POLYTECH GRENOBLE

Mécanique des milieux continus

Séance 2 : Cinématique

Guilhem MOLLON

GEO3 2012-2013

Plan de la séance

A. Définitions

A. Définitions

Cinématique :

Description mathématique du mouvement : GEOMETRIE + TEMPS = CINEMATIQUE
On va donc s'intéresser à un milieu soumis à un **mouvement au cours du temps**.

Système matériel :

Ensemble de particules matérielles qui constitue l'objet de l'étude.

Particule matérielle :

Une particule matérielle est une petite région de l'espace composée de matière. Il ne faut pas la confondre avec la particule élémentaire, que l'on rencontre en physique fondamentale.

Une particule matérielle est représentée mathématiquement par un point. Pourtant, elle n'a ni un volume nul, ni une masse nulle.

La particule matérielle (ou point matériel) est donc le volume infinitésimal de matière située autour d'un point donné.

A. Définitions

Domaine matériel :

Un domaine matériel est une partie d'un système matériel qui peut se déplacer, mais qui contient toujours exactement les mêmes particules matérielles.

A travers la frontière d'un domaine matériel, aucune matière ne rentre et aucune matière ne sort au cours du mouvement.

Par conséquent, un domaine matériel est défini par une frontière fermée qui « suit » les particules lors de leur déplacement à tout instant.

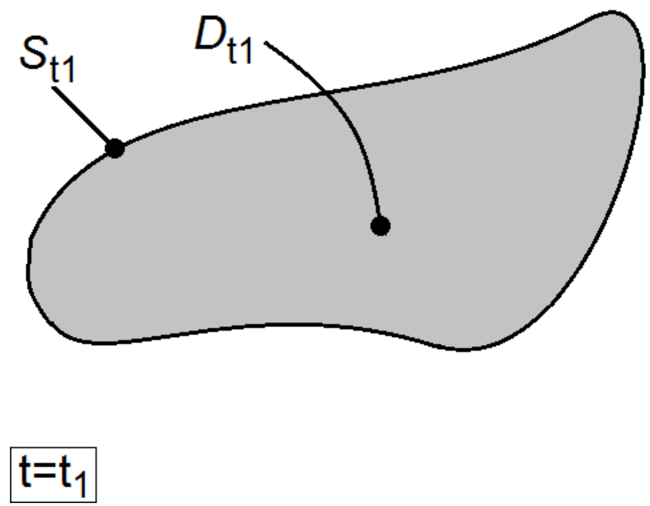
Domaine fixe :

Un domaine fixe est le contraire d'un domaine matériel : il ne suit pas les particules dans leur mouvement, et reste toujours immobile.

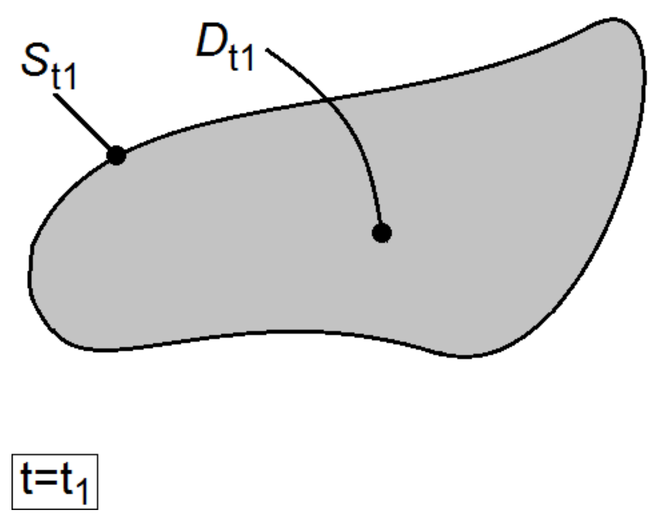
A travers la frontière d'un domaine fixe, il est tout à fait possible que de la matière rentre ou sorte au cours de son mouvement.

