



POLYTECH
GRENoble

Mécanique des milieux continus

Séance 11 : Techniques de résolution

Guilhem MOLLON

GEO3 2012-2013

Plan de la séance

A. Méthode des différences finies

1. Discrétisation des variables
2. Discrétisation des EDP

B. Méthode des éléments finis

1. Formulations forte et faible
2. Minimisation de Galerkin
3. Éléments finis

C. Méthode des éléments discrets

Séance 11

A. Méthode des différences finies

A. Méthode des différences finies

1. Discrétisation des variables

Toutes les équations de la MMC sont des équations aux dérivées partielles.

Une EDP est une relation entre plusieurs grandeurs et leurs dérivées d'ordre 1, 2, 3, etc.

On sait résoudre les EDP simples (elliptiques, paraboliques, etc.), mais celles de la MMC sont généralement trop compliquées pour une résolution analytique.

La méthode des différences finies se propose de produire une solution approchée de ces EDP.

La résolution repose sur une discrétisation des variables spatiales et temporelles sur le domaine d'étude.



A. Méthode des différences finies

1. Discrétisation des variables

Soit un problème de MMC de dimension $n_s + n_t$.

- n_s est le nombre de dimensions spatiales (1, 2, ou 3)

- n_t est le nombre de dimensions temporelles (0 ou 1)

On fait deux hypothèses qui simplifient la présentation de la méthode (et qui peuvent être contournées en complexifiant cette méthode) :

-HPP

-Géométrie rectangulaire du problème

A. Méthode des différences finies

1. Discrétisation des variables

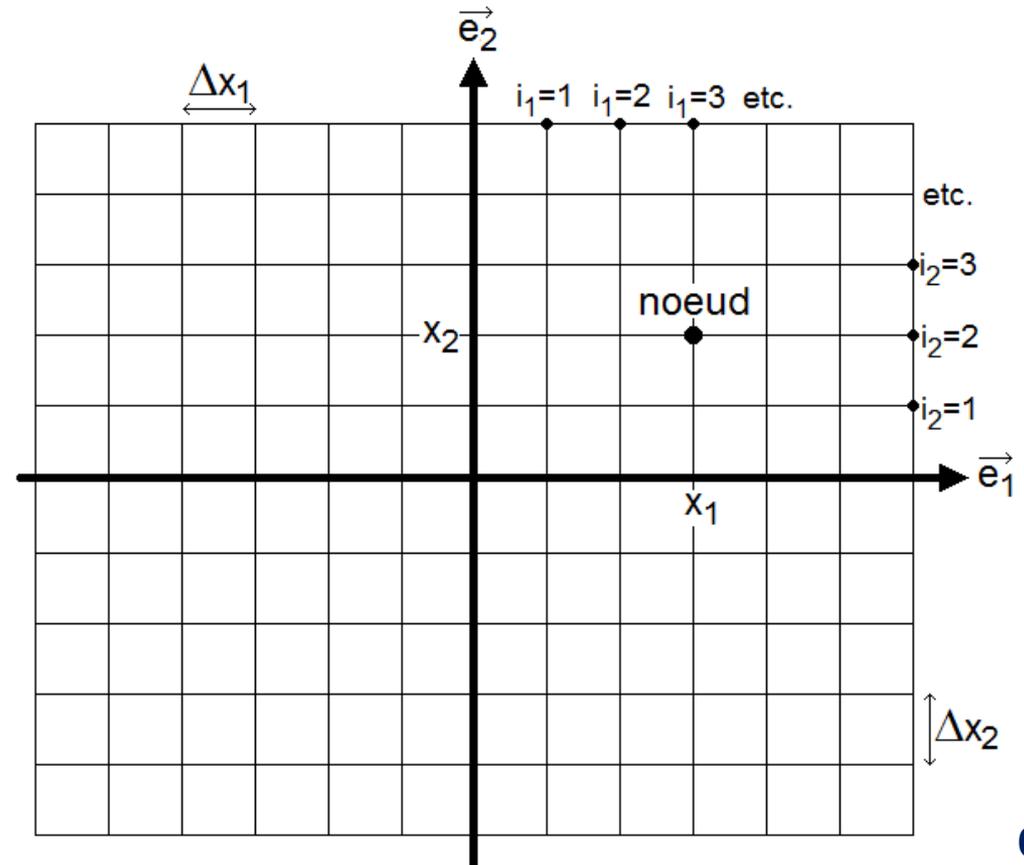
Sous ces conditions, on peut proposer une **discrétisation du domaine d'étude**.

Par exemple, dans le cas d'un problème à deux dimensions spatiales et à 0 dimension temporelle, on peut représenter le problème de la manière suivante :

Une telle discrétisation est appelée **maillage**. Dans le cas présent c'est uniquement un maillage spatial, mais on aurait aussi pu « mailler en temps ».

Un maillage est composé de **nœuds** et de **mailles**.

Chaque nœud est repéré par une collection d'indices entiers. En deux dimension, on a donc deux indices.



A. Méthode des différences finies

1. Discrétisation des variables

Un maillage est un fait **une « grille » que l'on substitue au milieu continu**. Au lieu de chercher à résoudre un problème de MMC en tout point du système, **on va uniquement chercher à le résoudre au niveau des nœuds de la grille**.

