Mécanique des milieux continus

Séance 5 : Relations fondamentales de la mécanique

Guilhem MOLLON

GEO3 2012-2013

Plan de la séance

A. Conservation de la masse

1. Axiome
2. Forme intégrale et forme locale
3. Débit-masse

B. Principe fondamental de la dynamique

1. Notion de contrainte
2. Définitions
3. PFD

C. Autres principes fondamentaux

1. Théorème de l’énergie cinétique
2. Principe des puissances virtuelles
3. Thermodynamique

A. Conservation de la masse

A. Conservation de la masse

On va maintenant considérer que le milieu déformable que l'on étudie est muni d'**une masse**.

Plus précisément, on définit un champ scalaire, noté ρ , et dépendant de l'espace et du temps, que l'on appellera **masse volumique**.

Ce champ sera supposé continu sur le domaine d'étude. Pour tout domaine D_t , la masse totale peut alors s'écrire :

$$m(D_t) = \int_{D_t} dm = \int_{D_t} \rho(\vec{x}, t) dv$$

La masse d'un domaine est donc l'intégrale du champ « masse volumique » sur ce domaine à un instant donné.

A. Conservation de la masse

L'axiome de conservation de la masse traduit le fait que la masse d'un domaine matériel (c'est-à-dire d'un domaine constitué à tout instant des mêmes particules matérielles) est constante dans le temps.

Ceci est logique, puisque si un domaine est toujours constitué des mêmes particules, il n'y a guère de raison qu'il change de masse.

L'axiome s'écrit donc :

La masse de tout domaine matériel reste constante si l'on suit ce domaine dans son mouvement.

Il s'agit du premier grand principe de la mécanique. Il signifie que l'on exclue toute réaction chimique, toute radioactivité, tout effet de mélange, etc.

A. Conservation de la masse

On cherche à exprimer cet axiome mathématiquement. Pour cela on utilise la dérivée matérielle appliquée à la masse d'un domaine matériel :

$$\frac{D}{Dt}[m(D_t)] = 0 \qquad \frac{D}{Dt}\int_{D_t} \rho dv = 0$$

L'intégrale est à l'intérieur de la dérivée particulaire, ce qui rend les développements compliqués. On peut néanmoins montrer que l'axiome s'exprime par :

$$\int_{D_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{V})\right] dv = 0$$

Si l'on souhaite conserver une dérivée particulaire, on peut aussi l'exprimer par :

$$\int_{D_t} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot div(\vec{V})\right] dv = 0$$

Il s'agit de deux **formes intégrales** de l'axiome, exprimées sur un domaine matériel.

A. Conservation de la masse

A partir de l'expression $\int_{D_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \vec{V}\right)\right] dv = 0$, on peut utiliser Ostrogradsky :

$$\int_{D_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{S_t} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Cette expression fait apparaître deux termes :

$\int_{D_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$ est un terme instationnaire de variation à l'intérieur du domaine.

$\int_{S_t} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS$ est un terme convectif sur la surface S_t du domaine, de normale sortante $\vec{n}$.

La somme de ces deux termes est nulle pour un domaine matériel.

A. Conservation de la masse

Observons les deux formes intégrales sur un domaine matériel :

$$\int_{D_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{V})\right] dv = 0 \qquad \int_{D_t} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot div(\vec{V})\right] dv = 0$$

Ces deux expressions sont valables sur n'importe quel domaine matériel. Or un champ continu dont l'intégrale sur tout domaine est nulle est forcément nul lui aussi. On a donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{V}) = 0 \qquad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot div\,\vec{V} = 0$$

Il s'agit de deux **formes locales de l'axiome** de conservation de la masse, qui sont valables en un point donné, et non plus sur un domaine matériel.

On en déduit en particulier : $$div(\vec{V}) = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$$

Ceci donne une nouvelle signification physique de la divergence du champ de vitesse : elle est opposée à la variation relative de masse volumique.

A. Conservation de la masse

3. Notion de débit-masse

On considère maintenant, non plus un domaine matériel D_t, mais un domaine fixe D, dont la surface S définit un champ de normales sortantes $\vec{n}$.

On appelle **débit masse à travers** S le terme :

$$q_m = \int_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

Le terme $\vec{V} \cdot \vec{n}$ est une projection du champ de vitesse sur la normale à la surface : elle est maximale si la vitesse est orthogonale à la surface, et nulle si la vitesse est tangente à la surface. Dans ce cas, le débit à travers la surface est nul. C'est par exemple le cas de manière systématique pour un domaine matériel.