A. Définitions

Domaine matériel :

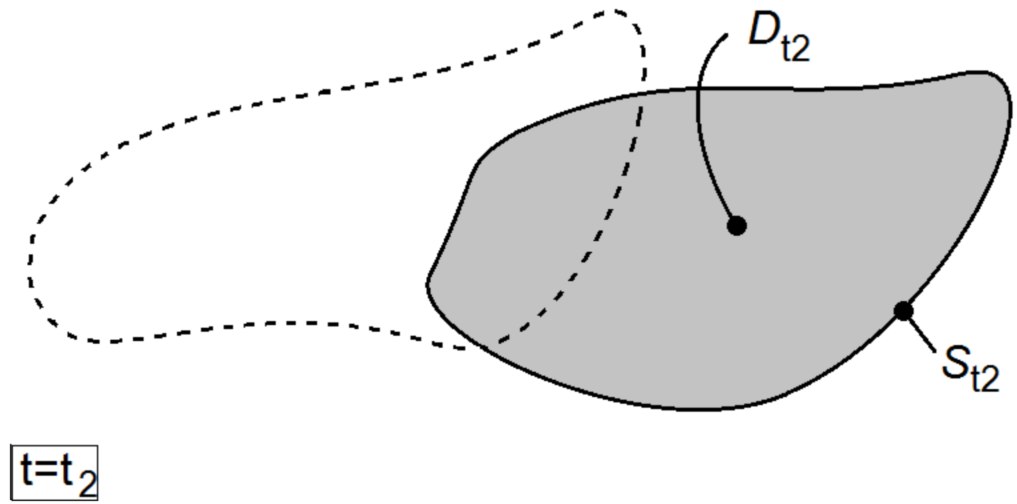


Domaine fixe :

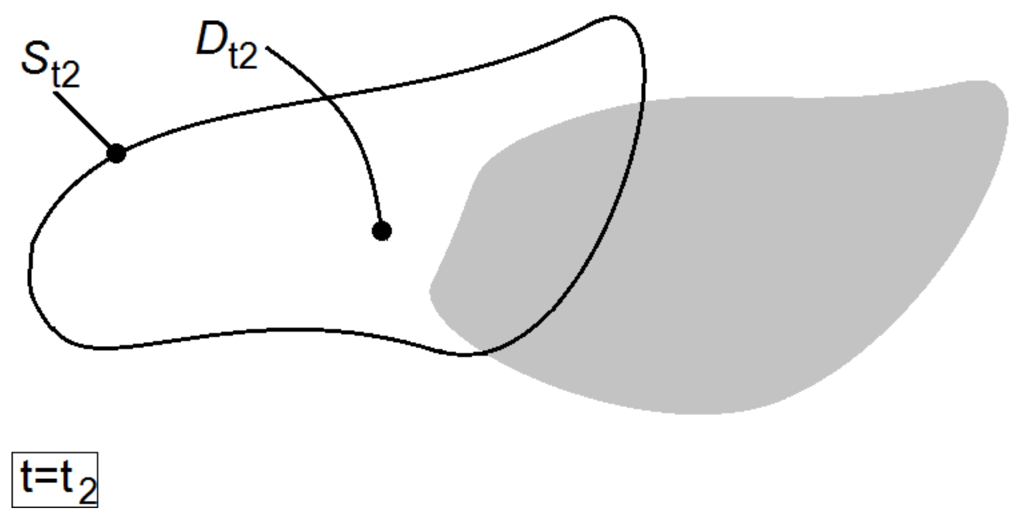


A. Définitions

Domaine matériel :



Domaine fixe :



A. Définitions

Référentiel :

Un référentiel est un observateur du mouvement.

La plupart du temps on se placera dans un **référentiel galiléen**, défini comme celui dans lequel le principe fondamental de la dynamique est vérifié.

Le référentiel terrestre sera supposé galiléen, même si, en réalité, il ne l’est pas complètement.

Tout référentiel en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel terrestre sera donc également considéré galiléen.

Tout mouvement est défini par rapport à un référentiel. Un changement de référentiel modifie de manière drastique la description d’un mouvement.

B. Points de vue de Lagrange et d'Euler

B. Points de vue de Lagrange et d'Euler

1. Point de vue de Lagrange

Deux descriptions différentes d'un mouvement coexistent, chacune ayant ses avantages et ses inconvénients. On appelle ces points de vue les descriptions **Lagrangienne** et **Eulérienne** du mouvement.

Joseph-Louis Lagrange
1736-1813

La première est plus adaptée à la mécanique du solide et la deuxième est plus adaptée à la mécanique des fluides, mais ce n'est pas figé.

On va s'intéresser au mouvement d'un point **M**, qui se déplace au cours du temps dans un repère de l'espace noté :

$$R = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$$

B. Points de vue de Lagrange et d'Euler

La description de Lagrange consiste à suivre une particule matérielle (identifiée par un point M) **au cours de son mouvement**, à partir de sa **position d'origine**.