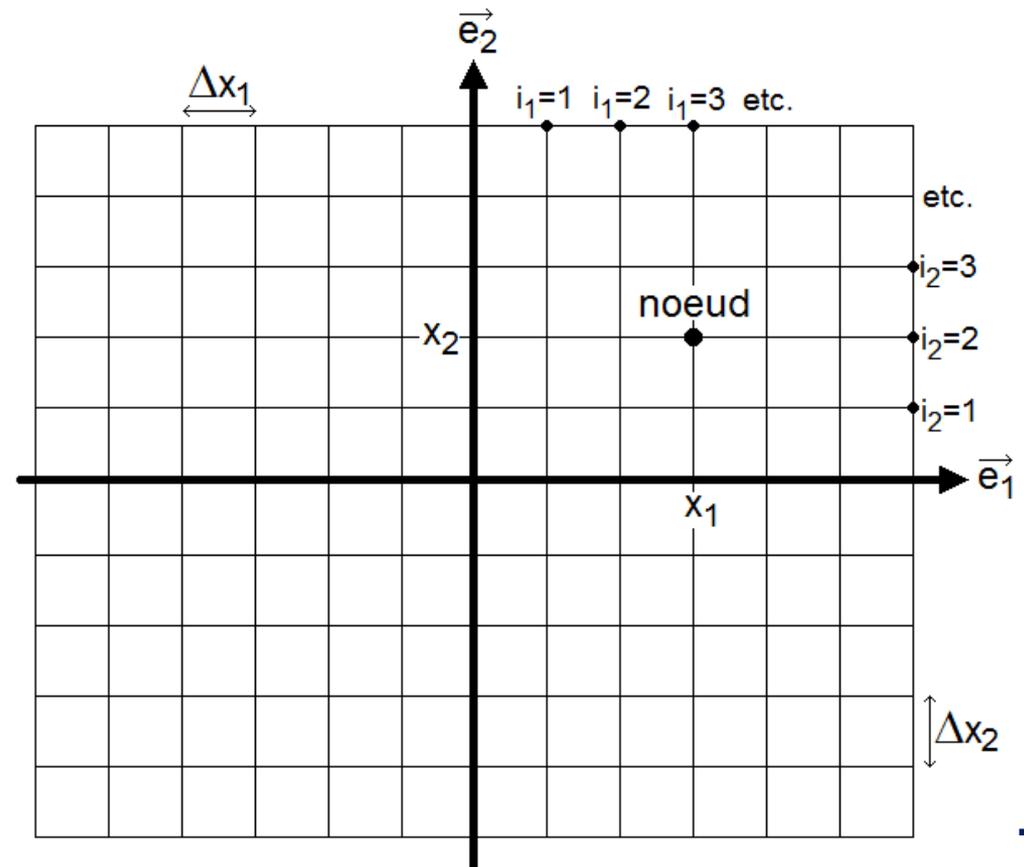
Au sein d'un maillage 2D, le vecteur position d'un nœud s'exprime de la manière suivante :

$$\vec{x} = (i_1 \cdot \Delta x_1) \vec{e}_1 + (i_2 \cdot \Delta x_2) \vec{e}_2$$

Dans le cas de la figure, on a :

$$\begin{cases} i_1 = 3 \\ i_2 = 2 \end{cases}$$

Ce couple d'indice est entièrement suffisant pour représenter la position du nœud.



A. Méthode des différences finies

1. Discrétisation des variables

Comme on a posé l'HPP, on peut établir que la grille est « fixe » au cours de la résolution du problème, et donc que les coordonnées (i_1, i_2) sont valables à l'état initial et à l'état déformé.

L'intérêt de la discrétisation est que toutes les champs inconnus du problème peuvent également être discrétisés.

Champ de déplacements :

$$\vec{U}(i_1, i_2) = \vec{U}(3,2)$$

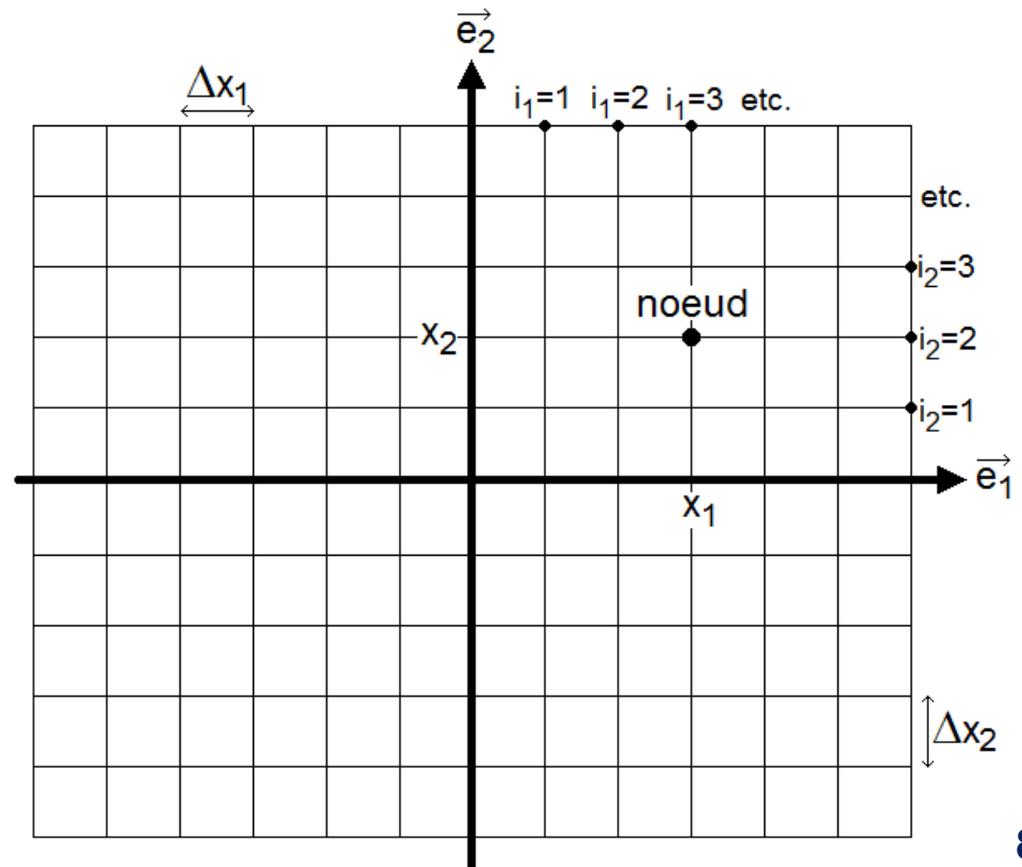
Champ de déformations :

$$\bar{\varepsilon}(i_1, i_2) = \bar{\varepsilon}(3,2)$$

Champ de contraintes :

$$\bar{\sigma}(i_1, i_2) = \bar{\sigma}(3,2)$$

Etc...



