



POLYTECH
GRENoble

Mécanique des milieux continus

Séance 4 : Calcul pratique des déformations

Guilhem MOLLON

GEO3 2012-2013

Plan de la séance

A. Hypothèse des petites perturbations

B. Tenseur des déformations linéarisées

C. Valeurs propres et base principale

1. Principe
2. Explication physique
3. Calcul pratique
4. Déviateur de déformation

D. Etats de déformation particuliers

1. Dilatation isotrope
2. Extension simple
3. Glissement simple
4. Déformation plane

E. Conditions de compatibilité

Séance 4

A. Hypothèse des petites perturbations

A. Hypothèse des petites perturbations

Les tenseurs gradient ($\bar{\bar{F}}$), dilatations ($\bar{\bar{C}}$), et déformation ($\bar{\bar{E}}$) sont assez difficiles à manier en pratique.

C'est la raison pour laquelle on introduit l'**hypothèse des petites perturbations (HPP)**, qui s'énonce ainsi :

La configuration finale est très proche de la configuration initiale.

C'est donc une hypothèse qui prend son origine dans la description lagrangienne puisqu'elle fait référence à la comparaison de deux états.

L'hypothèse est très fréquente en mécanique du solide. Elle est même souhaitable dans la plupart des cas en génie civil.

A. Hypothèse des petites perturbations

On distingue l'**hypothèse des petites déformations**, qui énonce que la norme du tenseur $\bar{\bar{E}}$ est négligeable devant 1. Cette norme vaut :

$$\|\bar{\bar{E}}\| = \left(\sum_{p,q=1}^3 E_{pq}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Cette hypothèse implique que tous les termes de la matrice de $\bar{\bar{E}}$ sont infinitésimaux dans toute base.

L'**hypothèse des petits déplacements** énonce que la norme du vecteur déplacement \vec{U} est négligeable devant les dimensions du système étudié.

L'**HPP** regroupe ces deux hypothèses.

Une implication de l'**HPP** est que les coordonnées initiale \vec{X} et finale \vec{x} sont quasiment confondues pour tous les points.

Les descriptions d'Euler et de Lagrange sont donc identiques.



Séance 4

B. Tenseur des déformations linéarisées

B. Tenseur des déformations linéarisées

On a défini dans la séance précédente la partie symétrique du tenseur gradient du déplacement qui s'obtient par :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\bar{\bar{H}} + \bar{\bar{H}}^T)$$

On a aussi pu relier ce tenseur au tenseur des déformations :

$$\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \bar{\bar{H}}^T \bar{\bar{H}}$$

L'HPP implique que \vec{U} est très faible, et donc que le tenseur $\bar{\bar{H}} = \overline{\overline{Grad}} \vec{U}$ est négligeable.

On en déduit :

$$\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{\varepsilon}}$$

Dans l'HPP, le tenseur des déformations est égal à la partie symétrique du tenseur gradient du déplacement.

B. Tenseur des déformations linéarisées

Le tenseur $\bar{\varepsilon}$ est appelé **tenseur des déformations linéarisées**. Quand l'HPP est admise de manière implicite, on l'appelle même tout simplement **tenseur des déformations**.

Ce tenseur s'exprime à partir du vecteur déplacement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right)$$

B. Tenseur des déformations linéarisées

Son allure globale dans une base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ donnée est :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \right) & \frac{\partial U_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_2} \right) & \frac{\partial U_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

B. Tenseur des déformations linéarisées

Le tenseur $\bar{\bar{\epsilon}}$ est l'outil idéal de description des déformations d'un milieu continu, car :

-Il est symétrique

-Il est très facile à calculer si on connaît le champ vectoriel du déplacement

-Les termes de sa matrice ont tous une signification physique dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ où elle est exprimée.

B. Tenseur des déformations linéarisées

Chaque terme diagonal $\varepsilon_{\underline{ii}}$ représente l'allongement relatif dans la direction du vecteur \vec{e}_i .

La **dilatation** dans une des directions de la base s'obtient donc très facilement :

$$\lambda_i = 1 + \varepsilon_{\underline{ii}}$$

Chaque terme non-diagonal représente la variation d'angle entre les deux directions concernées

Le **glissement** de deux directions orthogonales de la base s'obtient donc par :

$$\gamma(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \gamma(\vec{e}_j, \vec{e}_i) = 2\varepsilon_{ij}$$

B. Tenseur des déformations linéarisées

Ce tenseur peut aussi être utilisé pour des directions quelconques.