Cette description suppose donc qu'il y a un état du système que l'on suppose parfaitement connu, et que l'on nommera **état initial** ou **état de référence**. On suppose que cet état correspond au temps $t = 0$.

La position d'origine du point M est définie par son vecteur position $\vec{X}$ (en majuscule).

La position du point M (et de la particule associée) à un instant $t > 0$ est définie par son vecteur position $\vec{x}(t)$ (en minuscule).

La position d'origine joue le rôle « d'étiquette » pour la particule associée au point M. Il permet de l'identifier sans équivoque. La position de M à un instant $t > 0$ quelconque peut donc s'écrire :

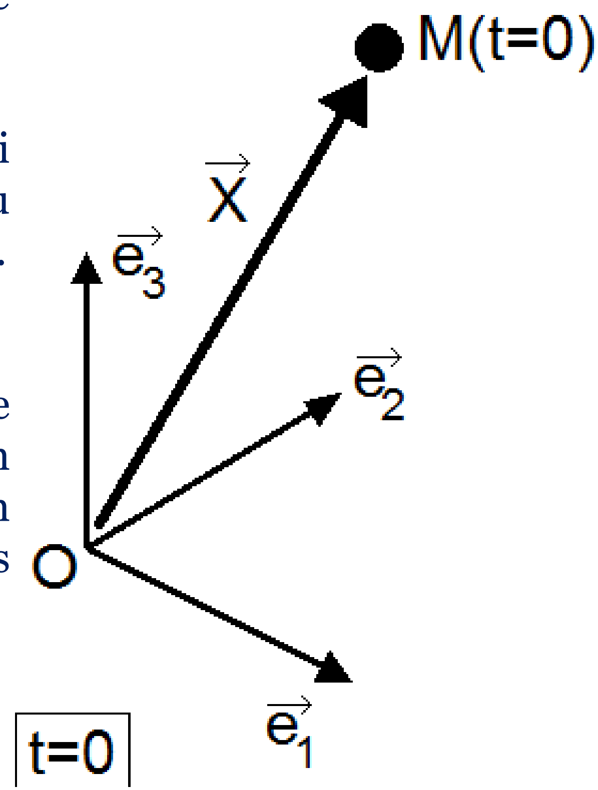
$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$$

Ce qui se traduit par : position à l'instant $t > 0$ de la particule qui était en $\vec{X}$ à $t = 0$.

B. Points de vue de Lagrange et d'Euler

La description de Lagrange travaille donc sur la notion de **trajectoire.**

La trajectoire de M est la ligne qui contient l'ensemble des positions du point matériel M au cours du temps.



Très souvent, on oublie même de mentionner le temps t, et on cherche simplement à comparer un état initial et un état final. Dans notre exemple, on a :

Etat initial : $t = 0$

Etat final : $t = t_2$

Dans ce cas, le point de vue de Lagrange cherche à comparer $\vec{X}$ et $\vec{x}$.

B. Points de vue de Lagrange et d'Euler

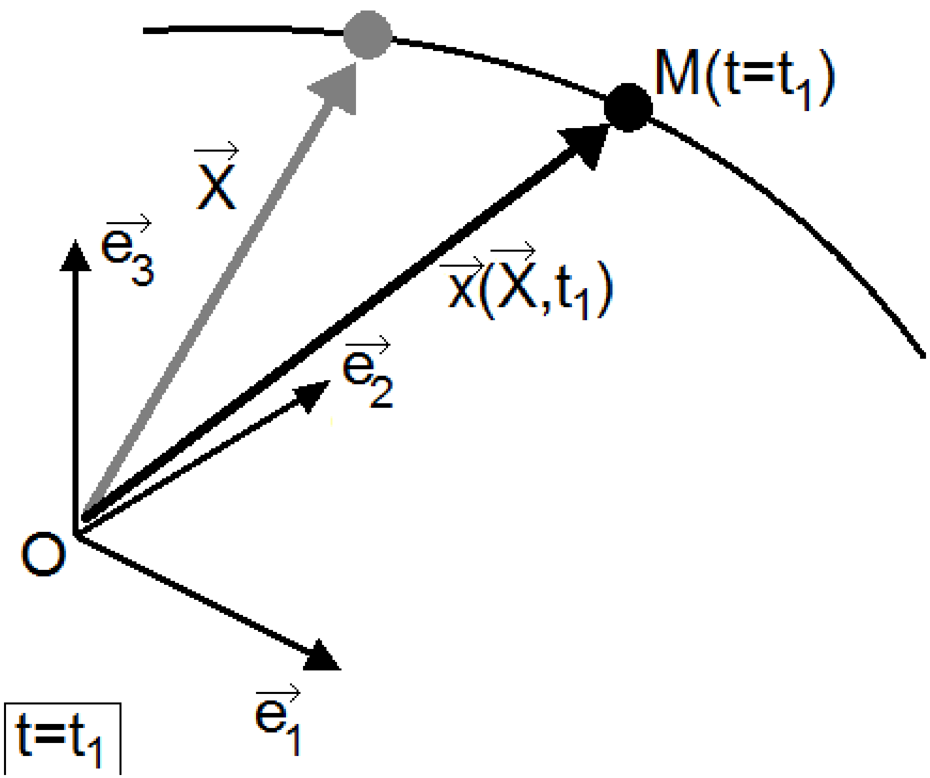
La description de Lagrange travaille donc sur la notion de **trajectoire.**