A. Méthode des différences finies

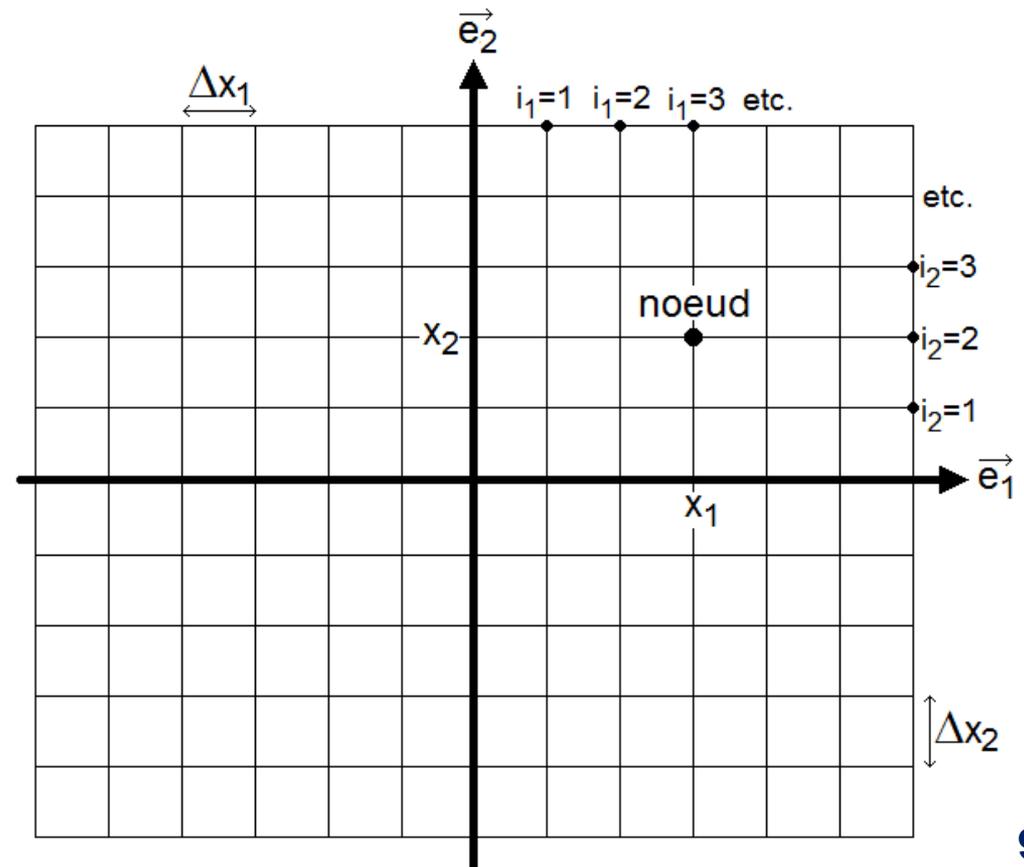
1. Discrétisation des variables

Si on travaillait sur un problème en trois dimensions spatiales et pour lequel le temps a une influence importante (processus instationnaire, vibrations, etc.), on aurait alors quatre dimensions, et les grandeurs du problème seraient repérées par quatre indices, par exemple :

$$\vec{U} = \vec{U}(i_1, i_2, i_3, i_t)$$

L'avantage de la méthode des différences finies est qu'elle remplace une infinité de variables (champs inconnus en tous points du système) par des variables en quantité finies (champs inconnus aux nœuds du maillage).

Malgré le très grand nombre de ces inconnues, c'est une simplification considérable.



A. Méthode des différences finies

2. Discrétisation des équations

Par l'opération de maillage, on a remplacé des champs continus en champs discrets.

Cela ne suffit pas à rendre le problème soluble, car les équations de la MMC sont valables sur un domaine continu, et ne peuvent pas être utilisées en l'état.

Pour résoudre le problème, on doit donc également discrétiser les équations de la MMC.

Puisque les équations de la MMC sont des EDP, on doit remplacer chaque opérateur différentiel (dérivée, dérivée seconde, gradient, laplacien, etc.) par un opérateur différentiel discret équivalent.

A. Méthode des différences finies

2. Discrétisation des équations

Imaginons par exemple une fonction $f(x)$ dans un espace à une seule dimension x .

Par développement de Taylor, on peut écrire une **approximation de la dérivée de cette fonction** :

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

On note que :

-Cette approximation est d'autant plus exacte que le paramètre h est petit.

-Cette formule permet d'approcher la dérivée de la fonction en utilisant uniquement les valeurs que cette fonction prend en certains points proches.

De la même manière, **la dérivée seconde** peut s'approcher par :

$$f''(x) \cong \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

A. Méthode des différences finies

2. Discrétisation des équations

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

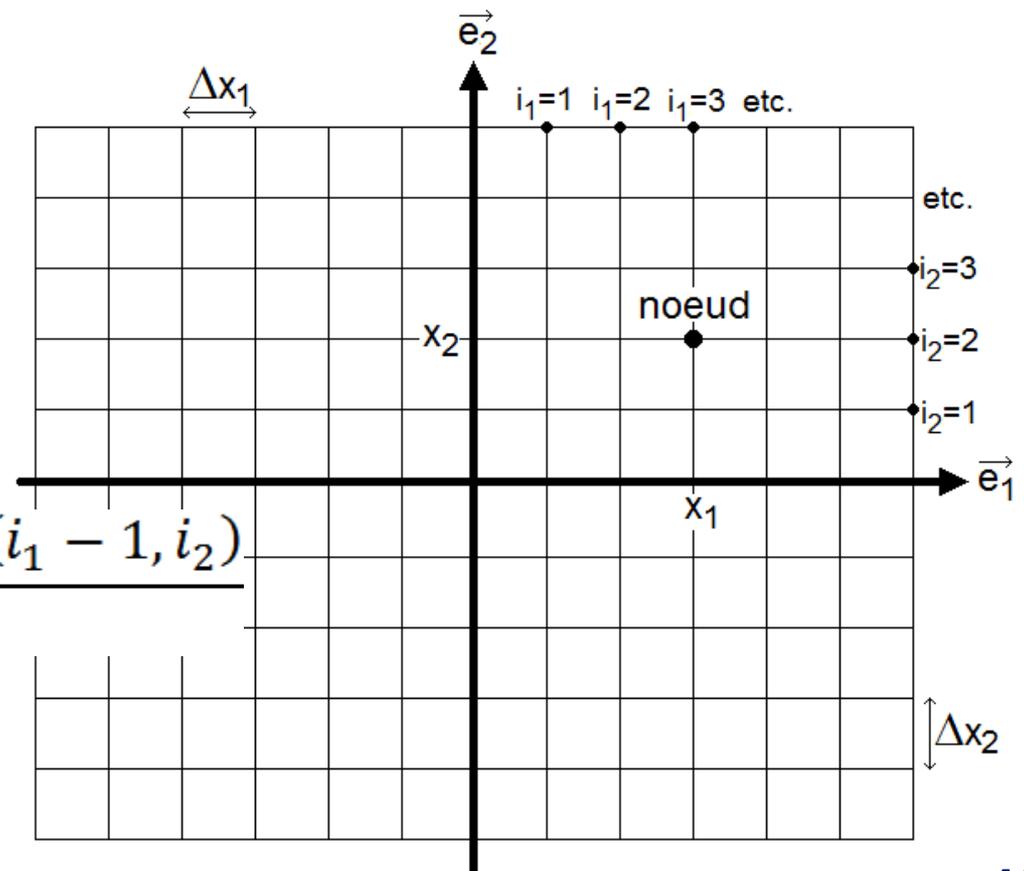
Cette approximation de la dérivation d'une fonction est analogue à une discrétisation si le paramètre h est choisi en rapport avec le maillage.

