Mécanique des milieux continus

Séance 10 : Comportement des liquides

Guilhem MOLLON

GEO3 2012-2013

Plan de la séance

A. Généralités sur les liquides

1. Le fluide parfait
2. Notion de viscosité

B. Application du PFD à un liquide

1. Contraintes
2. Equation de Navier-Stokes

C. Théorème de Bernoulli

A. Généralités sur les liquides

A. Généralités sur les liquides

On appelle **liquide** un matériau qui a les propriétés suivantes :

-facilement déformable

-très peu compressible

La première propriété le distingue d'un solide, et la seconde le distingue d'un gaz.

Contrairement aux solides, **les liquides (et les fluides en général) ne vont généralement pas atteindre l'équilibre statique s'ils sont soumis à une force destabilisante constante** : ils vont s'écouler de manière continue.

Pour les solides, on cherche des lois **force-déplacement** (i.e. contraintes-déformations).

Pour les liquides, on cherche plutôt des lois force-vitesse (i.e. contraintes-taux de déformations).

A. Généralités sur les liquides

Un fluide est dit **parfait** s'il est possible de décrire son comportement sans recourir à la notion de **viscosité** et aux effets de conductivité thermique.

Un tel fluide n'oppose **aucune résistance à son mouvement**, et ses déformations ne dissipent pas d'énergie : il suit donc une évolution non-dissipative, ou isentropique.

Ce modèle n'est pas réaliste mais rend souvent service par sa simplicité.

Par exemple, soumis à une force constante, un tel fluide va subir un mouvement éternellement accéléré, ce qui est contraire à l'expérience : il n'atteindra jamais de régime permanent.

A. Généralités sur les liquides

Un fluide parfait ne peut reprendre ou transmettre **aucune contrainte de cisaillement**. Son tenseur de Cauchy a donc toujours l'allure suivante :

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p\bar{\bar{I}} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

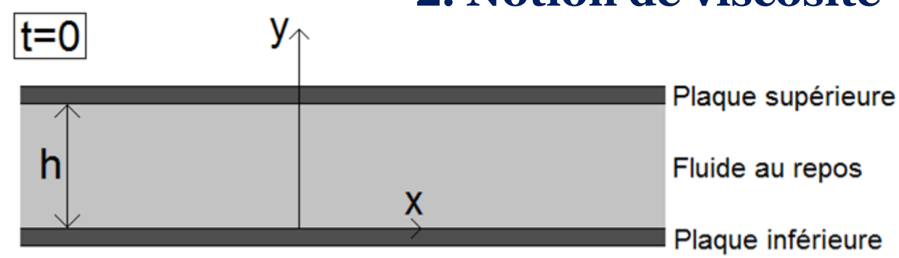
Le scalaire p correspond à la **valeur locale de la pression**.

Cette situation **ne doit pas être confondue avec celle d'un fluide quelconque au repos** : la forme du tenseur est la même, mais les variations spatiales du champ de contraintes sont différentes :

-Dans un fluide quelconque au repos, la pression augmente linéairement avec la profondeur

-Dans un fluide parfait en mouvement, la pression varie de manière complexe en fonction des forces appliquées au fluide

A. Généralités sur les liquides



Imaginons l'expérience suivante :

Un fluide réel au repos est placé entre deux plaques parallèles, infiniment grandes, séparées par une distance h .

A un instant $t = 0$, on met la plaque supérieure en mouvement, ce qui suppose de lui appliquer une force $\vec{F}$ horizontale.

La plaque inférieure est maintenue en place.

