directions horizontales quelconques). On a alors :

σ_1 : Contrainte verticale
 σ_3 : Contrainte horizontale

On le retrouve également dans l'**essai triaxial de révolution**, qui est un des essais les plus courants d'identification des propriétés mécaniques d'un sol.



D. Etats de contrainte particuliers

On est en **état de contrainte plane** si une des contraintes principales est nulle. Si par exemple il s'agit de σ_3 , l'état de contrainte sera plan dans un plan perpendiculaire à \vec{c}_3 . Dans la base principale, la matrice du tenseur de contrainte s'écrira alors :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans une base quelconque $(\vec{u}, \vec{u}', \vec{c}_3)$ contenant la direction \vec{c}_3 , la matrice du tenseur de Cauchy aura l'expression générale suivante :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est la signature d'un état de contrainte plane.