Par exemple, si on veut calculer la dérivée partielle du déplacement par rapport à la direction \vec{e}_1 au point $(3,2)$ on peut écrire la formule générale :

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}(i_1, i_2) \cong \frac{U(i_1 + 1, i_2) - U(i_1 - 1, i_2)}{2\Delta x_1}$$

Et donc :

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}(3,2) \cong \frac{u(4,2) - u(2,2)}{2\Delta x_1}$$



A. Méthode des différences finies

2. Discrétisation des équations

L'opération de dérivation du déplacement en un nœud donné s'est transformée en une relation linéaire entre les déplacements aux nœuds voisins.

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}(3,2) \cong \frac{u(4,2) - u(2,2)}{2\Delta x_1}$$

Cette opération peut être reproduite :

-En tous les nœuds du système

-Pour tous les champs intervenant dans les équations

-Pour tous les opérateurs différentiels (gradients, divergences, etc.), qui ne sont que des combinaisons de différentes dérivations partielles.

N'importe quelle équation de la MMC (par exemple le PFD $\overrightarrow{\text{div}}\bar{\sigma} + \rho\vec{g} = \vec{0}$) peut être ainsi transformée en une collection de relations linéaires entre les valeurs prises par les champs aux nœuds.

Ces relations sont ensuite regroupées en systèmes linéaires (de très grandes tailles !) que l'on sait très bien résoudre informatiquement.

A. Méthode des différences finies

2. Discrétisation des équations

Pour la résolution de ces systèmes d'équation, deux méthodes existent :

-méthode implicite : le système est résolu « d'un bloc », par une méthode d'inversion de matrice ou par pivot de Gauss, par exemple.

-méthode explicite : le système est résolu petit-à-petit en partant des conditions aux limites et/ou des conditions initiales. C'est la méthode utilisée en général pour les équations temporelles : le problème est résolu à chaque pas de temps à partir de la solution obtenue au pas de temps précédent.

La méthode des différences finies est séduisante, mais difficile à appliquer dans deux cas :

-Grands déplacements (le maillage doit alors « suivre le mouvement » et se déforme avec la matière, ce qui lui enlève ses propriétés d'orthogonalité et de régularité)

-Géométries complexes (il est alors très difficile de mettre en place un maillage sous forme d'une grille régulière)

Séance 11

B. Méthode des éléments finis

B. Méthode des éléments finis

1. Formulations forte et faible

On présente ici la méthode des éléments finis, appliquée au cas de l'élasticité linéaire isotrope en petites perturbations.

On rappelle les cinq équations fondamentales de ce problème :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{U} + \left(\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{U} \right)^T \right) \quad \forall M \in D$$

$$\overline{\text{div}} \vec{\bar{\sigma}} + \rho \vec{g} = \vec{0} \quad \forall M \in D$$

$$\vec{\bar{\sigma}} = \lambda \cdot \text{tr}(\bar{\bar{\varepsilon}}) \cdot \vec{I} + 2\mu \cdot \bar{\bar{\varepsilon}} \quad \forall M \in D$$

$$\vec{U} = \vec{U}_D \quad \forall M \in S_U$$

$$\vec{\bar{\sigma}} \vec{n} = \vec{T}_D \quad \forall M \in S_T$$

Il s'agit d'équations de compatibilité, d'équilibre, et de comportement, valables à l'intérieur du domaine ou à ses limites.

Ces cinq équations sont appelées formulation forte du problème élastique.

B. Méthode des éléments finis

1. Formulations forte et faible

On sait que l'équation de compatibilité et la loi de Hooke permettent d'obtenir les déformations et contraintes à partir du champ de déplacement, on se concentre donc uniquement sur celui-ci.

Par un long raisonnement mathématique (faisant intervenir le PPV), on peut démontrer que la formulation forte est équivalente à un autre problème, nommé **formulation faible du problème élastique** :

$$\vec{U} = \operatorname{argmin}_{\vec{u} \in C(U_D)} P(\vec{u})$$

Avec :

$$P(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_D \varepsilon R \varepsilon^T dV - \int_D \rho \vec{g} \cdot \vec{u} dV - \int_{S_T} \vec{T}_D \cdot \vec{u} dS$$

Cette formulation ne semble pas plus simple, mais a le mérite de se résumer en une seule et unique équation sous la forme « $\vec{U} =$ », ce qui n'était pas le cas de la formulation forte.

Comme on le voit, cette équation est en fait une **minimisation**. Comme la formulation forte, on ne sait pas la calculer directement. Mais pour résoudre un problème de minimisation, on connaît en revanche de nombreuses méthodes approchées.

B. Méthode des éléments finis

2. Minimisation de Galerkin

Une des méthodes de résolution du précédent problème de minimisation est la **méthode de Galerkin**. C'est sur cette méthode qu'est fondée la méthode des éléments finis.

$$\vec{U} = \operatorname{argmin}_{\vec{u} \in C(U_D)} P(\vec{u})$$

La formulation faible consiste à trouver le champ de déplacement conduisant à la valeur la plus faible possible de la fonctionnelle $P(\vec{u})$.

La difficulté majeure est que ce champ de déplacement est totalement libre, et que **la recherche du minimum s'effectue donc sur un espace de dimension infinie** (espace des valeurs de déplacements prises par l'infinité de points composant le système).

Mathématiquement, une telle recherche est souvent impossible. **La méthode de Galerkin est un moyen approché de transformer ce problème en une minimisation sur un espace de dimension finie.**



Boris Galerkin
1871-1945

B. Méthode des éléments finis

2. Minimisation de Galerkin

La méthode de Galerkin **postule** que le champ de déplacement inconnu a la forme suivante :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \overline{u^D}(\vec{x}) + \sum_{k=1}^N \alpha_k \overline{\varphi_k}(\vec{x})$$

Le champ $\overline{u^D}$ et les champs $\overline{\varphi_k}$ doivent être choisis a priori. Ils sont les champs élémentaires à partir desquels on cherche notre solution.

