POLYTECH GRENOBLE

Hydraulique des terrains

Séance 4 : Formule de Bernoulli

Guilhem MOLLON

GEO3 2012-2013

http://guilhem.mollon.free.fr/Enseignement_Fr.html

Plan de la séance

A. Le fluide parfait

B. Théorème de Bernoulli

C. Représentation graphique

A. Le fluide parfait

A. Le fluide parfait

On introduit ici la notion fictive de **fluide parfait**. Il s'agit d'une hypothèse simplificatrice, car aucun fluide n'est parfait dans des conditions standards.

Un fluide parfait est un fluide de viscosité nulle

La viscosité d'un fluide est sa résistance à la déformation lorsqu'il est soumis à des forces. Par conséquent, un fluide parfait n'oppose aucune résistance à sa déformation.

Dans un fluide parfait, les particules fluides « glissent » les unes sur les autres sans opposer de frottement.

A. Le fluide parfait

En apportant une résistance à la déformation, a viscosité est également une source de dissipation d'énergie cinétique en énergie thermique, sous forme de frottement. En corollaire, on peut écrire la proposition suivante :

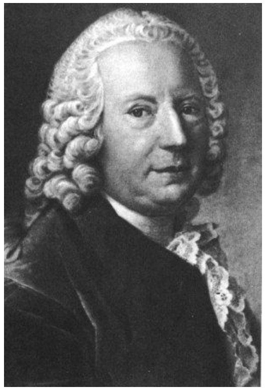
Un fluide parfait ne dissipe aucune énergie lors de sa déformation

C'est surtout cette propriété qui rend le modèle du fluide parfait attractif, car on va pouvoir écrire des bilans de conservation d'énergie et en tirer des règles d'écoulement.

En pratique, il est courant d'utiliser le modèle du fluide parfait même s'il est faux. La contribution de la viscosité d'un fluide réel peut ensuite être prise en compte de manière simplifiée par des formules issues de l'expérience, du calcul ou de la modélisation numérique.

B. Théorème de Bernoulli

B. Théorème de Bernoulli



Daniel Bernoulli
1700-1782

On considère l'écoulement stationnaire en conduite d'un fluide incompressible parfait.

Dans ce cas, on donne sans démonstration la formule de Bernoulli :

$$p+\rho\frac{V^2}{2}+\rho g z = constante$$

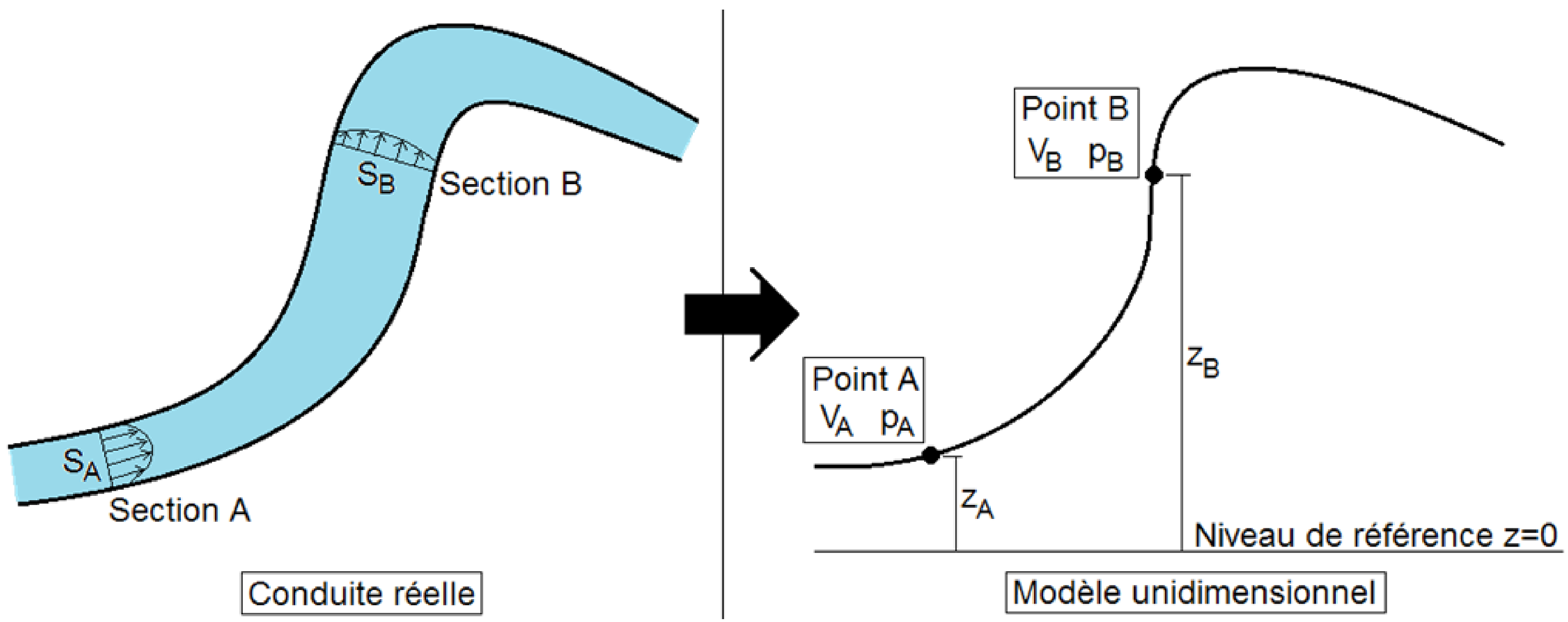
Cette formule s'applique à n'importe quelle **section droite** de la conduite :