La trajectoire de M est la ligne qui contient l'ensemble des positions du point matériel M au cours du temps.

Très souvent, on oublie même de mentionner le temps *t*, et on cherche simplement à comparer un état initial et un état final. Dans notre exemple, on a :

Etat initial : $t = 0$

Etat final : $t = t_2$



Dans ce cas, le point de vue de Lagrange cherche à comparer $\vec{X}$ et $\vec{x}$.

B. Points de vue de Lagrange et d'Euler

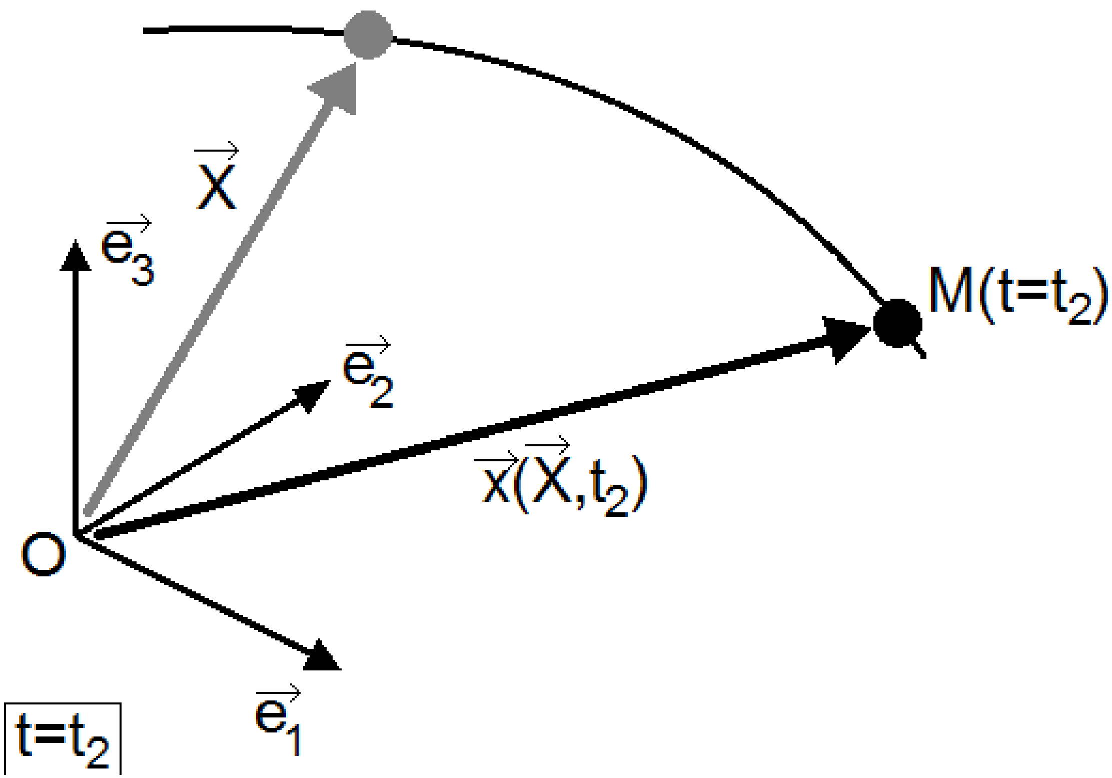
La description de Lagrange travaille donc sur la notion de **trajectoire.**

La trajectoire de M est la ligne qui contient l'ensemble des positions du point matériel M au cours du temps.