A. Généralités sur les liquides

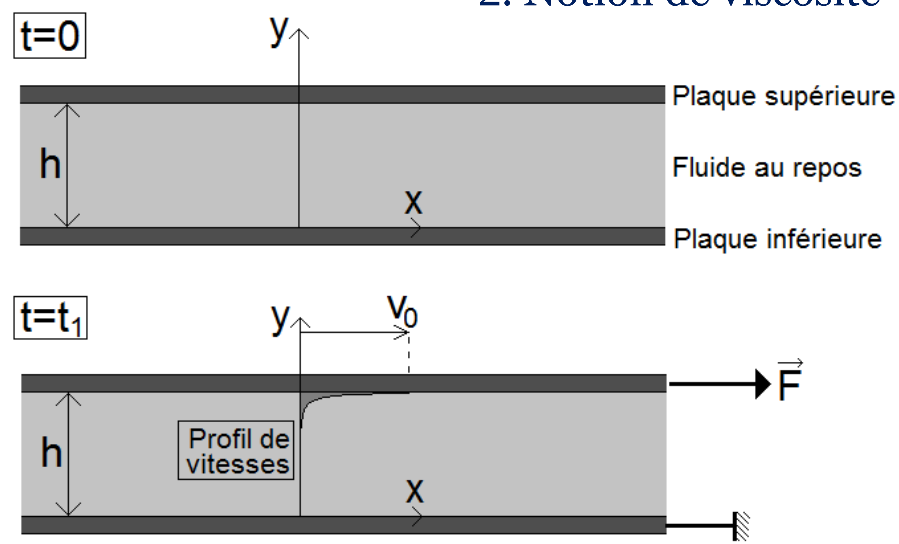
On fait toujours en mécanique des fluides l'hypothèse que les particules fluides en contact avec un solide ont une vitesse nulle par rapport à celui-ci.

On dit qu'il y a **adhérence parfaite** entre le fluide et la paroi.

Par conséquent, les particules en contact avec la plaque supérieure sont animées du même mouvement

Dans un fluide réel, on va observer une **transmission progressive de ce mouvement** de haut en bas : le liquide va se mettre progressivement en mouvement.

A un instant $t = t_1$, par exemple, la partie supérieure du liquide a acquis une vitesse.

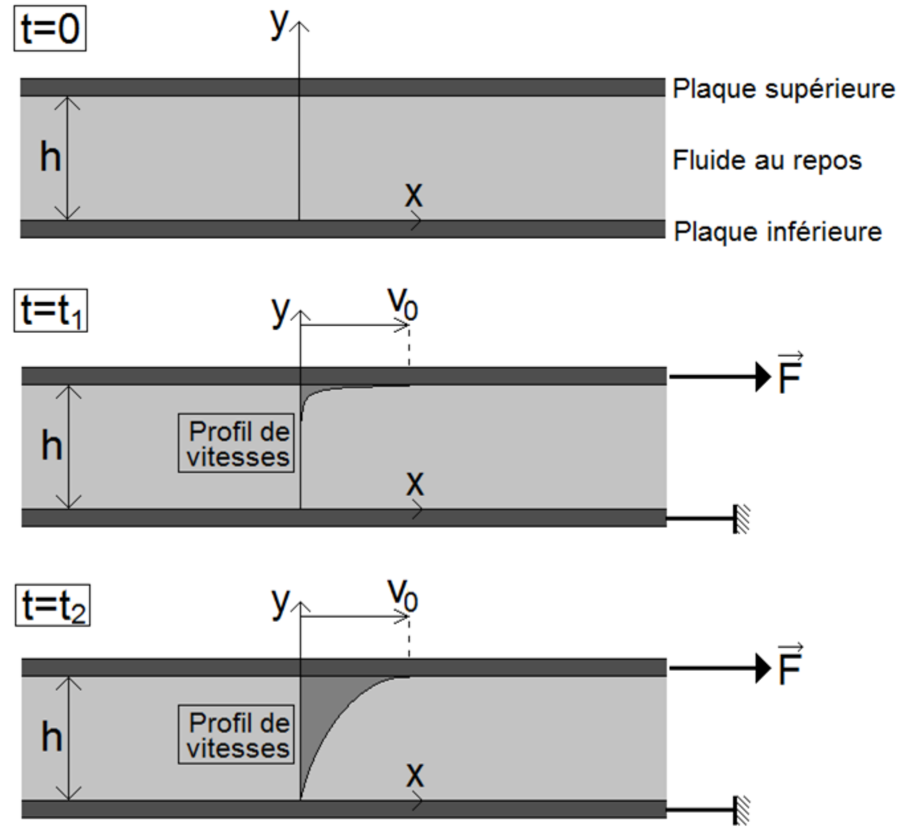


A. Généralités sur les liquides

Si on se place à un instant ultérieur $t = t_2$, on observe qu'une proportion encore plus importante du liquide a été mise en mouvement.