- p est la **pression** sur la section de l'écoulement (supposée uniforme)
- V est la **vitesse moyenne** (vitesse débitante) du fluide sur la section
- ρ est la **masse volumique** (constante) du fluide
- z est la **cote** de l'axe de la section (l'axe z pointant vers le haut)
- g est l'accélération de la **pesanteur**

B. Théorème de Bernoulli

Pour utiliser en pratique le théorème de Bernoulli, on a recours au **modèle unidimensionnel** : on suppose que le diamètre de la conduite est très faible devant sa longueur, et on l'assimile à une ligne à une dimension.

A chaque point de cette ligne correspondent une **vitesse** (vitesse débitante de la section correspondante), une **pression** (pression existant au niveau de la section correspondante) et une **altitude** (altitude de l'axe de la conduite au niveau de la section correspondante).

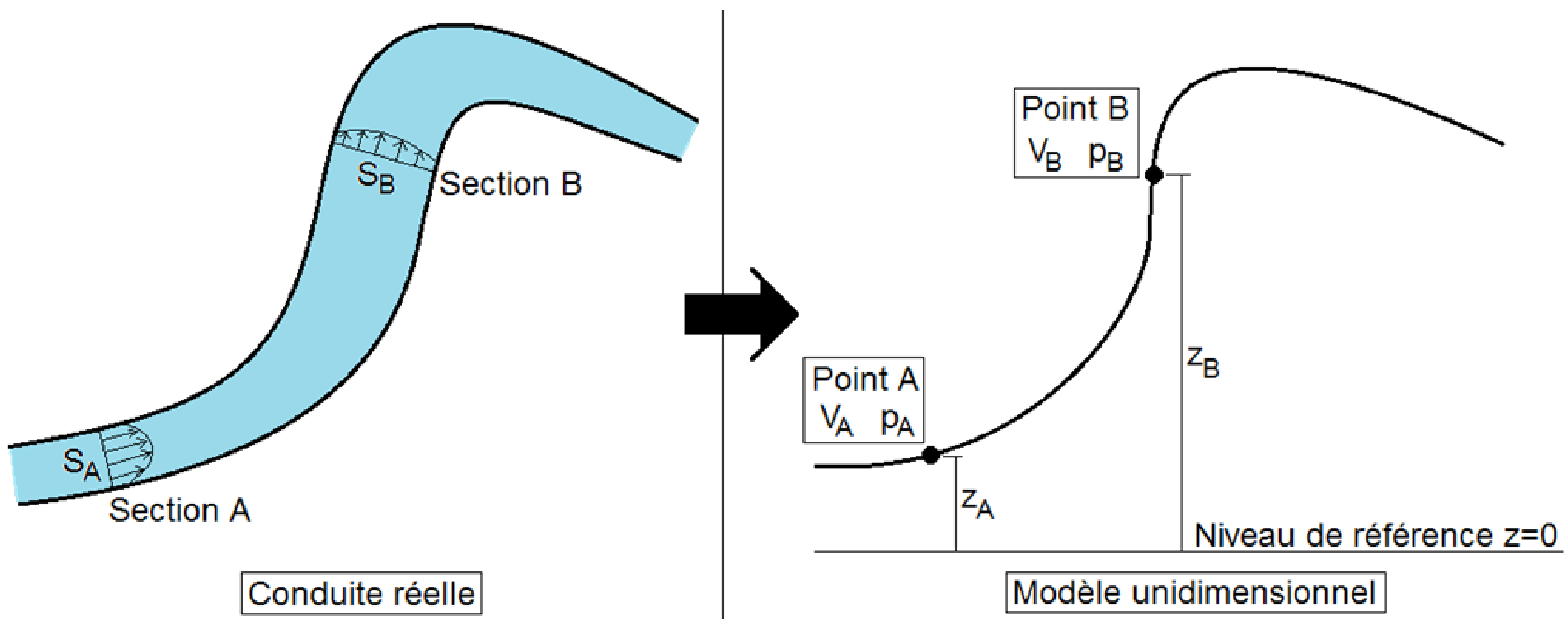


B. Théorème de Bernoulli

Entre deux sections A et B quelconques, on peut donc écrire :

- **Conservation de la masse** $V_A \cdot S_A = V_B \cdot S_B$

- **Formule de Bernoulli** $p_A + \rho \dfrac{V_A^2}{2} + \rho g z_A = p_B + \rho \dfrac{V_B^2}{2} + \rho g z_B$



B. Théorème de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli ne s'applique sous cette forme qu'aux fluides parfait, car il est fondé sur un principe de **conservation de l'énergie mécanique**.

On peut en effet redémontrer cette formule de manière rigoureuse à partir du **principe fondamental de la dynamique**, que l'on écrit sous forme simplifiée :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \vec{\gamma}$$

Dans sa forme rigoureuse de la mécanique des milieux continus, on écrit ce principe :

$$\rho\vec{\gamma} = \overrightarrow{div}\,\bar{\bar{\sigma}} + \rho\vec{g}$$