La dilatation dans une direction quelconque définie par un vecteur unitaire \vec{u}_0 se calcule par :

$$\lambda(\vec{u}_0) = 1 + \bar{\bar{\varepsilon}}(\vec{u}_0, \vec{u}_0)$$

Le glissement de deux directions orthogonales quelconques définies par les deux vecteurs unitaires \vec{u}_0 et \vec{v}_0 s'obtient par :

$$\gamma(\vec{u}_0, \vec{v}_0) = 2\bar{\bar{\varepsilon}}(\vec{u}_0, \vec{v}_0)$$

On peut également montrer que la **dilatation volumique** au cours de la déformation est égale à la trace du tenseur $\bar{\bar{\varepsilon}}$. Le jacobien de la transformation, tel que $d\mathbf{v} = Jd\mathbf{v}_0$, peut donc s'écrire :

$$J = 1 + \text{tr } \bar{\bar{\varepsilon}} = 1 + \text{div } \vec{U}$$

Séance 4

C. Valeurs propres et base principale

C. Valeurs propres et base principale

1. Principes

Comme tous les tenseurs symétriques, il existe une base orthonormée dans laquelle le tenseur des déformations linéarisées est diagonal et s'exprime :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Les trois termes diagonaux sont appelés les valeurs propres du tenseur et, de manière plus mécanique, les **déformations principales**.

La base principale est composée de trois vecteurs orthogonaux \vec{b}_1 , \vec{b}_2 , et \vec{b}_3 , et chacun correspond à une des valeurs propres.

Ces trois vecteurs définissent les **directions principales de déformation**.

C. Valeurs propres et base principale

1. Principes

Tout l'intérêt de la base principale réside dans le fait que les termes non-diagonaux sont nuls :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, les angles droits qui existent entre \vec{b}_1 , \vec{b}_2 , et \vec{b}_3 vont rester droits au cours de la transformation.

Quant aux déformations principales, elles ont également un sens physique marqué. Par exemple, si l'un des vecteurs principaux \vec{b}_i se transforme en un vecteur \vec{b}'_i , on aura :

$$\vec{b}'_i = (\varepsilon_i + 1)\vec{b}_i$$

Les déformations principales sont donc très exactement les allongements relatifs des directions principales, et celles-ci ne sont pas modifiées lors de la transformation.

C. Valeurs propres et base principale

2. Explication physique

On considère un point M pour lequel la base

principale de déformation est notée $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$.

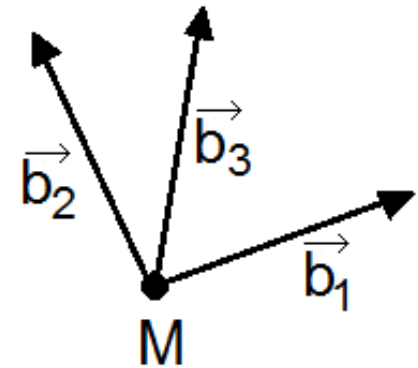
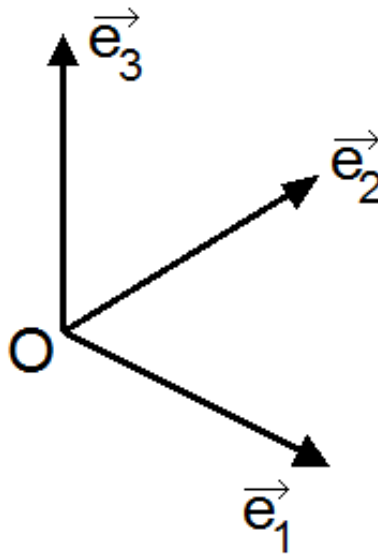
Cette base permet de définir un domaine matériel cubique de côté égal à 1.

Au cours de la déformation, le déplacement du point M est faible.

Les directions de la base principale ne sont pas changées, et on a :

$$\vec{b}'_i = (\varepsilon_i + 1) \vec{b}_i$$

Le domaine matériel se transforme donc en un parallélépipède de côtés parallèles au cube d'origine.



C. Valeurs propres et base principale

2. Explication physique

On considère un point M pour lequel la base

principale de déformation est notée $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$.