Puisque $\vec{n}$ est une normale sortante, un débit masse positif sera équivalent à une perte de matière dans le domaine.

A. Conservation de la masse

Pour un domaine fixe, on vérifie toujours :

$$\frac{dm_t}{dt} + q_m = 0$$

Ceci signifie que la variation de masse à l'intérieur d'un domaine fixe est opposée au débit-masse à travers sa surface extérieure.

Dans le cas d'un mouvement permanent, toute dérivée liée à un point fixe (dérivée eulérienne) ou à un domaine fixe est nulle. On a donc :

$$q_m = 0$$

On en déduit que **le débit masse à travers une surface fermée fixe est toujours nul au cours d'un mouvement permanent.**

A. Conservation de la masse

Reprenons la forme locale de l'axiome de conservation de la masse : $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot div\,\vec{V} = 0$

Dans le cas d'un mouvement isochore (milieu considéré comme incompressible), on a déjà montré que la divergence du champ de vitesse est nulle. On a donc :

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Dans un mouvement isochore, la masse volumique de chaque particule matérielle est constante si on la suit dans son mouvement.

Elle peut néanmoins varier d'une particule à l'autre, c'est pourquoi on introduit la notion de **milieu incompressible homogène**. Dans un tel milieu, la masse volumique est constante dans le temps et dans l'espace. C'est le cas par exemple de l'eau liquide.

On peut montrer que, sous cette hypothèse, le débit masse à travers une surface fermée fixe est toujours nul, même si le mouvement est instationnaire (non-permanent).

POLYTECH GRENOBLE

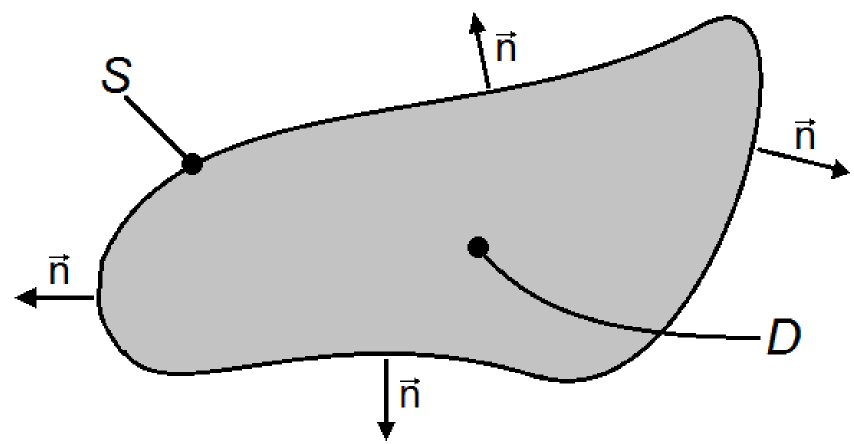
B. Principe fondamental de la dynamique

B. Principe fondamental de la dynamique

On considère ici un domaine D, muni comme d'habitude d'une surface extérieure fermée S caractérisées par un champ de normales sortantes $\vec{n}$.

Les **efforts extérieurs appliqués au domaine** se répartissent en deux catégories :

-Les **efforts de volume** qui s'appliquent à tout point M à l'intérieur du domaine D . On les appelle également efforts à distance, et dans notre cas il ne s'agira que de la gravité $\vec{g}$



-Les **efforts de surface**, qui s'appliquent à tout point M situé sur la surface S extérieure au domaine. On les appelle aussi efforts de contact, et on les représente par une **densité surfacique de forces** notée $\vec{T}$.

Cette densité de force s'apparente à une pression, et dépend du temps t, de la position $\vec{x}$ du point M sur la surface extérieure, et de l'orientation locale $\vec{n}$ de cette surface en ce point :

$$\vec{T} = \vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n})$$

B. Principe fondamental de la dynamique

On appelle vecteur contrainte au point M, à l'instant t , et dans la direction $\vec{n}$ le vecteur :

$$\vec{T} = \vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n})$$

Si on s'intéresse au petit élément de la surface située autour de M, on peut décomposer $\vec{T}$ en deux composantes orthogonales :

-Une composante normale, colinéaire à $\vec{n}$ et donc orthogonale à la surface extérieure au domaine. Cette composante est appelée **contrainte normale** à la surface :

$$\vec{T}_n = T_n \vec{n}$$

-Une composante tangentielle, normale à $\vec{n}$ et donc tangente à la surface, que l'on nommera **contrainte tangentielle** ou **contrainte de cisaillement**. On la notera $\vec{T_t}$.