On remarque que la vitesse se transmet d'une couche à l'autre de fluide, de haut en bas, par **cisaillement**. Cette transmission ne serait donc pas possible dans un fluide parfait.

Au cours de ce **régime transitoire**, un **profil de vitesses** se développe petit à petit entre les deux plaques.

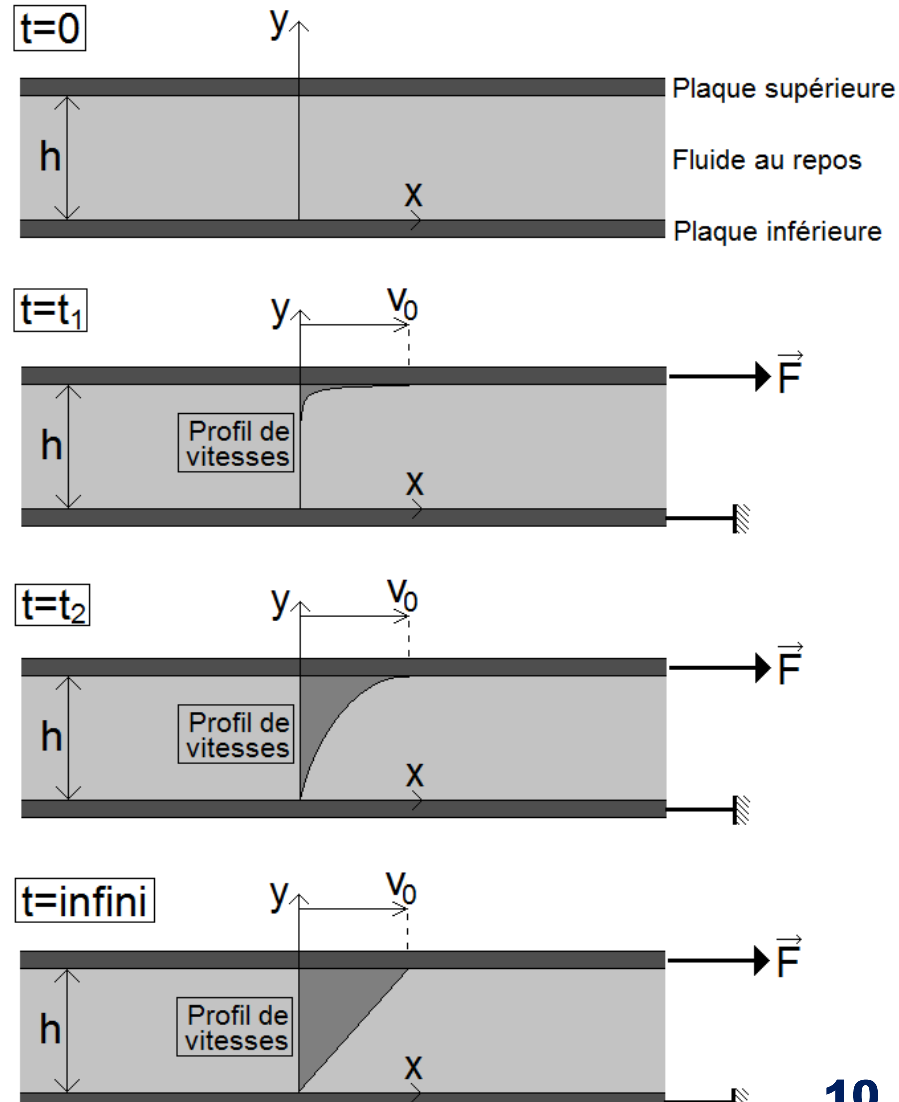


A. Généralités sur les liquides

Après une certaine durée, **le régime transitoire devient un régime permanent** car le profil de vitesse devient constant (champ de vitesse contant en coordonnées eulériennes).

