POLYTECH GRENOBLE

Mécanique des milieux continus

Séance 1 : Introduction, Mathématiques

Guilhem MOLLON

GEO3 2012-2013

Plan de l'année

Partie 1 : Notions principales de la MMC

- Mathématiques
- Cinématique, déformations
- Lois fondamentales, contraintes

Partie 2 : Lois de comportement et techniques de résolution

- Elasticité, élastoplasticité
- Comportement des fluides
- Méthodes de résolution numérique

Contact :

Guilhem MOLLON
Attaché Temporaire Enseignement et Recherche
Laboratoire Sols, Solides, Structures et Risques (3SRLab)
Guilhem.mollon@gmail.com

Planning :

Cours, 12 séances de deux heures
TD, 9 séances de deux heures

Plan de la séance

A. Introduction à la MMC

1. Définition
2. Hypothèses principales
3. Applications

B. Algèbre tensorielle

1. Espaces, notations
2. Tenseurs
3. Opérations sur les tenseurs

C. Analyse tensorielle

1. Opérateurs différentiels
2. Transformations d'intégrales

Séance 1

A. Introduction à la MMC

A. Introduction à la MMC

Mécanique :

Branche de la physique qui décrit les mouvements et les équilibres d'un système

Milieu :

A ne pas confondre avec « matériau ». La MMC est, dans un premier temps, une discipline « abstraite », capable de s'adapter à un grand nombre de situations. Elle se spécialisera seulement en seconde partie du cours (mécanique du solide déformable, mécanique des fluides, etc.)

Continu :

On introduit ici la notion d'échelle d'observation, car tous les matériaux réels sont discontinus si on y regarde d'assez près.

La MMC est donc une modélisation mathématique du réel qui repose sur des hypothèses vérifiées dans des conditions données.

A. Introduction à la MMC

Sir Isaac Newton
1643-1727

Mécanique du point :

La plus simple des mécaniques « modernes », fondée sur les résultats de Newton.
Notions : masse, force

Mécanique du solide indéformable :

On ajoute une « forme » au système de mécanique du point, et donc un volume et une distribution de masse dans ce volume.
Notions : rotation, inertie, moment

Mécanique des milieux continus :

On ajoute la possibilité au système de changer de forme, ce qui implique des outils mathématiques beaucoup plus complexes.
Notions : déformations, contraintes, etc.

A. Introduction à la MMC

On dit souvent que la matière est sous l'un des trois états classiques :

solide, liquide, gazeux

Question : que faire des mots suivants :

fluide, pâteux, mou, épais, plastique, visqueux, etc. ?

Faut-il développer une théorie pour chacun de ces comportements ?

La réponse est non, car la MMC les couvre tous. En fait, dans un premier temps, la MMC n'a pas besoin de la notion de « consistance », et propose une modélisation mathématique commune à tous ces types de milieux.

On décrira cette consistance seulement dans un second temps, avec la notion de modèle de comportement, propre à chaque application dans le monde physique.

A. Introduction à la MMC

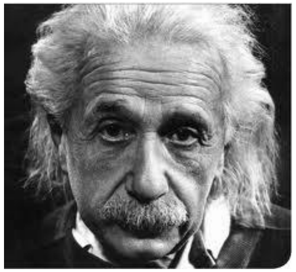
L'échelle du problème est très grande devant la taille des particules élémentaires :

La MMC n'est pas « quantique »

Max Planck
1858-1947

La vitesse de la matière dans le milieu d'étude est négligeable devant celle de la lumière :

La MMC n'est pas « relativiste »



Albert Einstein
1879-1955

La MMC est donc une mécanique dite « classique »

A. Introduction à la MMC

L'hypothèse principale de la MMC est nommée « hypothèse de continuité » :

Les propriétés de la matière (densité, rigidité, etc.) sont continues

L'intérêt de cette hypothèse (parfois contestable) est de pouvoir représenter mathématiquement toutes les grandeurs par des champs, continus et dérivables en temps et en espace.

Implication concrète de cette hypothèse :

La MMC ne s'intéresse qu'à des « moyennes locales »

Il est impossible de suivre le mouvement individuel de toutes les particules élémentaires d'un milieu. Par exemple, la pression appliquée par un fluide sur une paroi immergée est le résultat d'un très grand nombre d'impacts de particules. Pourtant, on la représente par un seul nombre, qui est l'effet moyen de ces collisions.