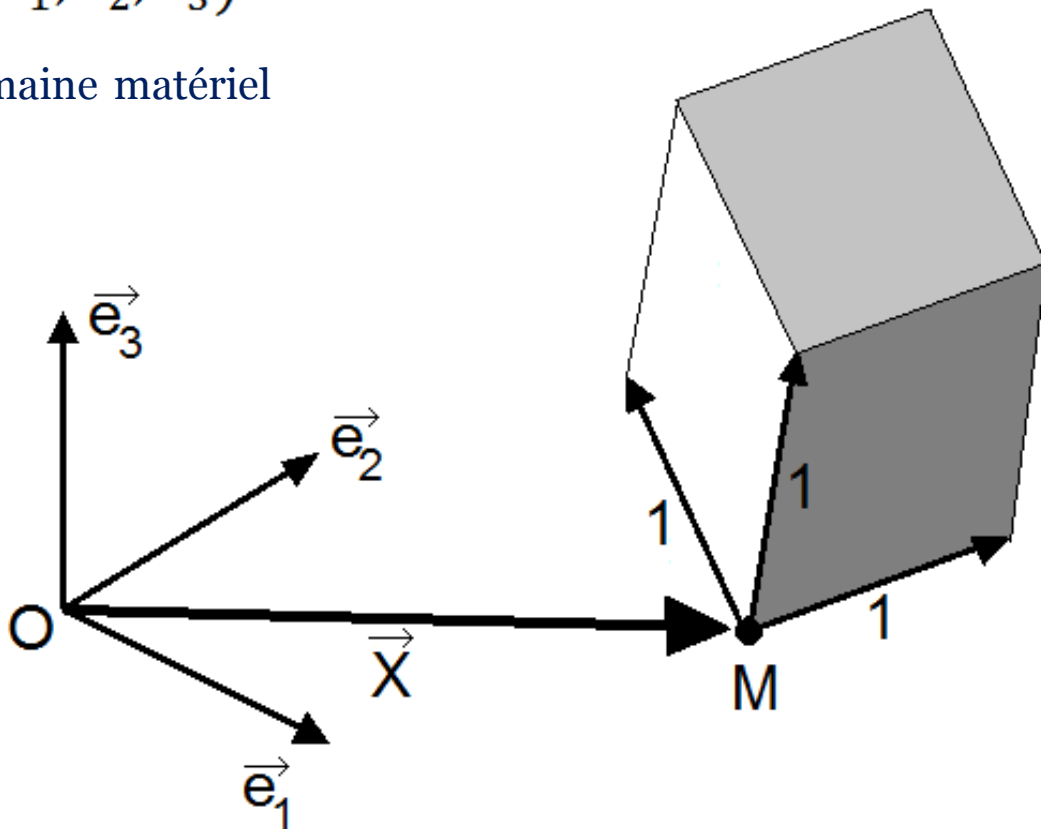
Cette base permet de définir un domaine matériel cubique de côté égal à 1.

Au cours de la déformation, le déplacement du point M est faible.

Les directions de la base principale ne sont pas changées, et on a :

$$\vec{b}'_i = (\varepsilon_i + 1) \vec{b}_i$$

Le domaine matériel se transforme donc en un parallélépipède de côtés parallèles au cube d'origine.



C. Valeurs propres et base principale

2. Explication physique

On considère un point M pour lequel la base

principale de déformation est notée $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$.