Puisque les particules inférieures du liquide adhèrent à la paroi inférieure, elles ont une vitesse nulle.

Le profil de vitesse du régime permanent est donc parfaitement linéaire, et correspond à un **cisaillement constant au sein du fluide**.

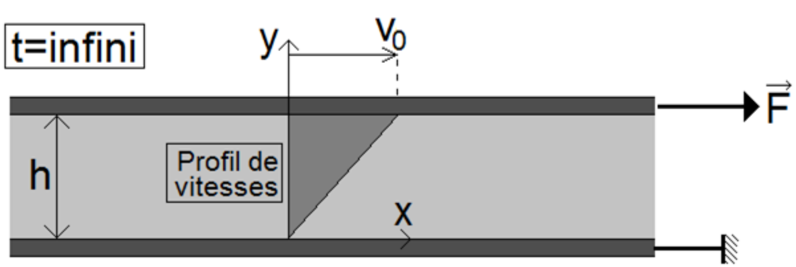


Pour **maintenir ce mouvement permanent**, il est nécessaire de continuer à appliquer constamment une force $\vec{F}$ à la plaque supérieure.

En l'absence de cette force, **le fluide réel cisaillé dissipe progressivement son énergie cinétique**, et la plaque supérieure ralentit progressivement jusqu'à son arrêt.

Réciproquement, la force qu'il est nécessaire d'appliquer pour maintenir le mouvement permanent dépend de la résistance du fluide à son cisaillement. Cette résistance est appelée viscosité et notée μ .

Si on appelle L la largeur des plaques, la section de fluide cisaillée vaut $A = L \cdot h$, et on a :



$$\frac{\|\vec{F}\|}{A} = \mu \frac{v_0}{h}$$

Le **profil de vitesse variant linéairement** avec la profondeur, on peut écrire :

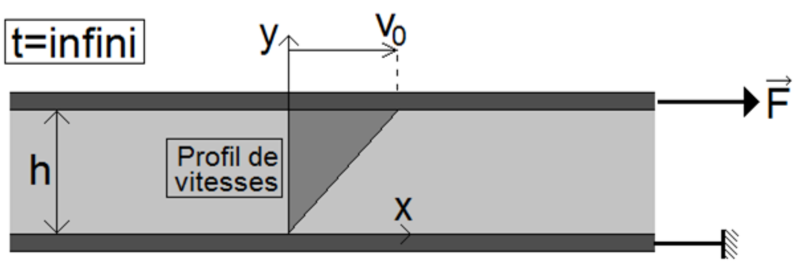
$$v_x(y) = v_0 \frac{y}{h}$$

On peut alors définir un **gradient de vitesse** constant dans le système :

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{v_0}{h}$$

Par ailleurs, la **contrainte de cisaillement** fluide est la même partout dans le système et vaut :

$$\tau_{xy} = \frac{\|\vec{F}\|}{A} = \frac{\|\vec{F}\|}{L \cdot h}$$



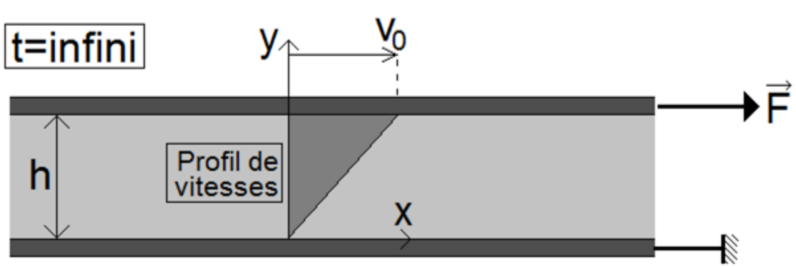
A. Généralités sur les liquides

Dans les conditions simples de cette expérience, on peut donc écrire la relation suivante :

$$\tau_{xy} = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

Le coefficient de viscosité se définit donc comme le rapport de proportionnalité entre une contrainte de cisaillement et le gradient de vitesse qu'elle induit en régime permanent.