A. Introduction à la MMC

La MMC est partout :

En tant que théorie de la déformation de la matière, la MMC est absolument omniprésente dans les sciences de l'ingénieur. C'est un des langages communs de l'ingénierie.

Applications les plus évidentes :

-Procédés industriels (usinage, extrusion, etc.), industrie mécanique (aéronautique, automobile, etc.), biomécanique, matériaux composites, micromécanique, …

-Structures de génie civil, bâtiments, ponts, barrages, routes, ouvrages béton, acier, bois, etc.

-Mécanique des fluides, aérodynamique, écoulements en canaux et conduites, écoulements fluviaux et souterrains

-Géophysique, mécanique des sols, mécanique des roches

-Etc.

A. Introduction à la MMC

Pour un géotechnicien :

La MMC sera utilisée pour répondre, par exemple, aux questions suivantes :

-De combien de millimètres cette fondation va-t-elle tasser ?

-Au bout de combien de temps ce tassement sera-t-il atteint ?

-Quel charge ce soutènement peut-il supporter avant de céder ?

-Ce talus sera-t-il stable en cas de grosse pluie ?

-Quel débit d'eau va s'infiltrer au travers de ce barrage ?

-etc.

Rigidité, Résistance, Stabilité, Ecoulement

Avertissement :

La plupart de équations mathématiques de la MMC sont insolubles à la main car trop complexes, et même très souvent insolubles analytiquement.

C'est pourquoi, dans le cadre de ce cours :

On ne cherchera pas à résoudre des équations, mais seulement à les poser.

Bien entendu, les ingénieurs disposent d'une multitude de méthodes de résolutions approchées de ces équations. On en parlera brièvement à la fin du cours.

Pour l'essentiel, on va se concentrer sur la théorie, et non pas sur sa résolution concrète.

B. Algèbre tensorielle

La mécanique des milieux continus s'exprime dans un univers à trois dimensions spatiales et une dimension temporelle.

Espace

Les trois dimensions spatiales forment un espace euclidien (espace vectoriel muni d'un produit scalaire). On note cet espace *E3*, et on utilisera couramment une base orthonormée notée *B* :

$$B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$$

Si on choisit un point O comme origine, on aura donc un repère noté :

$$(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$$

Un élément de cet espace est nommé « vecteur », et est noté $\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}$

Temps

Dans le cadre de la mécanique classique, le temps est absolu. Il est muni d'une structure de droite orientée, dont les points sont appelés « instants » et notés *t*

B. Algèbre tensorielle

Notation d'Einstein

La notation d'Einstein est une convention propre au calcul tensoriel. Elle permet d'alléger considérablement les notations.

On l'appelle aussi « notation indicielle », ou « convention de l'indice muet ».

Cette convention d'écriture s'énonce ainsi :

« Si un indice apparaît deux fois dans le même monôme, on lui fait prendre les valeurs 1, 2, et 3, et on fait la somme de l'ensemble »

Dans cet énoncé, un indice représente une référence à un des axes de la base $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$

Un indice prend donc toujours la valeur 1, 2, ou 3

Un vecteur peut par exemple s'écrire : $\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3} = x_i\overrightarrow{e_i}$

Notation d'Einstein

En suivant cette convention, on peut écrire :

$$a_i \cdot b_i = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Et par conséquent :

$$a_i \cdot b_i = a_j \cdot b_j = a_\beta \cdot b_\beta$$

On appelle ceci un <u>indice muet</u> : la lettre choisie pour l'indice n'a aucune importance, la seule importance est qu'elle est répétée deux fois dans le même terme, et donc qu'on doit en faire la somme sur les trois dimensions de l'espace.

Dans le cas où on ne voudrait pas faire de somme malgré une répétition d'indice, on a coutume de souligner l'indice en question. Il est alors appelé <u>indice franc</u>.