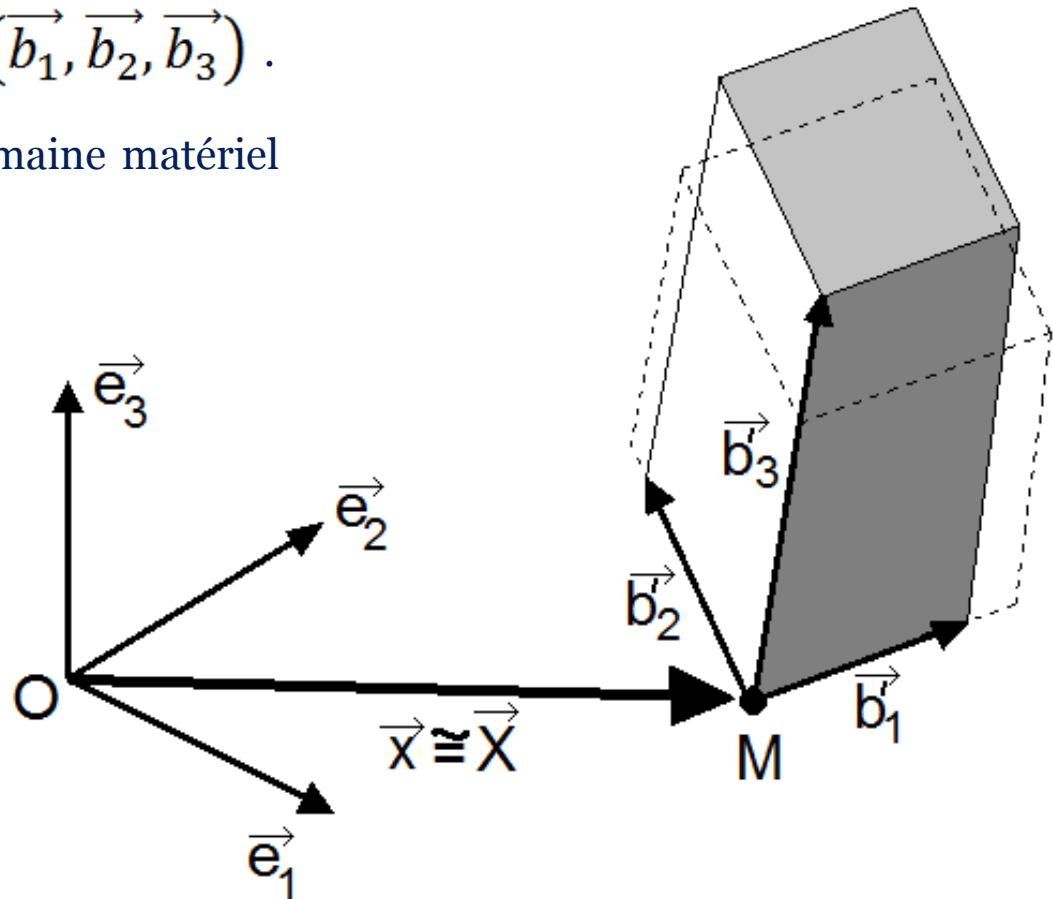
Cette base permet de définir un domaine matériel cubique de côté égal à 1.

Au cours de la déformation, le déplacement du point M est faible.

Les directions de la base principale ne sont pas changées, et on a :

$$\vec{b}'_i = (\varepsilon_i + 1) \vec{b}_i$$

Le domaine matériel se transforme donc en un parallélépipède de côtés parallèles au cube d'origine.



C. Valeurs propres et base principale

2. Explication physique

On considère un point M pour lequel la base

principale de déformation est notée $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$.

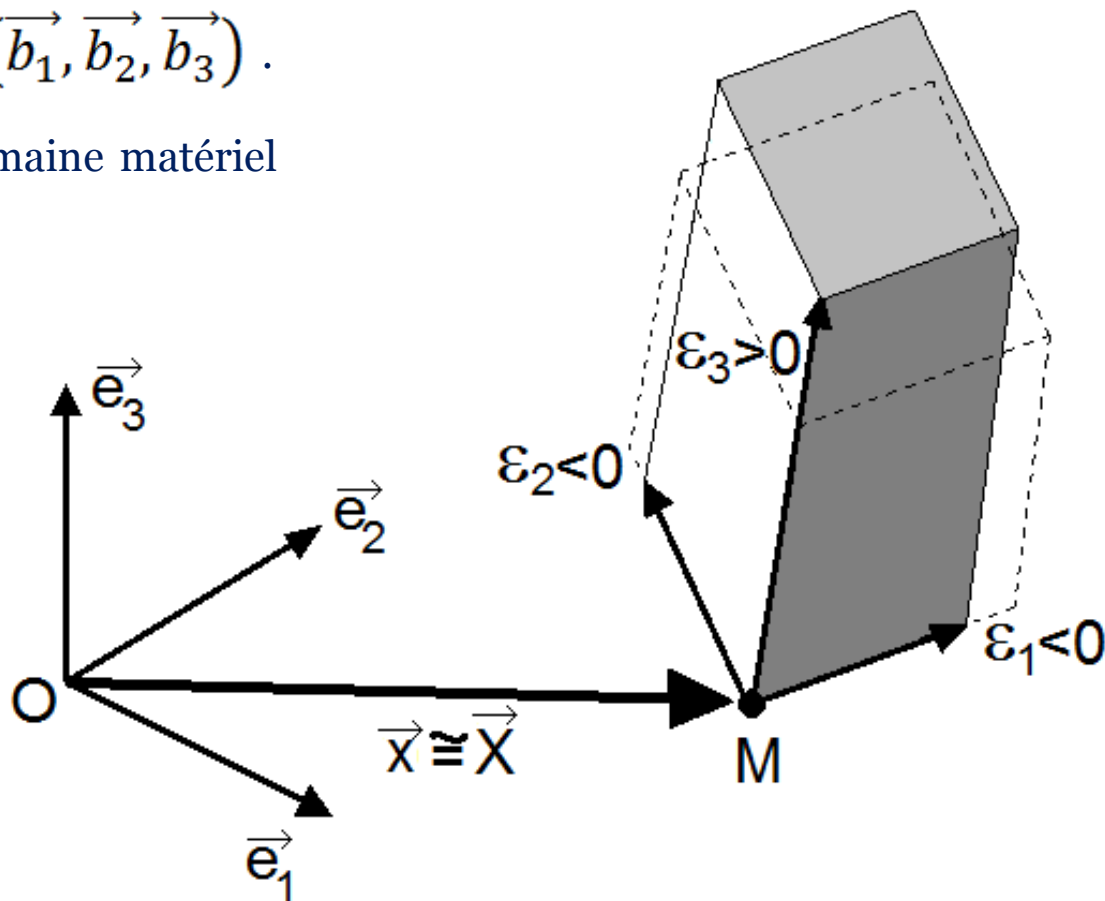
Cette base permet de définir un domaine matériel cubique de côté égal à 1.