Si cette hypothèse est vérifiée, alors il suffit de trouver les bonnes valeurs des coefficients α_k , c'est-à-dire les valeurs qui minimisent la fonctionnelle $P(\vec{u})$. L'espace de recherche est donc bien de dimension finie. La minimisation consiste alors à rassembler ces coefficients dans un vecteur colonne α , et à **résoudre un système linéaire** donné par :

$$K\alpha = F$$

Avec :

$$K_{ij} = \int_D \varepsilon(\overline{\varphi_i}) \cdot R \cdot \varepsilon^T(\overline{\varphi_j}) dV$$

$$F_i = \int_D \varepsilon(\overline{u^D}) \cdot R \cdot \varepsilon^T(\overline{\varphi_i}) dV + \int_D \rho \vec{g} \cdot \overline{\varphi_i} dV + \int_{S_T} \overline{T_D} \cdot \overline{\varphi_i} dS$$

B. Méthode des éléments finis

2. Minimisation de Galerkin

A priori cette méthode est intéressante puisqu'elle transforme le problème d'élasticité en système d'équations linéaires.

$$K\alpha = F$$

Elle est pourtant très difficile à appliquer en l'état :

-Il n'est généralement pas possible de choisir judicieusement sur la seule base de l'intuition le champ \vec{u}^D et les champs $\vec{\varphi}_k$ qui conduiront à une solution précise du problème.

-Les intégrales contenues dans les termes généraux de K et de F sont des intégrales définies sur tout le domaine, qui peut avoir une géométrie très compliquée. Elles sont généralement impossibles à calculer.

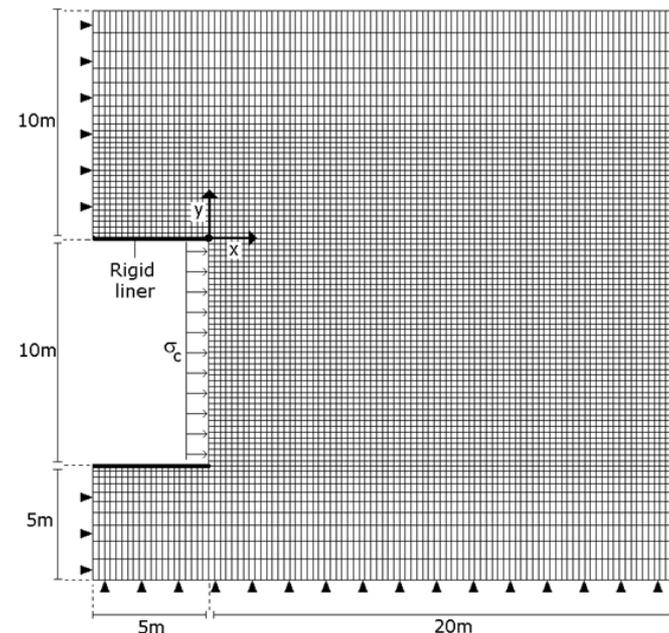
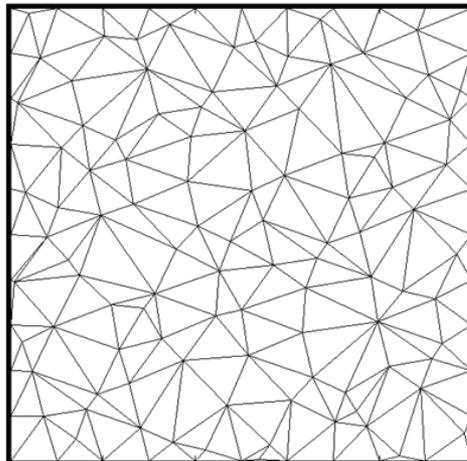
Pour lever ces difficultés, on a trouvé une méthode, appelée méthode des éléments finis. Il s'agit donc d'une sous-méthode de Galerkin.

B. Méthode des éléments finis

3. Elements finis

La méthode des éléments finis (MEF) consiste d'abord à effectuer un maillage du domaine mécanique étudié. Comme en différences finies, ce maillage consiste à partitionner le système en un grand nombre de petits éléments géométriques, à la différence près que l'on n'a pas les mêmes exigences de régularité : on n'a pas besoin qu'il s'agisse d'une « grille ».

La plupart du temps, ce maillage est effectué automatiquement par un programme informatique dédié, appelé « mailleur ». **Chaque maille est appelée « élément fini ».**



B. Méthode des éléments finis

3. Elements finis

Un maillage est défini par un certain nombre de degrés de liberté (DDL), qui correspondent aux déplacements possibles de chacun de ses nœuds.

Par exemple, un maillage à N_n nœuds en dimension 2 aura un total de $N_d = 2 * N_n$ DDL, car chaque nœud est a priori libre de se déplacer dans deux directions.

Certains de ces degrés de liberté sont fixés : ils correspondent aux nœuds appartenant à une condition limite en déplacement (pour lesquels le déplacement est fixé). Ces DDL sont au nombre de N_{db} .

Les degrés restants sont appelés les degrés libres et sont au nombre de $N_{dl} = N_d - N_{db}$.

Ces N_{dl} degrés libres sont les inconnues du problème : il s'agit des déplacements dans toutes les directions de l'espace des nœuds qui ne sont pas bloqués par les conditions aux limites.

B. Méthode des éléments finis

3. Elements finis

Cette schématisation permet de définir une collection judicieuse de champs de déplacements élémentaires dans le contexte de Galerkin :

- \vec{u}^D est le champ correspondant à un déplacement de tous les DDL bloqués (conformément aux conditions limites en déplacement), tous les autres déplacements de nœuds étant égaux à zéro.

- les champs $\vec{\varphi}_k$ correspondent chacun à un degré de liberté libre (déplacement d'un nœud donné dans une direction donnée, les autres nœuds restant fixes).

Le champ de déplacement global prend finalement la forme de la méthode de Galerkin :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{u}^D(\vec{x}) + \sum_{k=1}^N \alpha_k \vec{\varphi}_k(\vec{x})$$

On voit que ce champ résultat est la superposition des déplacements individuels de tous les nœuds, avec des coefficients α_k pour l'instant inconnus

B. Méthode des éléments finis

3. Elements finis

On a levé la première difficulté qui consistait à trouver les bons champs élémentaires.

La deuxième difficulté était de calculer les intégrales de domaine :

$$K_{ij} = \int_D \varepsilon(\vec{\varphi}_i) \cdot R \cdot \varepsilon^T(\vec{\varphi}_j) dV$$

$$F_i = \int_D \varepsilon(\vec{u}^D) \cdot R \cdot \varepsilon^T(\vec{\varphi}_i) dV + \int_D \rho \vec{g} \cdot \vec{\varphi}_i dV + \int_{S_T} \vec{T}_D \cdot \vec{\varphi}_i dS$$

Cette difficulté est levée par le fait que chacune de ces intégrales peut en fait être calculée sur un petit nombre d'éléments finis au lieu d'être calculée sur la totalité du domaine.