Cette formule fait apparaître **la masse volumique, l'accélération, la gravité, et le tenseur des contraintes** au sein du fluide. On montrera en MMC que ces contraintes peuvent être reliées à la pression et que cette expression permet d'obtenir le théorème de Bernoulli si on néglige toute dissipation thermique d'énergie.

Ceci implique de n'avoir **aucun frottement**, donc d'utiliser une **viscosité nulle** et un **fluide parfait**.

B. Théorème de Bernoulli

On peut faire plusieurs interprétations physiques du théorème de Bernoulli.

$$p+\rho\frac{V^2}{2}+\rho gz=constante$$

Dans cette formule, la constante à l'écoulement (qui est donc la même dans toute section de la conduite) a la **dimension d'une pression**. Il s'agit donc de la somme de plusieurs termes qui ont tous la dimension d'une pression. On distingue :

-La **« pression statique »** $p+\rho gz$

Ce terme est lié à la pression p qui règne dans le fluide et à la hauteur z .

-La « **pression dynamique** » $\rho\frac{V^2}{2}$

Ce terme est lié à la vitesse de l'écoulement.

On constate que, en l'absence de mouvement ($V=0$), on retrouve l'**équation fondamentale de l'hydrostatique** :

$$p+\rho gz=constante$$

B. Théorème de Bernoulli

Comme la masse volumique est constante, on peut écrire la formule de Bernoulli comme suit :

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = constante$$

Dans cette formule, la constante a la dimension d'une énergie par unité de masse (J/Kg). Cette formule est donc une expression directe de la **conservation de l'énergie mécanique par une particule matérielle de fluide parfait au cours de son écoulement.**

On reconnaît différents termes :

$\frac{V^2}{2}$ est l'**énergie cinétique** par unité de masse de fluide

gz est l'**énergie potentielle de position** par unité de masse de fluide

$\frac{p}{\rho}$ est l'**énergie potentielle de pression** par unité de masse de fluide

La somme de toutes ces énergies est constante car le fluide est parfait.