Dans le cas d'un écoulement 3D complexe, le rôle de la viscosité est bien entendu beaucoup plus complexe à représenter, car l'expression précédente doit être « tensorisée ».



A. Généralités sur les liquides

Modéliser un comportement fluide consiste à trouver une loi fournissant la valeur du coefficient de viscosité en fonction d'un grand nombre de paramètres possibles :

- température
- vitesse de déformation
- pression
- contrainte de cisaillement
- etc.

La science qui étudie ces comportements s'appelle la **rhéologie**.

La modélisation la plus simple du comportement d'un fluide réel s'appelle le modèle du **fluide newtonien**. Ce modèle repose sur l'hypothèse suivante :

$$\mu = constante$$

Ce modèle est extrêmement performant pour décrire la majorité des fluides simples, et en particulier l'eau. Pour des fluides plus complexes (sang, boue, béton frais), on peut avoir recours à des modèles de **fluides non-newtoniens**.

Séance 10

B. Application du PFD à un liquide

B. Application du PFD à un liquide

Dans un fluide réel, on a coutume d'exprimer le **tenseur de contraintes** en faisant apparaître la valeur de la **pression** :

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}}$$

Cette expression fait également apparaître un nouveau tenseur $\bar{\bar{\tau}}$.

Il s'agit du **tenseur des contraintes visqueuses**, égal à zéro dans le cas d'un fluide parfait. Ce tenseur est donc lié à l'effet de la viscosité.

Dans un fluide réel en mouvement et dans une base donnée, on peut donc écrire :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

Le tenseur des contraintes visqueuses est symétrique : $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

B. Application du PFD à un liquide

Pour décrire le comportement d'un fluide, on doit utiliser le **tenseur des taux de déformation eulériens** $\overline{\overline{D}}$, défini au chapitre 3 :

$$D_{ij} = \left(\overline{\overline{L}}^S\right)_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$$

Ce tenseur est égal à la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse.

Il a un rôle similaire pour la vitesse $\vec{V}$ que $\overline{\overline{\varepsilon}}$ pour le déplacement $\vec{U}$.

De la même manière qu'une loi de comportement solide relie contraintes et déformations, une loi de comportement fluide relie contraintes visqueuses et taux de déformations eulériens :

$$\overline{\overline{\tau}} = \mathcal{F}\left(\overline{\overline{D}}\right)$$

B. Application du PFD à un liquide

Dans le cas du fluide newtonien, cette loi est **linéaire et isotrope**.

Par des raisonnements analogues à ceux utilisés pour définir la **loi de Hooke** du solide élastique, on peut formuler **la loi de comportement du fluide newtonien** de la manière suivante :

$$\tau_{ij} = 2\mu \cdot D_{ij} - \frac{2}{3} tr\left(\overline{\overline{D}}\right) \cdot \delta_{ij}$$

En faisant apparaître la vitesse, on obtient :

$$\tau_{ij} = \mu \cdot \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \cdot \delta_{ij}$$

B. Application du PFD à un liquide

Dans le chapitre 5, on a présenté la **formulation locale du principe fondamental de la dynamique** :

$$\rho\vec{\gamma} = \overrightarrow{div}\,\overline{\overline{\sigma}} + \rho\vec{g}$$

Cette expression se reformule en **notation indicielle** :

$$\rho\frac{DV_i}{Dt} = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i$$

Pour un fluide, on peut exprimer cette équation en faisant apparaître le **tenseur des contraintes visqueuses** :

$$\rho\frac{DV_i}{Dt} = \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i$$

On peut enfin rebasculer en **notation intrinsèque**, et écrire :

$$\rho\vec{\gamma} = \overrightarrow{div}(\overline{\overline{\tau}}) - \overrightarrow{grad}(p) + \rho\vec{g}$$

B. Application du PFD à un liquide

Dans le cas d'un **fluide parfait**, on peut faire disparaître le **tenseur des contraintes visqueuses** :

$$\rho\vec{\gamma} = \rho\vec{g} - \overrightarrow{grad}(p)$$

On appelle cette expression l'**équation d'Euler**.