Au cours de la déformation, le déplacement du point M est faible.

Les directions de la base principale ne sont pas changées, et on a :

$$\vec{b}'_i = (\varepsilon_i + 1) \vec{b}_i$$

Le domaine matériel se transforme donc en un parallélépipède de côtés parallèles au cube d'origine.



C. Valeurs propres et base principale

3. Calcul pratique

Les directions principales et les déformations principales sont extrêmement utiles, mais malheureusement peu évidentes à retrouver à la main. Beaucoup de logiciels sont capables de le faire automatiquement.

Pour retrouver les déformations principales, il faut calculer un déterminant, et trouver les racines d'un polynôme de degré trois donné par :

$$\det(\bar{\varepsilon} - \varepsilon \bar{I}) = -\varepsilon^3 + \varepsilon_I \varepsilon^2 - \varepsilon_{II} \varepsilon + \varepsilon_{III}$$

Les coefficients de ce polynôme sont les invariants principaux du tenseur de déformation :

$$\begin{cases} \varepsilon_I = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{II} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{III} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \end{cases}$$

Les déformations principales s'obtiennent directement si on arrive à exprimer le polynôme sous la forme :

$$\begin{aligned} \det(\bar{\varepsilon} - \varepsilon \bar{I}) &= -\varepsilon^3 + \varepsilon_I \varepsilon^2 - \varepsilon_{II} \varepsilon + \varepsilon_{III} \\ &= -(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon - \varepsilon_3) \end{aligned}$$

C. Valeurs propres et base principale

3. Calcul pratique

Une fois que les déformations principales sont connues, on n'est pas encore à la solution puisqu'il faut aussi calculer les directions principales de déformation (c'est-à-dire les trois vecteurs de la base principale)

Chacune d'elle s'obtient en résolvant un système de trois équations à trois inconnues :

$$\bar{\varepsilon} \vec{b}_i = \varepsilon_i \vec{b}_i$$

On fait apparaître les trois coordonnées $b_{i,1}$, $b_{i,2}$, et $b_{i,3}$ du vecteur propre \vec{b}_i :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{i,1} \\ b_{i,2} \\ b_{i,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 b_{i,1} \\ \varepsilon_2 b_{i,2} \\ \varepsilon_3 b_{i,3} \end{bmatrix}$$

Et on obtient finalement le système linéaire suivant (à résoudre pour chaque valeur propre) :

$$\begin{cases} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_1) b_{i,1} + \varepsilon_{12} b_{i,2} + \varepsilon_{13} b_{i,3} = 0 \\ \varepsilon_{12} b_{i,1} + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_2) b_{i,2} + \varepsilon_{23} b_{i,3} = 0 \\ \varepsilon_{13} b_{i,1} + \varepsilon_{23} b_{i,2} + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_3) b_{i,3} = 0 \end{cases}$$