B. Théorème de Bernoulli

La troisième et dernière interprétation physique de la formule est la suivante :

$$\frac{p}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}+z=constante$$

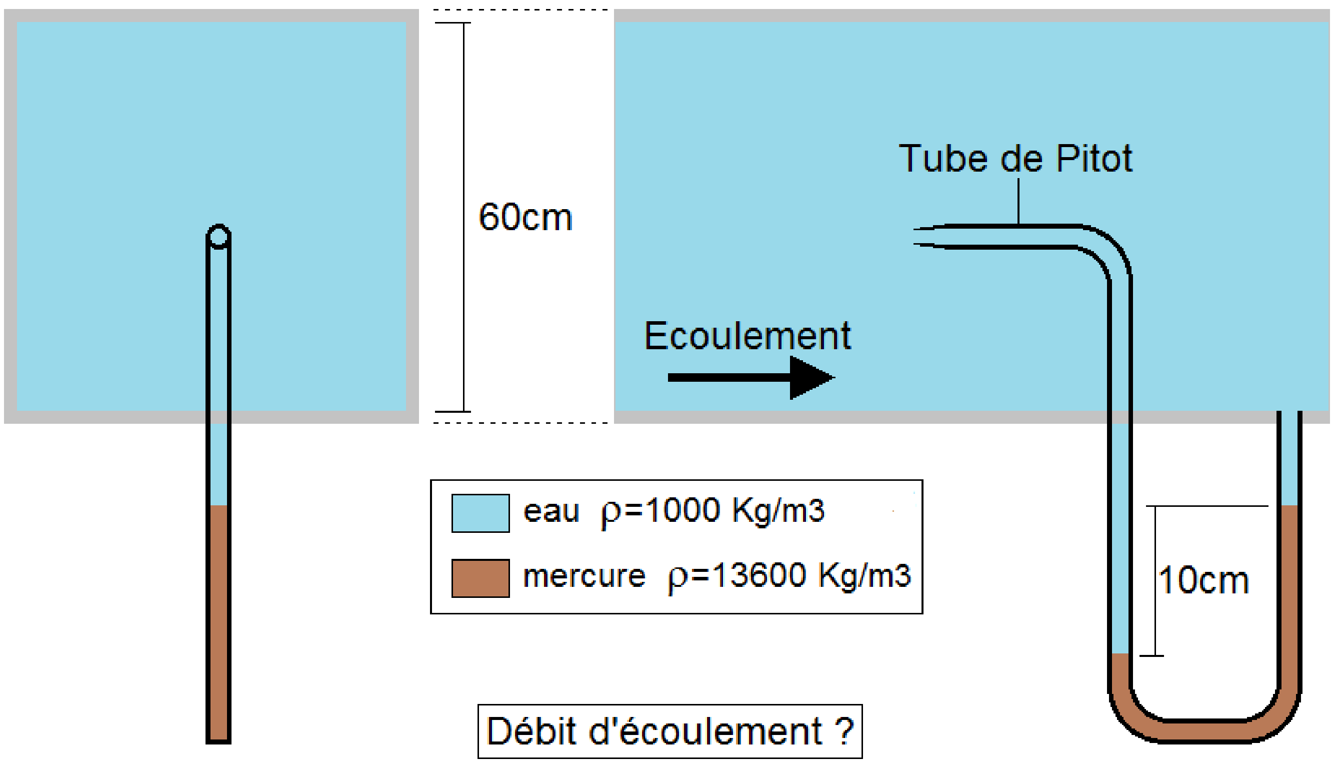
Dans cette formule, la constante a la dimension d'une hauteur, et est appelée **charge hydraulique totale**, ou plus simplement **charge**. Sous cette forme, la formule de Bernoulli est appelée équation de **conservation de la charge**. On y voit apparaître différents termes qui introduisent un vocabulaire spécifique :

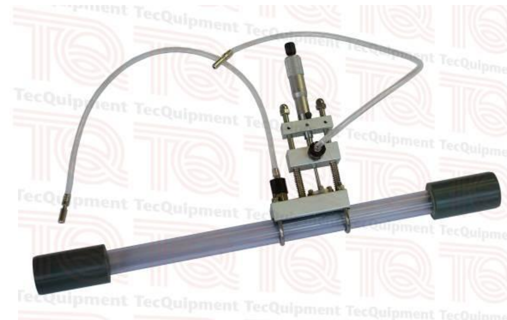
- z est l'**altitude** de la section considérée.
- $\frac{V^2}{2g}$ est la « **hauteur capable** », c'est-à-dire la hauteur que le fluide pourrait atteindre du fait de son énergie cinétique
- $\frac{p}{\rho g}$ est la « **hauteur manométrique** »

On appelle généralement « **hauteur piézométrique** » le terme $\frac{p}{\rho g}+z$

B. Théorème de Bernoulli

Exercice 5 : Sonde de Pitot.