En revanche, **dans le cas d'un fluide newtonien**, on conserve le terme de contraintes visqueuses, mais on va faire apparaître le champ de vitesse. Pour ceci, **on combine le PFD et la définition du fluide newtonien**, le tout en notation indicielle :

$$\rho\frac{DV_i}{Dt} = \boxed{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i$$

$$\boxed{\tau_{ij} = \mu \cdot \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial V_k}{\partial x_k} \cdot \delta_{ij}}$$

B. Application du PFD à un liquide

Henri Navier
1785-1836

En combinant ces équations, on obtient :

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = \mu \Delta V_i \cdot + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(div\, \vec{V} \right) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i$$

Cette expression peut ensuite être écrite en notation intrinsèque :

$$\rho \vec{\gamma} = -\overrightarrow{grad}(p) + \rho \vec{g} + \mu \Delta \vec{V} + \frac{\mu}{3} \overrightarrow{grad}\left(div\, \vec{V} \right)$$

Il s'agit de la très importante **équation de Navier-Stokes**, qui décrit en une ligne toute la complexité du comportement du fluide newtonien.

B. Application du PFD à un liquide

$$\rho\vec{\gamma} = -\overrightarrow{grad}(p) + \rho\vec{g} + \mu\Delta\vec{V} + \frac{\mu}{3}\overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{V}\right)$$

Dans cette expression, on voit apparaître les termes suivants :

- $\rho\vec{\gamma}$ **Quantité d'accélération** en un point donné.

- $\overrightarrow{grad}(p)$ **Variation spatiale de la pression**, un des moteurs de l'écoulement

- $\rho\vec{g}$ **Poids** de la particule fluide, deuxième moteur de l'écoulement

- $\mu\Delta\vec{V}$ **Variation spatiale de la vitesse** (description cinématique de l'écoulement)

- $\frac{\mu}{3}\overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{V}\right)$ terme de **dilatation volumique** (Divergence de la vitesse)

B. Application du PFD à un liquide

$$\rho\vec{\gamma} = -\overrightarrow{grad}(p) + \rho\vec{g} + \mu\Delta\vec{V} + \frac{\mu}{3}\overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{V}\right)$$

Si on récapitule, **l'équation de Navier Stokes** est une formule vectorielle, qui donne l'accélération d'une particule de fluide newtonien en fonction de plusieurs champs :

-Champs scalaires : Masse volumique ρ

Pression p

-Champs vectoriels : Gravité $\vec{g}$

Vitesse $\vec{V}$

En faisant certaines hypothèses sur les propriétés ou le comportement du fluide, on peut souvent simplifier cette expression.

B. Application du PFD à un liquide

$$\rho\vec{\gamma} = -\overrightarrow{grad}(p) + \rho\vec{g} + \mu\Delta\vec{V} + \frac{\mu}{3}\overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{V}\right)$$

Un exemple courant de simplification consiste à imaginer un **fluide incompressible (mouvement isochore), soumis à un écoulement à forte pression**.

Dans ce cas la divergence de la vitesse est nulle : $\frac{\mu}{3}\overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{V}\right) = \vec{0}$

Par ailleurs, sous forte pression, la contribution de la gravité au mouvement est très faible devant celle des forces de pressions, et on peut négliger le terme : $\rho\vec{g}$

Finalement, **sous ces conditions**, on peut reformuler l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho\vec{\gamma} = \mu\Delta\vec{V} - \overrightarrow{grad}(p)$$

B. Application du PFD à un liquide

$$\rho\vec{\gamma} = -\overrightarrow{grad}(p) + \rho\vec{g} + \mu\Delta\vec{V} + \frac{\mu}{3}\overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{V}\right)$$

Un autre cas pour lequel on peut faire des simplifications est celui du **fluide au repos**.