Exemple : $a_{\underline{i}} \cdot b_{\underline{i}}$

On a donc : $$a_{\underline{i}} \cdot b_{\underline{i}} \neq a_{\underline{j}} \cdot b_{\underline{j}} \neq a_i \cdot b_i = a_j \cdot b_j = \sum_{i=1}^{3} a_{\underline{i}} \cdot b_{\underline{i}}$$

Notation d'Einstein

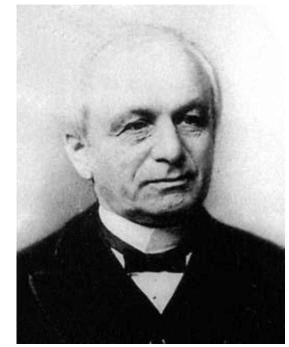
On aura souvent à mixer dans une même équation des indices francs et muets, comme par exemple lors du produit d'une matrice *a* par un vecteur *b* :

$$a_{ij} b_j = \sum_{j=1}^{3} a_{i\underline{j}} \cdot b_{\underline{j}} = a_{i1} b_1 + a_{i2} b_2 + a_{i3} b_3$$

Une des utilisations les plus évidentes de cette notation est le produit scalaire de deux vecteurs :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = U_i V_i$$

Il est important d'être à l'aise avec cette notation car elle est omniprésente dans la suite du cours. Par ailleurs, elle est beaucoup plus simple qu'elle n'en a l'air au premier abord.



Leopold Kronecker
1823-1891

Symbole de Kronecker

Le symbole de Kronecker (aussi appelé « le Kronecker ») se note δ_{ij}

Il peut prendre deux valeurs :

$$\delta_{ij} = 1 \; si \; i = j$$

$$\delta_{ij} = 0 \; sinon$$

On rappelle que les indices *i* et *j* représentent des directions de l'espace et valent 1, 2, ou 3.

On a donc :

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = \delta_{\underline{ii}} = 1$$

$$\delta_{ii} = \delta_{jj} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$$

Notion de tenseur

Un tenseur est un objet mathématique défini par un ordre, qui est un entier positif ou nul. Par convention, on appellera généralement « tenseur » un tenseur d'ordre 2.

Définition

Un tenseur d'ordre 2 est une forme bilinéaire de $E_3 \times E_3$ dans $\mathbb{R}$

Autrement dit, il s'agit d'une « fonction » qui fait correspondre un réel à deux vecteurs quelconques.

Si on applique un tenseur noté $\overline{\overline{T}}$ à deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, on obtiendra le scalaire $\overline{\overline{T}}\left(\vec{U},\vec{V}\right)$

B. Algèbre tensorielle

Dans la base courante $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, on appelle composantes de $\overline{\overline{T}}$ les 9 scalaires :

$$T_{ij} = \overline{\overline{T}}(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j})$$

On en déduit que, dans cette base, on peut représenter le tenseur par une matrice :

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Il faut retenir la chose suivante : **Un tenseur n'est pas une matrice**

En revanche, dans une base donnée de l'espace tridimensionnel, on peut représenter un tenseur d'ordre 2 par une matrice carrée 3*3.

Ainsi, dans une autre base $B' = \left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}\right)$,

le même tenseur s'exprimera par une matrice différente :

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{bmatrix}$$

B. Algèbre tensorielle

Si on reste dans une base donnée $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, on peut écrire le résultat du tenseur $\bar{\bar{T}}$

Appliqué à deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$. Il s'agit du scalaire :

$$\bar{\bar{T}}(\vec{U}, \vec{V}) = T_{pq} U_p V_q$$

En explicitant la notation d'Einstein (c'est la dernière fois !), on trouve :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{T}}(\vec{U}, \vec{V}) = {} & T_{11} U_1 V_1 + T_{12} U_1 V_2 + T_{13} U_1 V_3 \\ & + T_{21} U_2 V_1 + T_{22} U_2 V_2 + T_{23} U_2 V_3 \\ & + T_{31} U_3 V_1 + T_{32} U_3 V_2 + T_{33} U_3 V_3 \end{aligned}$$

Ceci est un exemple de simplification des notations apportée par cette convention d'écriture.