Ceci est lié au fait que les champs de déplacement élémentaires $\vec{\varphi}_k$ sont **locaux** : chacun correspond au **mouvement d'un seul nœud**.

Puisque la géométrie de chaque élément fini est simple, ces intégrales sont évaluées numériquement par une méthode de Gauss, et on peut remplir assez facilement les termes de K et F .

B. Méthode des éléments finis

3. Elements finis

Les différentes étapes de la méthode des éléments finis sont donc :

1. Définir un maillage.
2. Définir les degrés de liberté bloqués et les degrés libres.
3. Calculer numériquement les intégrales de domaine par une méthode de gauss sur chaque élément fini, et remplir le vecteur F et la matrice K .
4. Inverser la matrice K (cette opération représente l'immense majorité du temps de calcul).
5. Calculer les coefficients inconnus α_k en appliquant : $\alpha = K^{-1}F$
6. En déduire le champ de déplacement solution sous la forme de Galerkin :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{u}^D(\vec{x}) + \sum_{k=1}^N \alpha_k \vec{\varphi}_k(\vec{x})$$

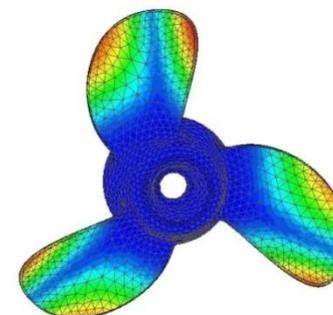
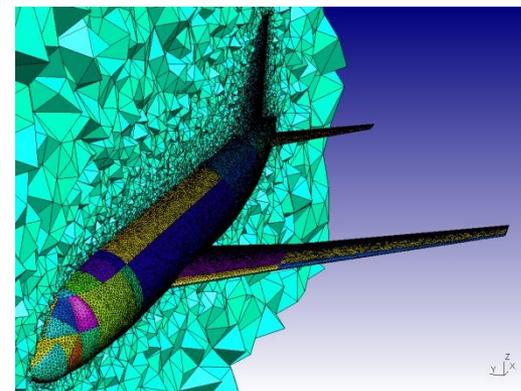
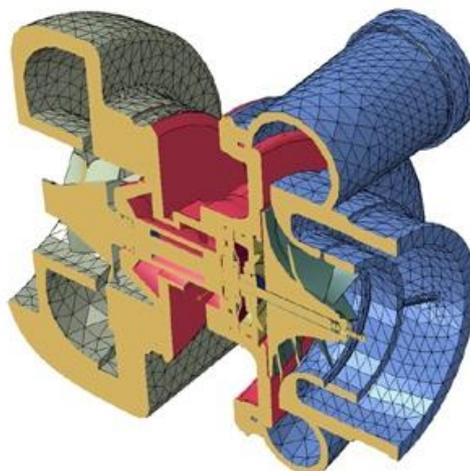
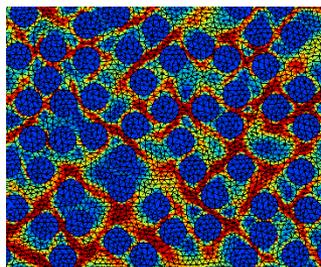
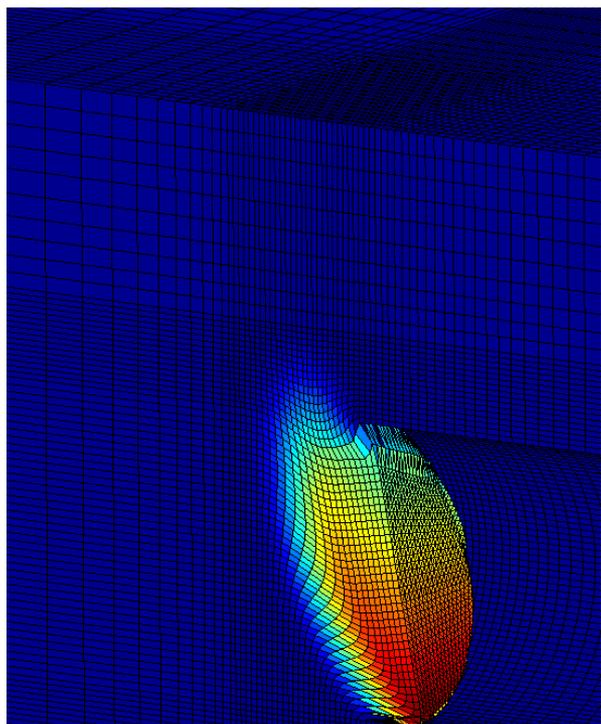
7. Utiliser l'équation de compatibilité et la loi de Hooke pour en déduire les déformations et les contraintes.

B. Méthode des éléments finis

3. Elements finis

La méthode des éléments finis est extrêmement puissante et flexible, et est appliquée dans la totalité des champs de l'ingénierie pour résoudre tous types de problèmes.

Elle est généralement implémentée dans des logiciels commerciaux qui incluent du DAO, un mailleur, un solveur, et un programme de représentation graphique des champs résultats.



Séance 11

C. Méthode des éléments discrets

C. Méthode des éléments discrets

On a présenté en détails la mécanique des milieux continus, en gardant en tête qu'elle repose sur **l'hypothèse de la continuité de la matière et du champ de déplacement.**

On peut imaginer de nombreuses situations pour lesquelles cette hypothèse n'est pas vérifiée, comme par exemple:

-La fissuration, la fracturation, et la rupture d'un matériau qui était pourtant continu dans son fonctionnement normal.

- les matériaux granulaires (sable, argile, céréales, gélules), composés d'un très grand nombre de particules distinctes.

A l'extrême limite, on peut même affirmer que la physique tout-entière repose sur des bases discontinues (particules élémentaires, etc.), et qu'aucun matériau n'est réellement continu si on y regarde d'assez près.



C. Méthode des éléments discrets

Le cas des matériaux granulaires est de premier intérêt pour un géotechnicien. On peut avoir **deux approches** :

-rester dans le cadre de la MMC, mais utiliser une loi de comportement très complexe pour essayer de représenter la réalité des phénomènes : loi élasto-plastiques anisotropes, à élasticité non-linéaire, à loi d'écoulement non associées, avec écrouissage complexe, etc. C'est l'approche la plus traditionnelle, mais elle est complexe et pas entièrement couronnée de succès.