Très souvent, on oublie même de mentionner le temps *t*, et on cherche simplement à comparer un état initial et un état final. Dans notre exemple, on a :

Etat initial : $t = 0$

Etat final : $t = t_2$



Dans ce cas, le point de vue de Lagrange cherche à comparer $\vec{X}$ et $\vec{x}$.

B. Points de vue de Lagrange et d'Euler

La description de Lagrange permet de définir de manière rigoureuse les notions de vitesse et d'accélération d'une particule.

La vitesse est la dérivation temporelle du vecteur position d'une particule identifiée par sa position initiale $\vec{X}$:

$$\vec{V}(\vec{X},t) = \left.\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right]_{\vec{X}} (\vec{X},t)$$

L'accélération est la dérivation temporelle du vecteur vitesse d'une particule identifiée par sa position initiale $\vec{X}$:

$$\vec{\gamma}(\vec{X},t) = \left.\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2}\right]_{\vec{X}} (\vec{X},t) = \left.\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right]_{\vec{X}} (\vec{X},t)$$

Le symbole $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right]_{\vec{X}}$ représente la dérivation par rapport au temps pour $\vec{X}$ fixé.

B. Points de vue de Lagrange et d'Euler

La description d'Euler est radicalement différente de celle de Lagrange. On ne considère **plus d'instant initial**, et on n'essaie même plus de suivre une particule dans son mouvement.

Cette description est bien adaptée à la cinématique d'un **fluide**, pour lequel il est difficile de définir un instant initial pour lequel les positions de toutes les particules seraient connues

Leonard Euler
1707-1783

B. Points de vue de Lagrange et d'Euler

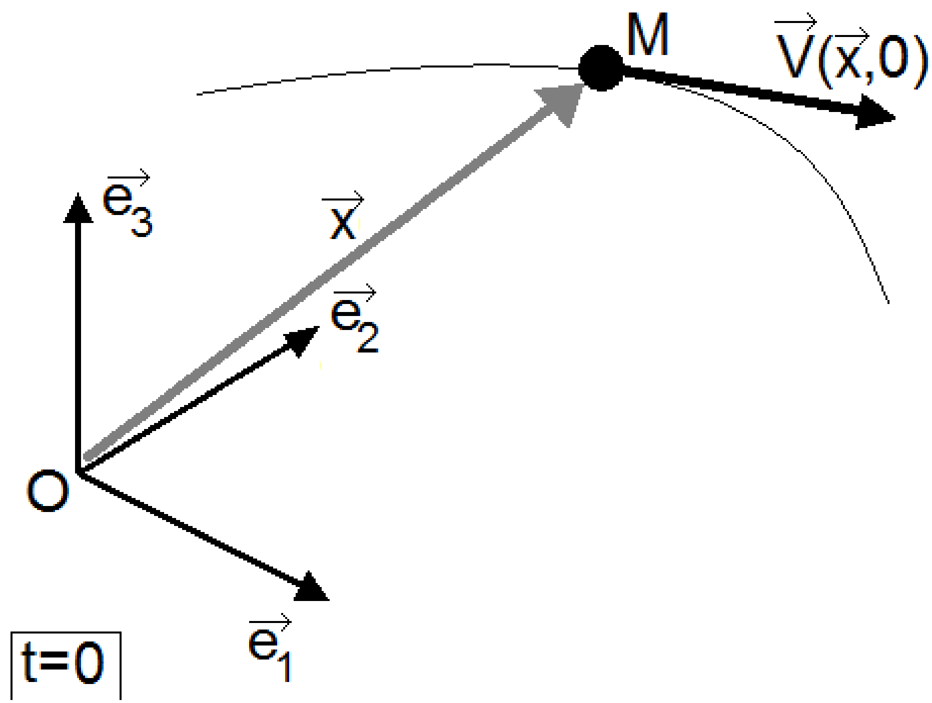
Dans la description d'Euler, on ne s'intéresse plus à un point M représentant une particule au cours de son mouvement, mais on s'intéresse à un point M fixe, dont les coordonnées sont indiquées par le vecteur position $\vec{x}$.

La description du mouvement du milieu s'effectue par l'intermédiaire du vecteur vitesse :

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{x}, t)$$

Cette vitesse est en fait la vitesse (au sens lagrangien) de la **particule qui occupe la position $\vec{x}$ à l'instant *t*.**

Il n'est donc nulle part fait mention D'une coordonnées initiale $\vec{X}$.