Il existe donc un vecteur unitaire $\vec{t}$, tangent à la surface S , et tel que le vecteur contrainte se décompose de la façon suivante :

$$\vec{T} = T_n \vec{n} + T_t \vec{t}$$

B. Principe fondamental de la dynamique

On définit ici plusieurs grandeurs qui seront utilisées dans le principe fondamental de la dynamique.

On appelle **torseur des efforts extérieurs** appliqués à un domaine matériel D_t le torseur dont la résultante et le moment en un point A quelconque sont donnés par :

$$\vec{\mathcal{F}} = \int_{S_t} \vec{T} dS + \int_{D_t} \rho \vec{g} dv$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_A} = \int_{S_t} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{T} dS + \int_{D_t} \overrightarrow{AM} \wedge \rho \vec{g} dv$$

Ce torseur est une récapitulation des efforts appliqués au domaine matériel.

B. Principe fondamental de la dynamique

On appelle **quantité de mouvement** associée à D et à l'instant t le vecteur :

$$\vec{\mathcal{P}} = \int_{D_t} \vec{V}(M,t)\, dm = \int_{D_t} \rho(M,t) \cdot \vec{V}(M,t)\, dv$$

On appelle parfois ce vecteur « résultante cinétique ». On observe que la quantité de mouvement d'une particule matérielle est le produit de son vecteur vitesse et de sa masse, et que la quantité de mouvement d'un domaine matériel est la somme de celles de toutes les particules matérielles qui le composent.

On appelle **moment de quantité de mouvement** au point quelconque A le vecteur :

$$\overrightarrow{\sigma_A} = \int_{D_t} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M,t)\, dm = \int_{D_t} \rho(M,t) \cdot \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M,t)\, dv$$

On l'appelle parfois « moment cinétique ».

Le torseur qui admet $\vec{\mathcal{P}}$ comme résultante et $\overrightarrow{\sigma_A}$ comme moment sera appelé **torseur cinétique**.

On appelle **quantité d'accélération** associée à D et à l'instant t le vecteur :

$$\vec{\mathcal{A}} = \int_{D_t} \vec{\gamma}(M,t)\,dm = \int_{D_t} \rho(M,t)\cdot\vec{\gamma}(M,t)\,dv$$

On appelle parfois ce vecteur « résultante dynamique ». D'une manière similaire à la quantité de mouvement, la quantité d'accélération d'une particule matérielle est le produit de sa masse et de son accélération, et la quantité d'accélération d'un domaine matériel s'obtient par intégration sur tout ce domaine.

On appelle **moment de quantité d'accélération** au point quelconque A le vecteur :

$$\overrightarrow{\delta_A} = \int_{D_t} \overrightarrow{AM}\wedge\vec{\gamma}(M,t)\,dm = \int_{D_t} \rho(M,t)\cdot\overrightarrow{AM}\wedge\vec{\gamma}(M,t)\,dv$$

On l'appelle parfois « moment dynamique ».

Le torseur qui admet $\vec{\mathcal{A}}$ comme résultante et $\overrightarrow{\delta_A}$ comme moment sera appelé **torseur dynamique**.

On rappelle que les grandeurs $\vec{\mathcal{P}}$, $\overrightarrow{\sigma_A}$, $\vec{\mathcal{A}}$, et $\overrightarrow{\delta_A}$, que l'on vient de définir, ne sont pas des champs vectoriels.

Il s'agit de grandeurs qui sont caractéristiques d'un **domaine matériel** donné D (donc d'un ensemble de particules que l'on suit dans leur mouvement) à un instant donné t.

Comme toutes les grandeurs qui caractérisent un domaine matériel, leur variation est due à deux termes : un terme instationnaire (variation locale de la grandeur dans le temps) et un terme convectif (variation due au mouvement du domaine matériel).

On note que l'on peut écrire ces deux relations importantes :

$$\frac{D\vec{\mathcal{P}}}{Dt} = \vec{\mathcal{A}} \qquad\qquad \frac{D\overrightarrow{\sigma_A}}{Dt} = \overrightarrow{\delta_A}$$

B. Principe fondamental de la dynamique

La loi fondamentale de la dynamique (souvent appelée PFD) s'énonce de la manière suivante :

Il existe au moins un référentiel, dit galiléen, tel que pour tout domaine matériel et à tout instant, le torseur dynamique soit égal au torseur des efforts extérieurs.