Dans ce cas, on peut **négliger tous les termes de vitesse et d'accélération**, et on obtient une version très simplifiée de la formule :

$$\overrightarrow{grad}(p) = \rho\vec{g}$$

En intégrant cette formule, on obtient :

$$p = \rho g H$$

Il s'agit de la **Loi de Pascal**, où H désigne la profondeur de la particule fluide considérée.

C. Théorème de Bernoulli

C. Théorème de Bernoulli

$$\rho\vec{\gamma} = -\overrightarrow{grad}(p) + \rho\vec{g} + \mu\Delta\vec{V} + \frac{\mu}{3}\overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{V}\right)$$

Une autre simplification importante de l'équation de Navier-Stokes est possible sous les hypothèses suivantes :

-Fluide parfait

-Fluide homogène et incompressible

-Ecoulement permanent

Dans ce cas on peut annuler tous les termes faisant intervenir la viscosité et la divergence de la vitesse, et on obtient une **équation de Navier-Stokes simplifiée** :

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}(p) + \rho\vec{g}$$

C. Théorème de Bernoulli

Puisque le fluide est incompressible, on peut **développer le vecteur gravité** :

$$\rho\vec{g} = -\rho \cdot \overrightarrow{grad}(gz)$$

De plus, par plusieurs opérations de calcul tensoriel, on peut **développer le terme d'accélération** pour faire disparaître la dérivée particulaire :

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \left(rot\ \vec{V}\right) \wedge \vec{V}$$

En injectant ces deux expressions dans l'équation $\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}(p) + \rho\vec{g}$ (**Navier-Stokes simplifié**), on obtient :

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \left(rot\ \vec{V}\right) \wedge \vec{V} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}(p) - \overrightarrow{grad}(gz)$$

C. Théorème de Bernoulli

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \left(rot\,\vec{V}\right) \wedge \vec{V} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}(p) - \overrightarrow{grad}(gz)$$

Pour aller plus loin avec cette expression, on va :

-faire rentrer la masse volumique (constante) dans le gradient de pression :

$$\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}(p) = \overrightarrow{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

-rassembler tous les gradients sous le même opérateur

-faire apparaître le vecteur tourbillon $\vec{\omega} = rot\,\vec{V}$

-utiliser la stationnarité du mouvement pour écrire $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{0}$

Il vient alors : $$\overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) + \vec{\omega} \wedge \vec{V} = \vec{0}$$

C. Théorème de Bernoulli

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz\right)+\vec{\omega}\wedge\vec{V}=\vec{0}$$

La dernière opération consiste à **projeter cette égalité vectorielle sur la ligne de courant locale.**

Cette ligne est définie localement par un vecteur $\vec{s}$ colinéaire à $\vec{V}$. Il vient :

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz\right)=0$$

De cette expression, on déduit **que la quantité** $\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz$ **est une constante sur une ligne de courant**.

Cette propriété, vérifiée pour tout écoulement permanent de fluide parfait incompressible, est appelée **Théorème de Bernoulli**.

C. Théorème de Bernoulli

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz\right)+\vec{\omega}\wedge\vec{V}=\vec{0}$$

L'équation se simplifie encore plus lorsqu'on pose une hypothèse cinématique sur le type d'écoulement. Dans certains cas, on peut en effet poser :

$$\vec{\omega}=rot\,\vec{V}=\vec{0}$$

Il s'agit de l'hypothèse de l'**écoulement irrotationnel**. On l'utilise par exemple dans le cas d'un écoulement en conduite.

Dans ce cas, on a : $\overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz\right)=\vec{0}$

Cela signifie que la quantité $\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz$ est **constante dans tout l'écoulement**.

C'est le théorème de Bernoulli appliqué aux écoulements irrotationnels.