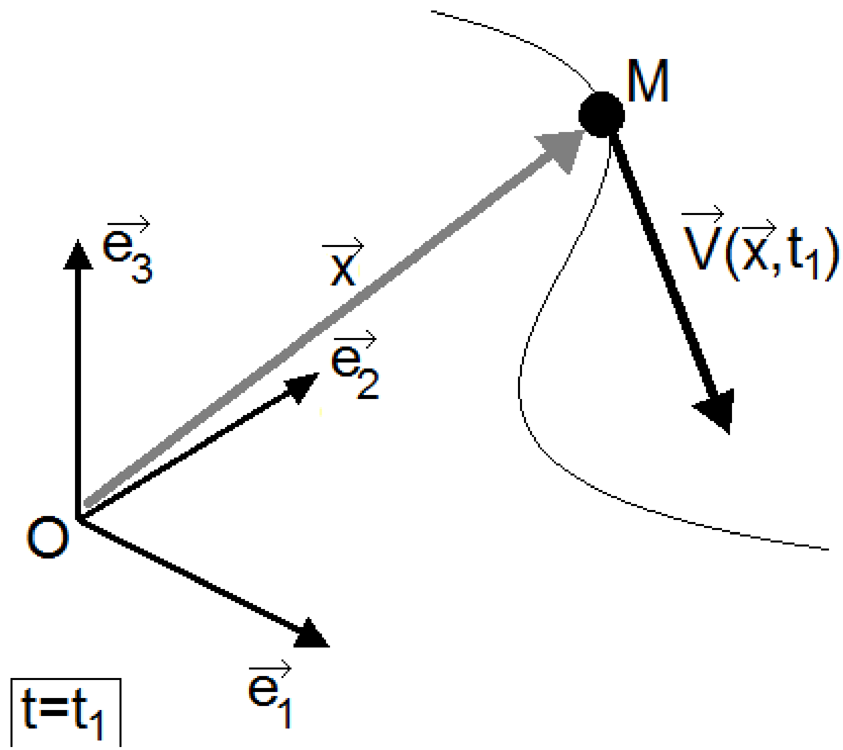
Dans la description d'Euler, on ne s'intéresse plus à un point M représentant une particule au cours de son mouvement, mais on s'intéresse à un point M fixe, dont les coordonnées sont indiquées par le vecteur position $\vec{x}$.

La description du mouvement du milieu s'effectue par l'intermédiaire du vecteur vitesse :

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{x}, t)$$

Cette vitesse est en fait la vitesse (au sens lagrangien) de la **particule qui occupe la position $\vec{x}$ à l'instant t.**

Il n'est donc nulle part fait mention D'une coordonnées initiale $\vec{X}$.



B. Points de vue de Lagrange et d'Euler

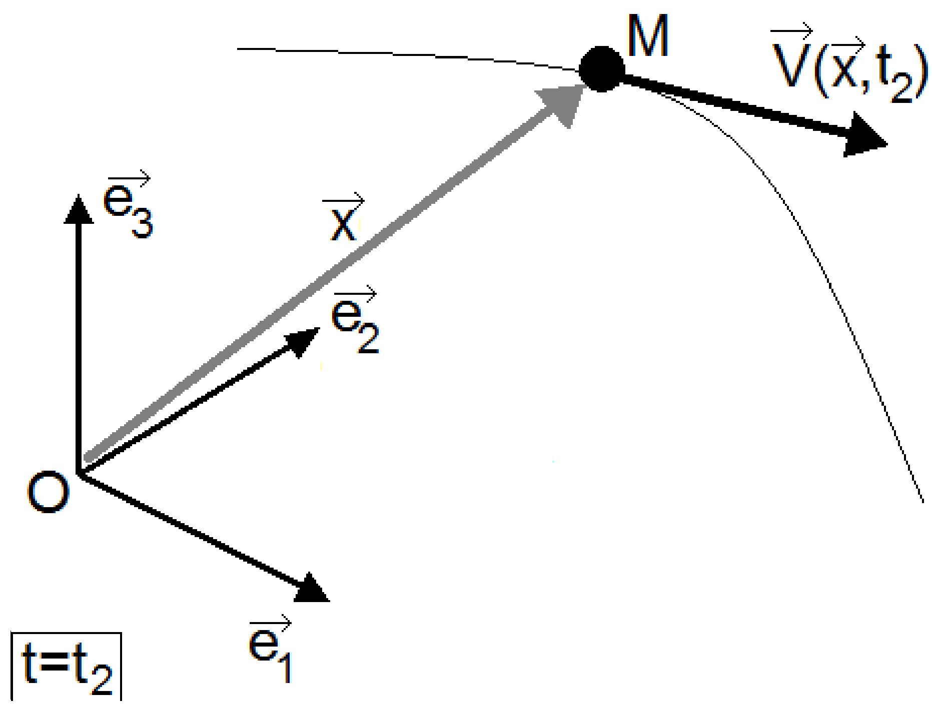
Dans la description d'Euler, on ne s'intéresse plus à un point M représentant une particule au cours de son mouvement, mais on s'intéresse à un point M fixe, dont les coordonnées sont indiquées par le vecteur position $\vec{x}$.