C'est en fait une définition rigoureuse de la notion de référentiel galiléen : il s'agit de n'importe quel référentiel dans lequel le PFD est vrai.

Ce principe est une version plus élaborée de la **deuxième loi de Newton** ($\vec{F} = m\vec{\gamma}$), à la différence qu'elle est ici appliquée à toutes les particules d'un domaine matériel.

B. Principe fondamental de la dynamique

La **forme intégrale** du PFD s 'énonce généralement sous la forme des deux expressions suivantes (les moments sont ramenés à l'origine O du repère) :

$$\frac{D\vec{\mathcal{P}}}{Dt} = \vec{\mathcal{F}} \qquad\qquad \frac{D\overrightarrow{\sigma_0}}{Dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_0}$$

Ceci peut se reformuler par les expressions développées :

$$\frac{D}{Dt}\int_{D_t} \rho\vec{V}dv = \int_{S_t} \vec{T}dS + \int_{D_t} \rho\vec{g}dv$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{D_t} \overrightarrow{OM} \wedge \rho\vec{V}dv = \int_{S_t} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}dS + \int_{D_t} \overrightarrow{OM} \wedge \rho\vec{g}dv$$

Cette forme intégrale est donc valable pour l'ensemble d'un domaine matériel quelconque. A partir de ces expressions, il n'est pas possible de déduire une forme locale (valable en un point matériel) parce qu'on ne peut pas appliquer directement Ostrogradsky comme on l'a fait pour la conservation de la masse. On a besoin d'un nouveau personnage.

B. Principe fondamental de la dynamique

On introduit ici le **tenseur des contraintes**, noté $\bar{\bar{\sigma}}$, et également appelé **tenseur de Cauchy**. Ce tenseur est une généralisation de la notion de vecteur de contrainte $\vec{T}$.

On rappelle que le vecteur contrainte dépend du point et de l'instant considérés, mais également de **l'orientation** $\vec{n}$ **de la surface à laquelle il est appliqué**. Pour l'instant, la notion de contrainte est donc limitée à une force répartie sur une surface.

Définition : on appelle **facette** une petite surface fictive au sein d'un milieu continu, la normale à cette facette étant notée $\vec{n}$. Grâce à une facette, on peut définir la notion de contrainte en un point d'un milieu continu sans faire référence à un domaine matériel ou à une surface S.

Le tenseur de Cauchy est celui qui vérifie : $\vec{T}(\vec{x},t,\vec{n}) = \bar{\bar{\sigma}}(\vec{x},t)\vec{n}$

Ce tenseur dépend des coordonnées du point considéré et de l'instant t , mais pas de la direction. Par contre il permet de retrouver directement le vecteur contrainte qui s'applique en ce point et à cet instant sur une facette d'orientation $\vec{n}$.

B. Principe fondamental de la dynamique

Grâce au tenseur de Cauchy, on peut **reformuler la forme intégrale** du PFD :

$$\frac{D}{Dt}\int_{D_t} \rho\vec{V}dv = \int_{S_t} \bar{\bar{\sigma}}\vec{n}dS + \int_{D_t} \rho\vec{g}dv$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{D_t} \overrightarrow{OM} \wedge \rho\vec{V}dv = \int_{S_t} \overrightarrow{OM} \wedge (\bar{\bar{\sigma}}\vec{n})dS + \int_{D_t} \overrightarrow{OM} \wedge \rho\vec{g}dv$$

On a simplement remplacé le vecteur contrainte par son expression en fonction du tenseur des contraintes.

On peut maintenant utiliser une des formules d'Ostrogradsky pour transformer l'intégrale de surface $\int_{S_t} \bar{\bar{\sigma}}\vec{n}dS$ en une intégrale de volume qui vaut $\int_{D_t} \overrightarrow{div}\bar{\bar{\sigma}}dv$.