-sortir du cadre de la MMC et mettre la discontinuité du matériau à la base de la modélisation.

Pour développer cette deuxième approche, on a inventé une méthode de modélisation numérique particulière, appelée méthode des éléments discrets (MED).



C. Méthode des éléments discrets

La MED consiste à **déterminer la cinématique de chacun des « grains » composant le matériau granulaire**. Ces grains sont supposés non-déformables, et sont libres de se déplacer. Ils doivent néanmoins suivre les lois physiques suivantes :

-Chaque grain (repéré par un numéro i) doit suivre la deuxième loi fondamentale du mouvement de Newton :

$$m_i \cdot \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt} = \vec{F}_i$$

-Deux grains quelconques ne peuvent pas occuper la même portion de l'espace (condition de « non-interpénétrabilité »)

Dans la plupart des simulations de MED « classiques », on fait l'hypothèse (discutable) que les grains sont de formes sphériques (circulaires en 2D).

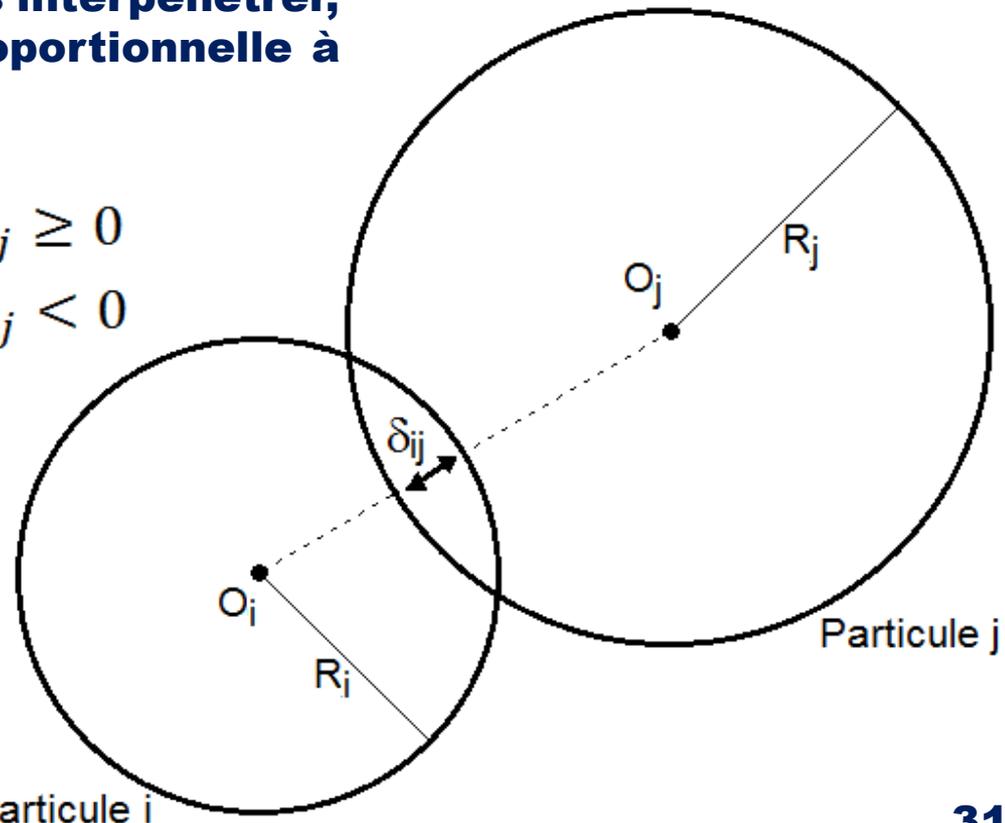
C. Méthode des éléments discrets

Pour assurer la condition de non-interpénétrabilité, on est obligé de **vérifier chaque couple de particules**.

Si deux particules commencent à s'interpénétrer, on applique une force répulsive proportionnelle à la distance d'interpénétration :

$$\vec{F}_{ij} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } \delta_{ij} \geq 0 \\ -k \cdot \delta_{ij} \cdot \vec{n}_{ij} & \text{si } \delta_{ij} < 0 \end{cases}$$

C'est ce qu'on appelle une force de contact normale. Dans beaucoup de cas, on applique également des forces de frottement, qui sont donc des forces de contact tangentielles.





C. Méthode des éléments discrets

Selon ce que l'on cherche à modéliser, la loi de contact (loi donnant la force de répulsion et les forces de frottement en fonction du mouvement des particules en contact) **peut être plus ou moins réaliste, et donc plus ou moins complexe.**

C'est l'équivalent discret du modèle de comportement utilisé en MMC.

La situation est simple pour deux particules, mais peut vite devenir **très complexe pour un grand nombre de particules** (1000, 10000, 100000, etc.) interagissant les unes avec les autres.

Il faut en effet tester tous les couples de particules pour vérifier leur interpénétration.

C'est la source de **l'obstacle majeur de cette méthode : les temps de calcul.**

C. Méthode des éléments discrets

L'algorithme principal de la méthode est le suivant :

1. Définir les N particules (tailles, positions, etc.)
2. Définir un pas de temps Δt
3. Définir à quel instant t_{fin} la simulation s'arrêtera
4. Initialiser le temps : $t = 0$
5. Tant que $t < t_{fin}$, faire tourner la boucle principale suivante :
 6. Pour tous les grains i , de 1 à N :
 7. Initialiser la force totale subie par i : $\vec{F}_i = \vec{0}$
 8. Pour tous les grains j , de 1 à N :
 9. Calculer δ_{ij} , l'interpénétration entre i et j
 10. Calculer \vec{F}_{ij} , force appliquée par j sur i
 11. Mettre à jour la force totale reçue par i : $\vec{F}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{ij}$
 12. Fin de la boucle sur j
 13. Calculer l'accélération de la particule i à partir de la force \vec{F}_i subie
 14. Fin de la boucle sur i
 15. Pour tous les grains i , de 1 à N :
 16. Calculer la nouvelle position de la particule i
 17. Fin de la boucle sur i
 18. Avancer dans le temps : $t = t + \Delta t$
 19. Fin de la boucle principale