La description du mouvement du milieu s'effectue par l'intermédiaire du vecteur vitesse :

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{x}, t)$$

Cette vitesse est en fait la vitesse (au sens lagrangien) de la **particule qui occupe la position $\vec{x}$ à l'instant *t*.**

Il n'est donc nulle part fait mention D'une coordonnées initiale $\vec{X}$.



B. Points de vue de Lagrange et d'Euler

3. Relations Lagrange-Euler

On peut récapituler en disant que :

-Les **variables de Lagrange** sont les coordonnées initiales X_1, X_2 , et X_3 d'une particule et l'instant t.

-Les **inconnues de Lagrange** sont les coordonnées actuelles x_1, x_2 , et x_3 de cette même particule.

-> On travaille avec une particule donnée, de position variable.

-Les **variables d'Euler** sont les coordonnées spatiales x_1, x_2, et x_3 , et l'instant t.

-Les inconnues d'Euler sont les composantes du vecteur vitesse V_1 , V_2 , et V_3 .

-> On travaille en un point constant, qui n'est jamais occupé par la même particule

B. Points de vue de Lagrange et d'Euler

On peut basculer d'une représentation à l'autre à l'aide des deux expressions suivantes :

$$\vec{x}\left(\vec{X},0\right) = \vec{X}$$

$$\vec{V}(\vec{x},t) = \left.\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right]_{\vec{X}}$$

La première énonce que la position d'une particule à l'instant $t = 0$ est sa position initiale.

La seconde énonce que la vitesse en un point et à un instant donnés est égale à la dérivée temporelle du vecteur position de la particule qui passe en ce point à cet instant précis.

C. Dérivée particulaire

C. Dérivée particulaire

1. Appliquée à un champ scalaire

La notion de dérivée particulaire, aussi appelée dérivée matérielle, est un outil mathématique propre à la MMC.

Supposons un champ scalaire qui représente une grandeur physique :

$$f(\vec{x}, t)$$

La dérivée matérielle exprime la variation de cette grandeur lorsque l'on suit une particule dans son mouvement.

On note cette dérivée : $\dfrac{Df}{Dt}$

On peut donc dire que la dérivée particulaire est une dérivée temporelle à $\vec{X}$ constant.

C. Dérivée particulaire

En description lagrangienne, la dérivée particulaire est une notion immédiate puisqu'elle suit une particule dans son mouvement :

$$\frac{Df}{Dt} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{\vec{X}}$$

On rappelle que la coordonnée initiale $\vec{X}$ joue ici le rôle de « carte d'identité » d'une particule.

En eulérien c'est plus compliqué, car cette position initiale est inconnue. En revanche, on sait très bien calculer une dérivée partielle en un point fixe :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{\vec{x}}$$

Sans démonstration, on donne les formules suivantes (qui sont équivalentes) :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}\, f \qquad \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + V_p \frac{\partial f}{\partial x_p}$$

C. Dérivée particulaire

On va s'attarder un peu sur cette formule : $$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}\, f$$

Elle est valable en un point donné, défini par son vecteur position $\vec{x}$, et à un instant t.

$\frac{Df}{Dt}$ est la variation temporelle de f pour la particule qui passe ce point à cet instant.

$\frac{\partial f}{\partial t}$ est la variation temporelle de $f(\vec{x}, t)$, en ce point fixe et à cet instant précis.

-> C'est le **terme instationnaire**, qui décrit la variation de f en un point donné

$\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}\, f$ est lié à la vitesse de la particule et au gradient de f .