Par ailleurs, on peut montrer que : $\dfrac{D}{Dt}\int_{D_t} \rho\vec{V}dv = \int_{D_t} \rho\vec{\gamma}dv$

B. Principe fondamental de la dynamique

Après toutes ces opérations, on peut reformuler la première partie (bilan en résultante) du PFD, qu'on appelle également **équation de bilan de quantité de mouvement** :

$$\frac{D}{Dt}\int_{D_t} \rho\vec{V}dv = \int_{S_t} \bar{\bar{\sigma}}\vec{n}dS + \int_{D_t} \rho\vec{g}dv$$

Cette équation devient :

$$\int_{D_t} \rho\vec{\gamma}dv = \int_{D_t} \overrightarrow{div}\bar{\bar{\sigma}}dv + \int_{D_t} \rho\vec{g}dv$$

Tous les termes ont été exprimés sous la forme d'intégrales sur le même domaine matériel, qui est tout à fait quelconque. On peut donc écrire :

$$\rho\vec{\gamma} = \overrightarrow{div}\bar{\bar{\sigma}} + \rho\vec{g}$$

Cette expression est la **forme locale** du PFD, qui s'applique à une particule matérielle et est valable systématiquement et en tout point d'un milieu continu.

B. Principe fondamental de la dynamique

On a uniquement utilisé le bilan en composante, et on n'a pas détaillé le bilan en moment lié au principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{D}{Dt}\int_{D_t} \overrightarrow{OM} \wedge \rho\vec{V}dv = \int_{S_t} \overrightarrow{OM} \wedge (\bar{\bar{\sigma}}\vec{n})dS + \int_{D_t} \overrightarrow{OM} \wedge \rho\vec{g}dv$$

Les développements sont plus longs et plus compliqués, mais ils conduisent à une conclusion extrêmement utile, la **symétrie du tenseur de Cauchy** :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}^T$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Cette symétrie apporte beaucoup de simplification au tenseur et en fait un outil de calcul beaucoup plus pratique. Il s'agit de la forme locale de l'équilibre dynamique en moment (c'est-à-dire en rotation) d'une particule matérielle.

C. Autres principes fondamentaux

C. Autres principes fondamentaux

1. Théorème de l'énergie cinétique

Outre la loi de conservation de la masse et le principe fondamental de la dynamique, il y a d'autres axiomes fondamentaux de la théorie mécanique, dont il faut au moins connaître l'existence.

Le **théorème de l'énergie cinétique** est une conséquence directe du PFD. Ce théorème s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{DK}{Dt} = \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_e$$

Dans cette expression, on distingue :

L'énergie cinétique d'un domaine matériel $$K = \int_{D_t} \frac{1}{2}\rho V^2 dv$$

La puissance des efforts intérieurs au domaine $$\mathcal{P}_i = \int_{D_t} \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{D}}\, dv$$

La puissance des efforts extérieurs au domaine $$\mathcal{P}_e = \int_{S_t} \vec{T} \cdot \vec{V} dS + \int_{D_t} \rho \vec{g} \cdot \vec{V} dv$$

Le **principe des puissances virtuelles** (ou PPV) est une loi fondamentale qui implique le principe fondamental de la dynamique.

Si le PPV est pris comme principe premier de la théorie, le PFD accède au statut de théorème.

Il existe au moins un référentiel dit galiléen tel que, à tout instant et pour tout domaine matériel :

-La puissance virtuelle des efforts intérieurs dans tout mouvement virtuel rigidifiant est nulle.

-Dans tout mouvement virtuel du domaine matériel, la puissance virtuelle des quantités d'accélération est égale à la somme de la puissance virtuelle des efforts intérieurs et des efforts extérieurs.

Cette formulation fait référence à une classe de mouvements dits « virtuels ». Son intérêt est de définir la mécanique en des termes totalement énergétiques, sans introduire de notions mathématiques.

C. Autres principes fondamentaux

Les principes de la thermodynamique permettent d'introduire de nouvelles grandeurs énergétiques (énergie interne, enthalpie, entropie, etc.) et donnent un cadre général à leurs relations.

La thermodynamique est utile au mécanicien dès que son problème fait intervenir la chaleur.

Le **premier principe de la thermodynamique** énonce que pour tout domaine matériel et à tout instant, la dérivée particulaire de l'énergie interne est égale à la somme des puissances liées aux efforts extérieurs et au taux de chaleur reçue par le domaine.

Il s'agit donc de l'équilibre énergétique d'un domaine soumis à la fois à des sollicitations mécaniques et thermiques.

Le **second principe de la thermodynamique** énonce que, dans tout domaine matériel, le taux de production interne d'entropie est positif ou nul. L'entropie étant une représentation physique du désordre, ce principe énonce qu'un système isolé évolue toujours vers un état désordonné.

Le premier principe est une égalité, le second est une inégalité.