C. Valeurs propres et base principale

4. Déviateur de déformation

Lorsque deux valeurs propres du tenseur de déformation sont égales, on dit que ce tenseur est **cylindrique**. Sa matrice dans la base principale a alors l'allure suivante :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_a & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_a & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_b \end{bmatrix}$$

Lorsque les trois valeurs propres sont égales, on dit que le tenseur est **sphérique**, et sa matrice dans toute base est égale à :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_m \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, le tenseur déformation est proportionnel au tenseur identité :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon_m \bar{\bar{I}}$$

C. Valeurs propres et base principale

4. Déviateur de déformation

Il est toujours possible de décomposer un tenseur des déformations linéarisées $\bar{\bar{\epsilon}}$ sous la forme d'un tenseur sphérique et d'un tenseur à trace nulle :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon_m \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\epsilon}}^d$$

Le scalaire ϵ_m est appelé **allongement unitaire moyen**, et se calcule par :

$$\epsilon_m = \frac{1}{3} \epsilon_I = \frac{1}{3} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)$$

Le tenseur $\bar{\bar{\epsilon}}^d$ est appelé **déviateur de déformation**, et a toujours une trace nulle. Dans la base principale de déformation, il s'exprime par :

$$\bar{\bar{\epsilon}}^d = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\epsilon_3 - \epsilon_1 - \epsilon_2 \end{bmatrix}$$

Le déviateur est la partie non-sphérique du tenseur des déformations linéarisées, c'est-à-dire celle qui est variable selon la direction.

Séance 4

D. Etats de déformation particuliers

D. Etats de déformation particuliers

1. Dilatation isotrope

Une **dilatation isotrope** est une déformation pour laquelle on a $\vec{x} = \lambda \vec{X}$, soit :

$$\begin{cases} x_1 = \lambda X_1 \\ x_2 = \lambda X_2 \\ x_3 = \lambda X_3 \end{cases}$$

Dans cette expression, λ est un scalaire positif. Les différents tenseurs associés sont :

$$\bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{E}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{bmatrix}$$

D. Etats de déformation particuliers

1. Dilatation isotrope

Le tenseur des déformations linéarisées est alors sphérique et vaut :

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

On remarque que cette déformation est effectivement une dilatation si $\lambda > 1$. Dans le cas contraire, il s'agit d'une **contraction**.

Comme le tenseur est sphérique, toute direction de l'espace peut être considéré comme une direction principale.

Par conséquent, quel que soit le vecteur quelconque \vec{u}_0 et quel que soit le vecteur \vec{v}_0 perpendiculaire à \vec{u}_0 , on a :

Une dilatation égale à λ :

$$\lambda(\vec{u}_0) = \lambda$$

Un glissement nul :

$$\gamma(\vec{u}_0, \vec{v}_0) = 0$$

D. Etats de déformation particuliers

2. Extension simple

Une **extension simple dans la direction de \vec{e}_1** est une transformation qui vérifie :

$$\begin{cases} x_1 = \lambda X_1 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Dans cette expression, λ est un scalaire positif. Les tenseurs de la transformation sont :

$$\bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{E}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La déformation est une extension si $\lambda > 1$, et une contraction sinon. Il s'agit donc d'une déformation pour laquelle exactement une valeur propre est non-nulle.

Toute déformation est la superposition de trois extensions simples dans sa base principale.

D. Etats de déformation particuliers

3. Glissement simple

Un **glissement simple** est défini par :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + 2\nu X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Les tenseurs caractéristiques sont :

$$\bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 2\nu & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2\nu & 0 \\ 2\nu & 1 + 4\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{E}} = \begin{bmatrix} 0 & \nu & 0 \\ \nu & 2\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le tenseur des déformations linéarisées est donc :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & \nu & 0 \\ \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans l'HPP, on peut considérer que ν^2 est négligeable, et on a bien $\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{\varepsilon}}$.