Indice : les fluides sont au repos dans toute la sonde de Pitot.

Séance 4

C. Représentation graphique

C. Représentation graphique

On a souvent recours à une représentation graphique qui repose sur la formule de Bernoulli exprimée en hauteur de charge constante H :

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = H = constante$$

On a démontré que les différents termes correspondaient à des hauteurs dont la somme est constante. Pour un écoulement donné, on peut représenter ce hauteurs graphiquement.

On définit des lignes caractéristiques, dont les hauteurs ont une signification physique :

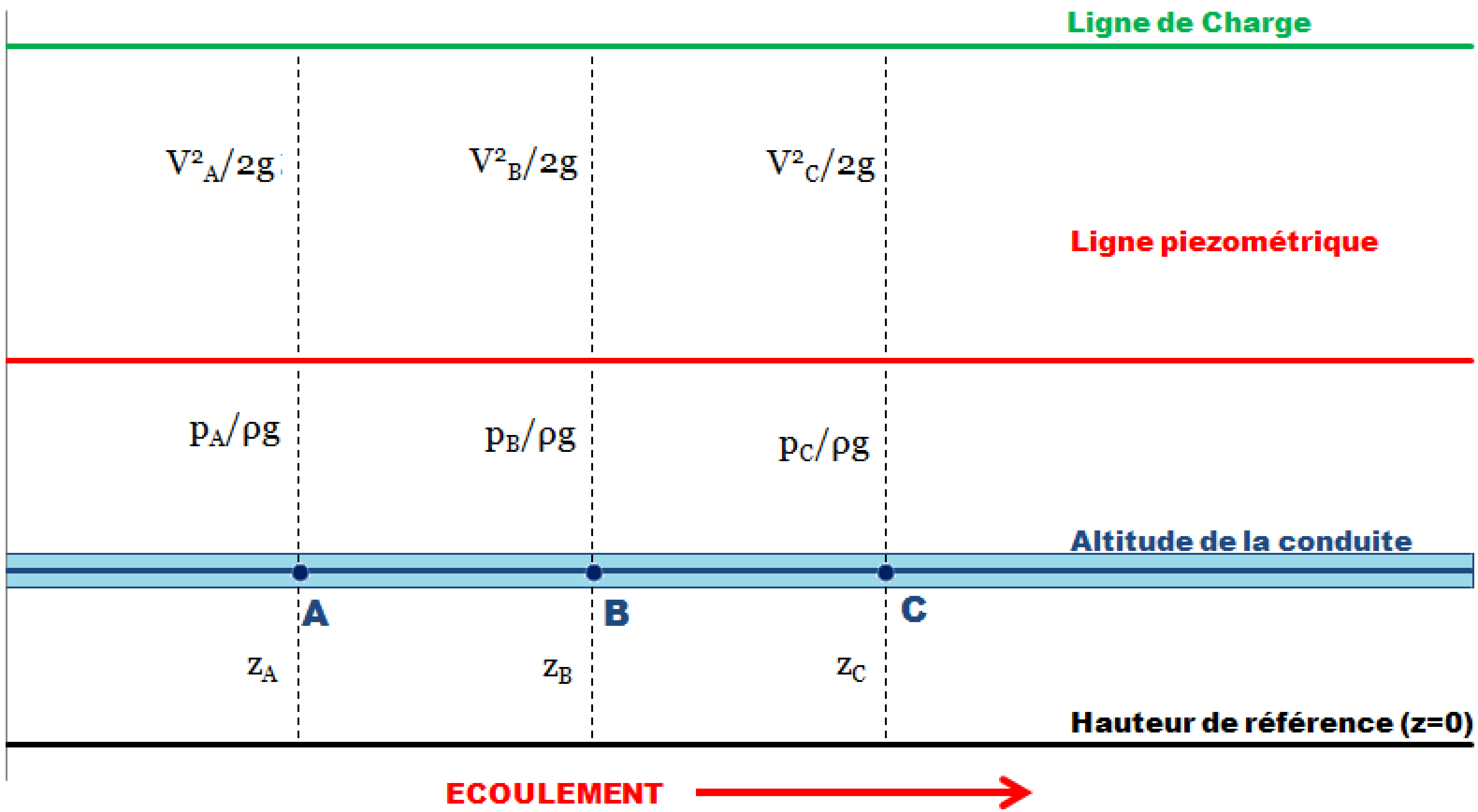
-L'**altitude de la conduite** correspond à la cote géométrique z

-La **ligne piézométrique** correspond à la hauteur piézométrique $\frac{p}{\rho g} + z$

-La **ligne de charge** correspond à la hauteur H qui est constante pour un fluide parfait.