B. Algèbre tensorielle

Un tenseur $\bar{\bar{T}}$ est une forme bilinéaire, mais c'est aussi une application linéaire de E_3 dans E_3

Il peut donc, à tout vecteur $\vec{U}$, faire correspondre un vecteur $\vec{V}$ tel que :

$$\vec{V} = \bar{\bar{T}}\vec{U}$$

Dans une base $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, les coordonnées du vecteur $\vec{V}$ sont données par :

$$V_i = T_{ij} U_j$$

On reconnaît ici très exactement le produit matriciel classique, ligne par colonne :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

Les deux définitions données pour un tenseur sont liées par : $\bar{\bar{T}}(\vec{U}, \vec{V}) = \vec{U} \cdot \bar{\bar{T}}\vec{V}$

B. Algèbre tensorielle

Le tenseur transposé $\bar{\bar{T}}^T$ d'un tenseur $\bar{\bar{T}}$ vérifie : $\bar{\bar{T}}^T(\vec{U},\vec{V}) = \bar{\bar{T}}(\vec{V},\vec{U}) = T_{pq}U_qV_p$

La matrice de $\bar{\bar{T}}^T$ est alors la transposée de la matrice de $\bar{\bar{T}}$.

Un tenseur égal à son transposé est appelé tenseur symétrique, et sa matrice est symétrique dans toute base. Dans ce cas, on a toujours :

$$T_{ij} = T_{ji}$$

Un tenseur égal à l'opposé de son transposé est appelé tenseur antisymétrique, et sa matrice est antisymétrique dans toute base :

$$T_{ij} = -T_{ji}$$

Tout tenseur est égal à la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique :

$$\bar{\bar{T}} = \bar{\bar{T}}^S + \bar{\bar{T}}^A \quad \text{avec :} \quad \bar{\bar{T}}^S = \frac{1}{2}\left(\bar{\bar{T}} + \bar{\bar{T}}^T\right) \quad \text{et} \quad \bar{\bar{T}}^A = \frac{1}{2}\left(\bar{\bar{T}} - \bar{\bar{T}}^T\right)$$

B. Algèbre tensorielle

Soit deux bases quelconques $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ et $B' = \left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}\right)$. On peut écrire :

$\overrightarrow{e'_\iota} = \alpha_{ip}\overrightarrow{e_p}$ et $\overrightarrow{e_\iota} = \alpha_{pi}\overrightarrow{e'_p}$, où α est la **matrice de changement de base**.

On peut trouver facilement les coefficients de α si on garde à l'esprit que :

Le terme α_{ij} représente la j-ième coordonnée de $\overrightarrow{e'_\iota}$ dans la base B.

Cette matrice permet d'exprimer un vecteur ou un tenseur dans une nouvelle base B' si on

connaît leurs coordonnées U_i et T_{ij} dans la base B :

$$T'_{ij} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}T_{pq}$$

$$U'_i = \alpha_{ip}U_p$$

B. Algèbre tensorielle

Le tenseur identité est le tenseur dont les composantes dans toute base vérifient $I_{ij} = \delta_{ij}$

On a donc dans toute base : $\bar{\bar{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

On appelle polynôme caractéristique de $\bar{\bar{T}}$ la fonction $det\left(\bar{\bar{T}} - \lambda\bar{\bar{\mathrm{I}}}\right)$. Ce polynôme est le même dans toute base.

Ce polynôme peut aussi s'exprimer : $det\left(\bar{\bar{T}} - \lambda\bar{\bar{\mathrm{I}}}\right) = -\lambda^3 + I_I\lambda^2 - I_{II}\lambda + I_{III}$

Les trois coefficients sont nommés **invariants principaux** de $\bar{\bar{T}}$ et sont des constantes quelle que soit la base :

$$I_I = T_{ii}$$

$$I_{II} = \frac{1}{2}\left(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}\right)$$

$$I_{III} = \varepsilon_{ijk}T_{i1}T_{j2}T_{k3}$$

Ces invariants sont « intrinsèques » à $\bar{\bar{T}}$.

Par ailleurs, I_I est nommé « trace » de $\bar{\bar{T}}$

et I_{III} est nommé « déterminant » de $\bar{\bar{T}}$.