-> C'est le **terme convectif**, qui décrit la variation de f due au mouvement.

C. Dérivée particulaire

La dérivée particulaire peut aussi être appliquée à un champ vectoriel $\vec{U}$:

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left(\overline{\overline{grad}}\ \vec{U}\right)\vec{V}$$

On peut donc redéfinir de manière précise les notions de vitesse et d'accélération :

$$\vec{V} = \frac{D\vec{x}}{Dt} \qquad \vec{\gamma} = \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

La vitesse est la variation temporelle du vecteur position d'une particule suivie dans son mouvement, et l'accélération est la variation de la vitesse d'une particule suivie dans son mouvement.

On en déduit en particulier :

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\overline{\overline{grad}}\ \vec{V}\right)\vec{V}$$

C. Dérivée particulaire

On peut suivre une particule dans son mouvement, mais il est souvent intéressant de suivre un domaine matériel dans son mouvement. Si on suit un domaine infinitésimal de volume dv , on peut écrire :

$$\frac{Ddv}{Dt} = dv \cdot div\vec{V}$$

Ceci permet de donner un sens physique à l'opérateur divergence. La divergence du champ de vitesse est égale au **taux de dilatation volumique** d'un domaine matériel infinitésimal.

Enfin, on peut appliquer la dérivée matérielle à une intégrale de volume sur un domaine matériel suivi dans son mouvement :

$$\frac{D}{Dt}F(t) = \frac{D}{Dt}\int_{D(t)} f(\vec{x},t)dv$$

Sans démonstration, on donne :

$$\frac{DF}{Dt} = \int_{D(t)} \frac{\partial f}{\partial t}dv + \int_{S(t)} f\vec{V} \cdot \vec{n}dS$$

On retrouve dans cette expression un terme instationnaire et un terme convectif.

D. Cinématiques particulières

C. Cinématiques particulières

Très souvent, l'application de la MMC à des mouvements réels se fera par l'intermédiaire de simplifications, qui reposent sur des hypothèses cinématiques particulières.

Le **mouvement permanent** est par exemple très utilisé en mécanique des fluides :

Un mouvement est dit permanent (ou stationnaire) si toutes les grandeurs qui le caractérisent sont indépendantes du temps en **description eulérienne**.

Tous les champs scalaires, vectoriels et tensoriels vérifient alors :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \vec{0} \qquad \frac{\partial \overline{\overline{T}}}{\partial t} = \overline{\overline{0}}$$

Toute grandeur **en un point donné** est constante. En revanche, les dérivées matérielles n'ont pas de raison d'être nulles, puisque les particules se déplacent. Simplement, la dérivée particulaire est purement convective, et on a :

$$\frac{Df}{Dt} = \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}\, f$$

Un mouvement n'est permanent que par rapport à un référentiel donné

C. Cinématiques particulières

Le **mouvement isochore** est une classe de mouvement pour laquelle **le volume de tout domaine matériel reste constant**.

Dans ce cas, le milieu est qualifié d'**incompressible**, et on a :

Le volume d'un domaine matériel est la somme des volumes élémentaires qu'il contient :

$$v = \int_D dv$$

On a donc pour un mouvement isochore : $$\frac{Dv}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_D dv = 0$$

Avec les résultats énoncés dans la section précédente, on obtient : $div\,\vec{V} = 0$

Un mouvement isochore (milieu incompressible) est donc un mouvement pour lequel la **divergence de la vitesse est nulle** en tout point et à tout instant.

Aucun matériau n'est réellement incompressible, mais cette hypothèse fonctionne très bien sous certaines conditions.

Exemples : l'eau liquide, l'argile en comportement non-drainé, le caoutchouc...

C. Cinématiques particulières

Le **mouvement plan** est une simplification courante de la MMC, qui permet de passer de trois à deux dimensions d'espace.

Un mouvement sera plan si tous les vecteurs vitesses sont parallèles à un plan donné, et si ils sont invariants par translation perpendiculaire à ce plan.

Si on choisit une base $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, alors un mouvement plan sera caractérisé par :

$$V_3 = 0 \qquad\qquad \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_3} = \vec{0}$$

Dans ce cas, le mouvement est plan par rapport à $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

La plupart du temps, ces simplifications ne seront pas suffisantes pour rendre un problème abordable. On peut avoir un mouvement **plan, permanent et isochore**, et ne pas être capable de résoudre le problème analytiquement.