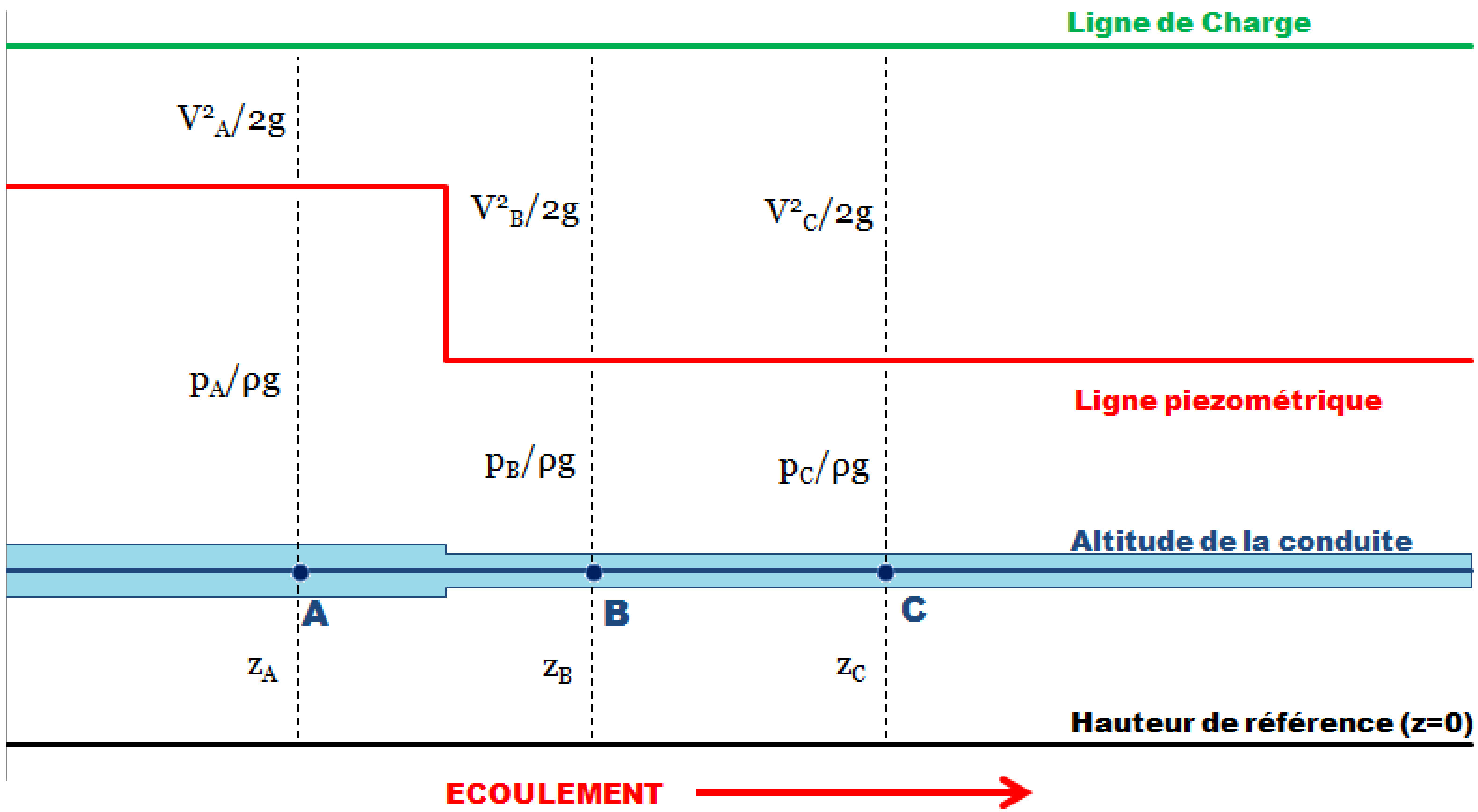
C. Représentation graphique

Pour une conduite de hauteur constante et de section constante, les trois lignes sont horizontales. Si on considère trois sections A, B, et C sur la conduite, les bilans de charge sont identiques.