B. Algèbre tensorielle

Les racines du polynôme caractéristiques (valeurs de λ pour lesquelles il s'annule) sont nommées **valeurs propres** du tenseur et notées λ1, λ2, et λ3 :

$$det\left(\bar{\bar{T}} - \lambda\bar{\bar{\mathrm{I}}}\right) = -\lambda^3 + I_I\lambda^2 - I_{II}\lambda + I_{III}$$
$$= -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$$

Chaque valeur propre permet de définir un **vecteur propre** $\overrightarrow{U_i}$ tel que $\bar{\bar{T}}\overrightarrow{U_i} = \lambda_{\underline{i}} U_{\underline{i}}$.

Avec les trois vecteurs propres, on forme une base dite **base principale** du tenseur, et notée :

$$\left(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3}\right)$$

Dans cette base, la matrice de $\bar{\bar{T}}$ est diagonale et s'exprime par $\bar{\bar{T}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$

Si $\bar{\bar{T}}$ est symétrique (ce sera très souvent le cas en MMC), alors $\left(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3}\right)$ est toujours orthonormée. Les vecteurs et valeurs propres auront très souvent un sens physique.

Comme pour les scalaires (+, -, ×, /, √…) et les vecteurs (produit scalaire et vectoriel), on peut effectuer des opérations sur les tenseurs.

On appelle **produit tensoriel** et on note $\otimes$ l'opération qui à deux vecteurs associe le tenseur d'ordre 2 $\left(\vec{X} \otimes \vec{Y}\right)$, dont les composantes sont égales à :

$$\left(\vec{X} \otimes \vec{Y}\right)_{ij} = X_i Y_j$$

Le produit tensoriel d'un tenseur d'ordre 2 et d'un vecteur est un tenseur d'ordre 3 et de composantes :

$$\left(\overline{\overline{T}} \otimes \vec{X}\right)_{ijk} = T_{ij} X_k$$

Le produit tensoriel consiste donc à créer un nouveau tenseur dont l'ordre est la somme des deux ordres initiaux, et dont les composantes sont les produits de toutes les composantes initiales, selon toutes les combinaisons possibles.

B. Algèbre tensorielle

On appelle **produit contracté** l'opération, notée parfois « . », qui s'applique à deux tenseurs d'ordre quelconque et produit un nouveau tenseur d'ordre égal à la somme des deux ordres initiaux **moins deux** (c'est ce qu'on appelle « contraction »).

Le plus simple des produits contractés est le **produit scalaire** de deux vecteurs :

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = X_i Y_i$$

On peut aussi définir le produit contracté d'un tenseur et d'un vecteur, et il s'agit du résultat de l'application linéaire liée à ce tenseur :

$$\vec{Y} = \bar{\bar{T}}\vec{X} \quad \text{et} \quad Y_i = T_{ij} X_j$$

Il s'agit également du classique **produit d'une matrice par un vecteur**.

Enfin, on définit le produit contracté de deux tenseurs d'ordre 2, qui est également d'ordre 2 :

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}} \quad \text{et} \quad C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$$

Il s'agit également du classique **produit matriciel** « lignes par colonnes »

B. Algèbre tensorielle

On appelle **produit doublement contracté** l'opération notée « : » qui s'applique à deux tenseurs d'ordre quelconque et produit un nouveau tenseur d'ordre égal à la somme des deux ordres initiaux **moins quatre** (c'est ce qu'on appelle « double contraction »).

On utilisera parfois en MMC le produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 2, qui est un scalaire égal à :

$$\bar{\bar{A}} : \bar{\bar{B}} = tr\left(\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}\right) = A_{ij}B_{ji}$$

Les opérations sur les tenseurs sont invariantes par rapport à la base

C. Analyse tensorielle

C. Analyse tensorielle

En MMC, les scalaires, vecteurs, et tenseurs vont représenter des grandeurs physiques.

Ces grandeurs seront souvent variables, à la fois dans l'espace et dans le temps. On va donc travailler avec la notion de **champ**.

Champs de scalaires
Champs de vecteurs
Champs de tenseurs (d'ordre 2)

On aura par exemple :

$$\bar{\bar{T}} = \bar{\bar{T}}(X_1, X_2, X_3, t) = \bar{\bar{T}}\left(\vec{X}, t\right)$$

On a donc besoin d'outils mathématiques pour décrire leurs variations, à la fois dans le temps et dans l'espace. C'est ce qu'on appelle les **opérateurs différentiels**.