D. Etats de déformation particuliers

3. Glissement simple

Le polynôme caractéristique du tenseur des déformations linéarisées vaut :

$$\det(\bar{\varepsilon} - \varepsilon \bar{I}) = \begin{vmatrix} -\varepsilon & \nu & 0 \\ \nu & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon(\varepsilon^2 - \nu^2)$$

Par conséquent, les trois déformations principales sont :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \nu \\ \varepsilon_2 = -\nu \\ \varepsilon_3 = 0 \end{cases}$$

On peut calculer que la base principale est orientée selon les bissectrices des vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 de la base principale :

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \\ \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \\ \vec{b}_3 = \vec{e}_3 \end{cases}$$

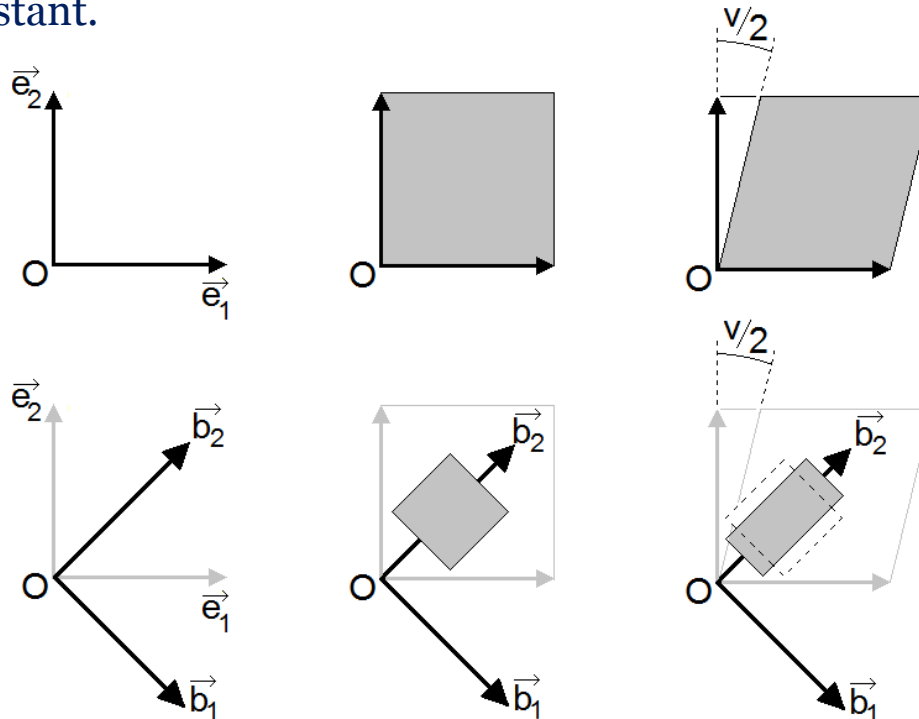
D. Etats de déformation particuliers

3. Glissement simple

La matrice de $\bar{\bar{\epsilon}}$ dans sa base principale $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ est donc :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les déformations principales non-nulles sont opposées, le milieu se dilate dans une direction et se contracte dans la direction orthogonale. La trace du tenseur est nulle, donc cette déformation s'effectue à volume constant.



D. Etats de déformation particuliers

4. Déformation plane

Une **déformation plane** est une déformation engendrée par un mouvement plan, et qui a l'allure suivante :

$$\begin{cases} x_1 = x_1(X_1, X_2, t) \\ x_2 = x_2(X_1, X_2, t) \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Les tenseurs caractéristiques sont de la forme :

$$\bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{\bar{E}} = \begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le tenseur des déformations linéarisées a pour matrices respectives dans la base d'origine et dans sa base propre :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Une telle déformation est beaucoup plus facile à manier que le cas général.

Séance 4

E. Conditions de compatibilité

E. Conditions de compatibilité

Il est très simple de calculer le tenseur $\bar{\bar{\epsilon}}$ si l'on connaît le vecteur déplacement \bar{U} , car on a vu :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right)$$

L'inverse n'est pas vrai, car un champ de déformations quelconque n'est pas forcément « intégrable » sous la forme d'un champ de déplacement continu.

En effet, $\bar{\bar{\epsilon}}$ décrit la **déformation locale** du milieu, mais rien n'indique que cette déformation est compatible avec les déformations voisines.

C'est comme déformer individuellement les pièces d'un puzzle. Il n'y a aucune chance de pouvoir reformer le puzzle après déformation, sauf à vérifier des conditions précises.

On les appelle **conditions de compatibilité**, et on les énonce par une jolie formule :

$$2 \left(\overline{\overline{\text{grad}}} \left(\overline{\overline{\text{div}}} \bar{\bar{\epsilon}} \right) \right) - \Delta \bar{\bar{\epsilon}} - \overline{\overline{\text{grad}}} \left(\overline{\overline{\text{grad}}} (\text{tr } \bar{\bar{\epsilon}}) \right) = \bar{\bar{0}}$$