C. Méthode des éléments discrets

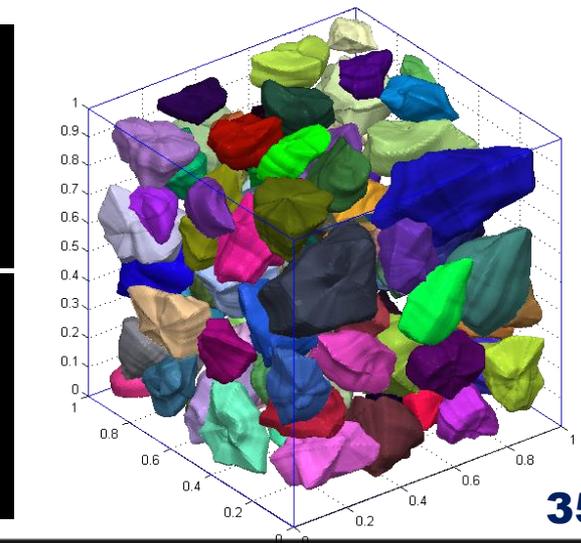
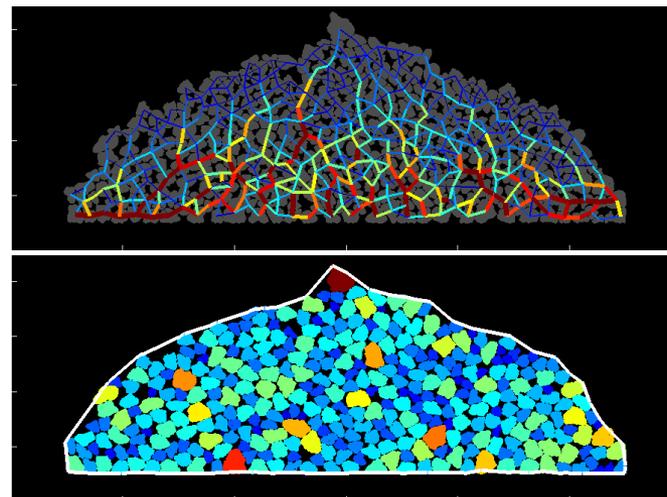
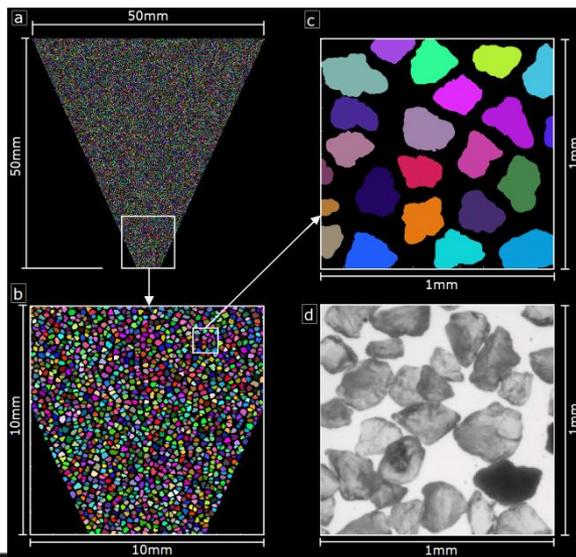
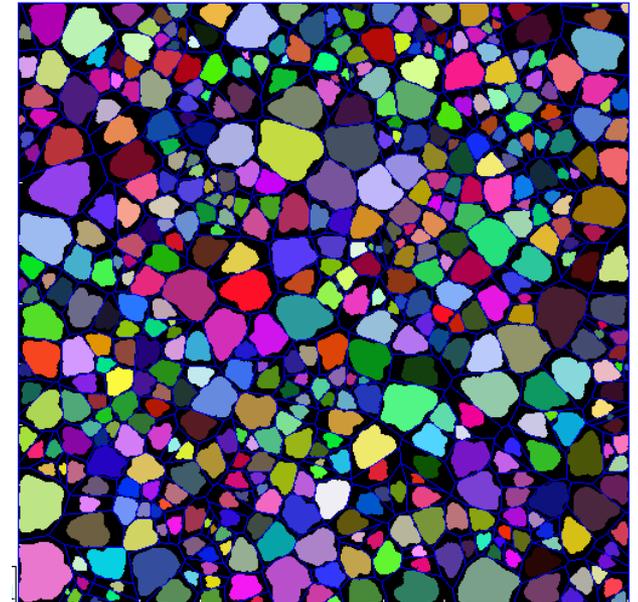
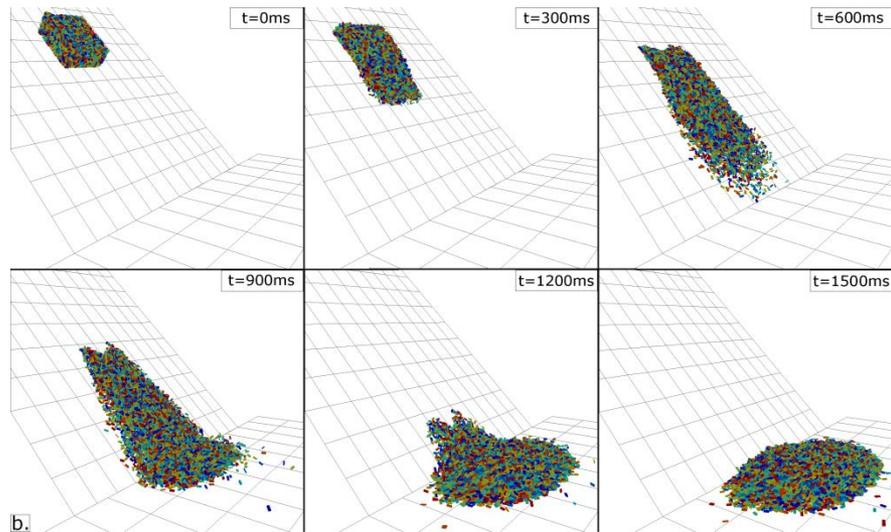
La méthode des éléments discrets est donc une **méthode explicite** (qui suit le déroulement du temps, et calcule chaque situation à partir de la situation précédente).

C'est également pour cette raison qu'elle induit des **temps de calcul très importants**, et est pour l'instant essentiellement utilisée dans la recherche et les entreprises de hautes technologies (EDF, Areva, etc.).

Les approches contemporaines consistent à :

- introduire des formes non-circulaires** plus conformes à la réalité des morphologies de géomatériaux.
- introduire de la cohésion** entre les particules
- coupler** la DEM avec le comportement d'un fluide environnant (sol saturé, etc.)
- optimiser l'algorithme** pour réduire les temps de calcul

C. Méthode des éléments discrets



C. Méthode des éléments discrets