C. Analyse tensorielle

On se place dans un repère $R = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, et on identifie chaque point de l'espace

par son **vecteur position** dans ce repère :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{x} = x_p \overrightarrow{e_p}$$

Les calculs seront exprimés dans un repère, mais il faut garder à l'esprit qu'il s'agit d'opération « intrinsèques », qui sont donc invariantes par changement de repère.

Pour cette raison, on essaiera toujours de se placer dans une base qui simplifie les calculs.

C'est le cas, par exemple, de la base principale d'un tenseur symétrique : cette base est orthonormée, et la matrice du tenseur y est diagonale. C'est donc une base de calcul privilégiée.

C. Analyse tensorielle

L'opérateur **gradient** peut s'appliquer à des champs de tenseurs de différents ordres.

Il produira un champ de tenseurs dont l'ordre vaut celui du tenseur d'origine **plus un**. On dira donc que le gradient augmente l'ordre tensoriel d'une unité.

Le gradient est la traduction tridimensionnelle du concept de « pente » qui existe en deux dimensions. Il décrit la variation d'une grandeur selon les trois directions de l'espace.

Appliqué à un champ salaire, le gradient produit donc un champ vectoriel de coordonnées :

$$\left(\overrightarrow{grad}\, f\right)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Chaque coordonnée spatiale est donc la dérivée partielle du champ scalaire dans la direction correspondante. Le champ vectoriel résultant peut donc également s'écrire :

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\overrightarrow{e_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\overrightarrow{e_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\overrightarrow{e_3} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\overrightarrow{e_i}$$

C. Analyse tensorielle

On définit également l'opérateur gradient appliqué à un champ de vecteurs. Il s'agit d'un champ tensoriel d'ordre 2, dont les composantes sont :

$$\left(\overline{\overline{grad}}\ \vec{U}\right)_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

Enfin, on définit l'opérateur gradient appliqué à un champ tensoriel d'ordre 2, qui produit un champ tensoriel du troisième ordre :

$$\left(\overline{\overline{\overline{grad}}}\ \bar{\bar{T}}\right)_{ijk} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}$$

On note que le nombre de « barres » sur l'opérateur renseigne sur l'ordre du champ résultant.

C. Analyse tensorielle

Contrairement au gradient, l'opérateur **divergence** réduit l'ordre tensoriel d'une unité. Il produit donc un champ dont l'ordre tensoriel vaut celui d'origine moins un, et ne peut pas s'appliquer à un champ de scalaires.

Dans le cours, on l'appliquera surtout à des champs vectoriels. Dans ce cas, la divergence est la trace du gradient :

$$div\,\vec{U} = tr\left(grad\,\vec{U}\right)$$

On en déduit que la divergence d'un champ vectoriel est un champ scalaire donné par la somme des dérivées partielles de ses composantes dans les trois directions de l'espace :

$$div\,\vec{U} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}$$

La divergence peut aussi s'appliquer à un champ tensoriel, et produira alors un champ vectoriel de coordonnées :

$$\left(\overrightarrow{div}\,\overline{\overline{T}}\right)_i = \frac{\partial T_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{i3}}{\partial x_3} = \frac{\partial T_{ip}}{\partial x_p}$$

C. Analyse tensorielle

Le **laplacien** (noté Δ) conserve l'ordre tensoriel du champ auquel il est appliqué, car c'est la composition d'une divergence et d'un gradient. Appliqué à un champ scalaire, on a donc :

$$\Delta f = div\left(\overrightarrow{grad}\, f\right)$$

Pierre-Simon de Laplace
1749-1827

Le champ scalaire en résultat vaut donc :

$$\Delta f = \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial f}{\partial x_p}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

Le laplacien est la somme des dérivées secondes dans les trois directions de l'espace.

Cet opérateur peut aussi être appliqué à un champ vectoriel. Dans ce cas on a :

$$\vec{\Delta}\vec{U} = \overrightarrow{div}\left(\overline{\overline{grad}}\,\vec{U}\right)$$

Les coordonnées du champ vectoriel résultant sont : $\left(\vec{\Delta}\vec{U}\right)_i = \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_p}\right)$

C. Analyse tensorielle

Dernier opérateur différentiel, le **rotationnel** s'applique le plus souvent à un champ de vecteurs et conserve l'ordre tensoriel :

$$\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{U}\right)_i = \varepsilon_{ipq}\frac{\partial U_q}{\partial x_p}$$

Les trois composantes du champ vectoriel résultant sont donc :

$$\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{U}\right)_1 = \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3}$$

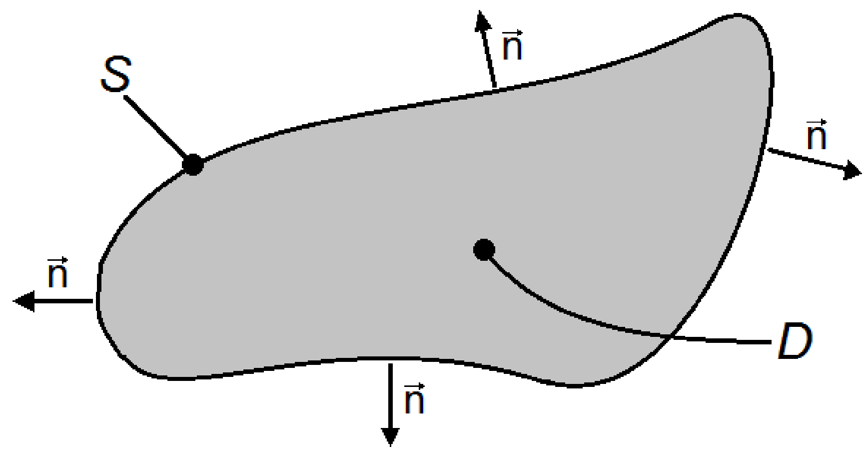
$$\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{U}\right)_2 = \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1}$$

$$\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{U}\right)_3 = \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}$$

Le rotationnel est très utilisé en mécanique des fluides (il décrit la notion de tourbillon), mais assez peu en mécanique du solide.

On introduit ici la notion de **domaine**.

Un domaine D est une région de l'espace délimitée à un instant donné par une surface fermée S.



On suppose la surface S suffisamment régulière, et on définit le champ vectoriel $\vec{n}$, qui est le champ des vecteurs unitaires normaux à la surface et pointant vers l'extérieur.

$\vec{n}$ est appelé **normale sortante** à la surface S.

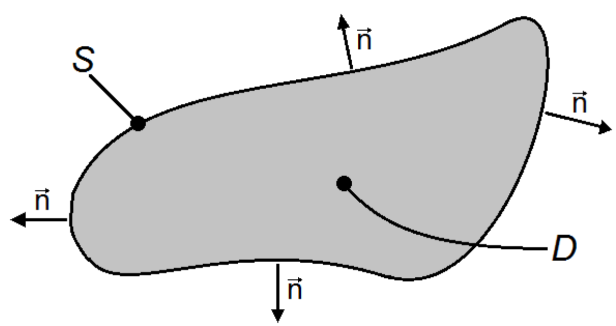
Les **formules de transformations d'intégrales** sont des outils mathématiques qui permettent de modifier la dimension d'un domaine d'intégration.

Les plus utilisées sont les **formules d'Ostrogradsky**, qui servent à faire correspondre une intégrale sur D (intégrale de volume) à une intégrale sur S (intégrale de surface). On les donne ici sans démonstration, appliquées à des champs scalaire, vectoriel, ou tensoriel :

$$\int_D \overrightarrow{grad}\, f\, dv = \int_S f\vec{n}\, dS$$

$$\int_D div\, \vec{U}\, dv = \int_S \vec{U}\cdot\vec{n}\, dS$$

$$\int_D \overrightarrow{div}\, \overline{\overline{T}}\, dv = \int_S \overline{\overline{T}}\vec{n}\, dS$$



Mikhaïl V. Ostrogradsky 1801-1862

Ces formules ont un intérêt calculatoire, mais auront aussi une forte signification lorsque les champs représenteront des grandeurs physiques. Ces formules permettront d'écrire le comportement d'une grandeur dans un domaine à partir de son comportement à la surface.