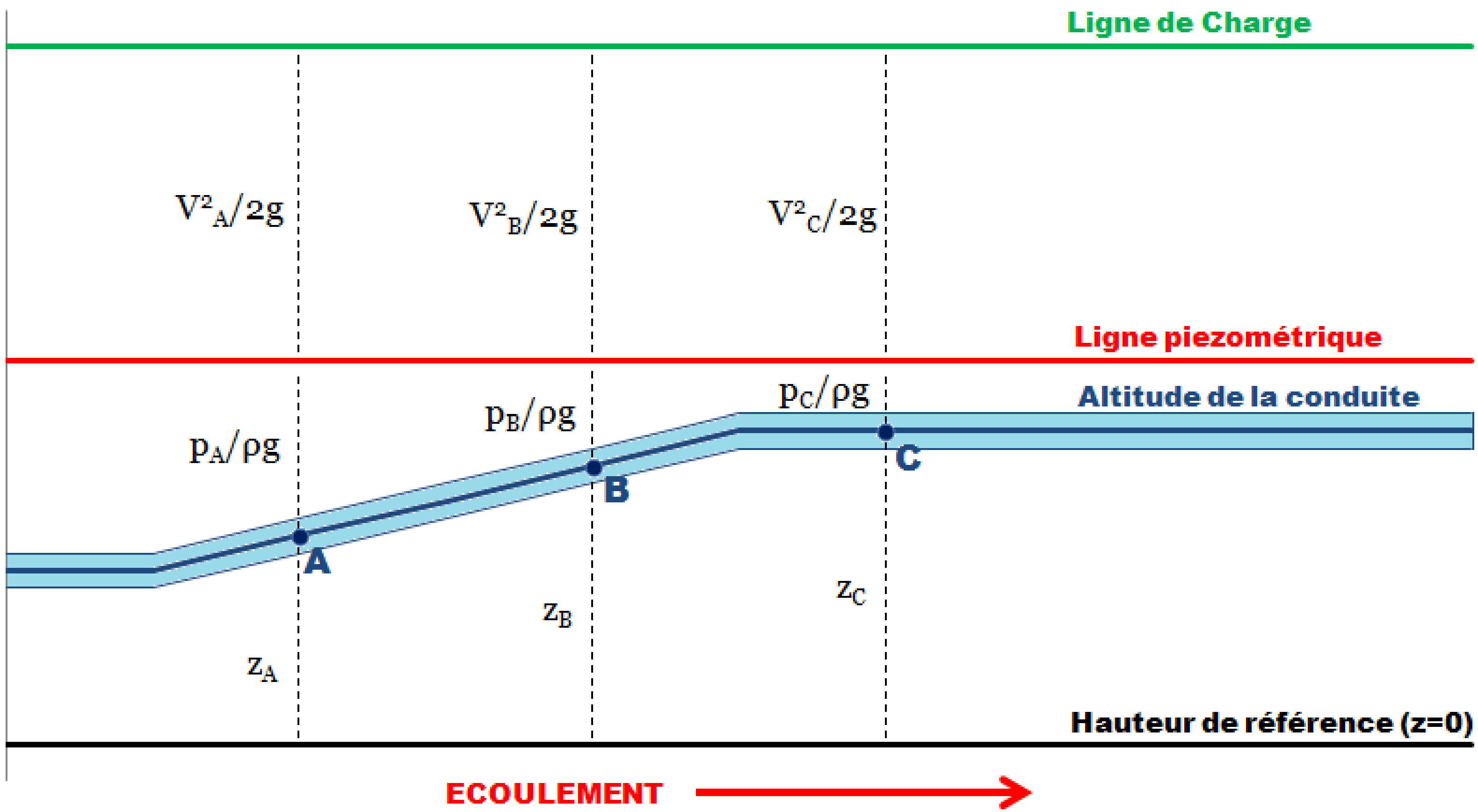
C. Représentation graphique

Si on imagine maintenant un rétrécissement de section entre A et B, on observe un effet immédiat sur la ligne piézométrique, car la vitesse du fluide augmente. La ligne de charge, en revanche, ne bouge pas car le système ne dissipe pas d'énergie.



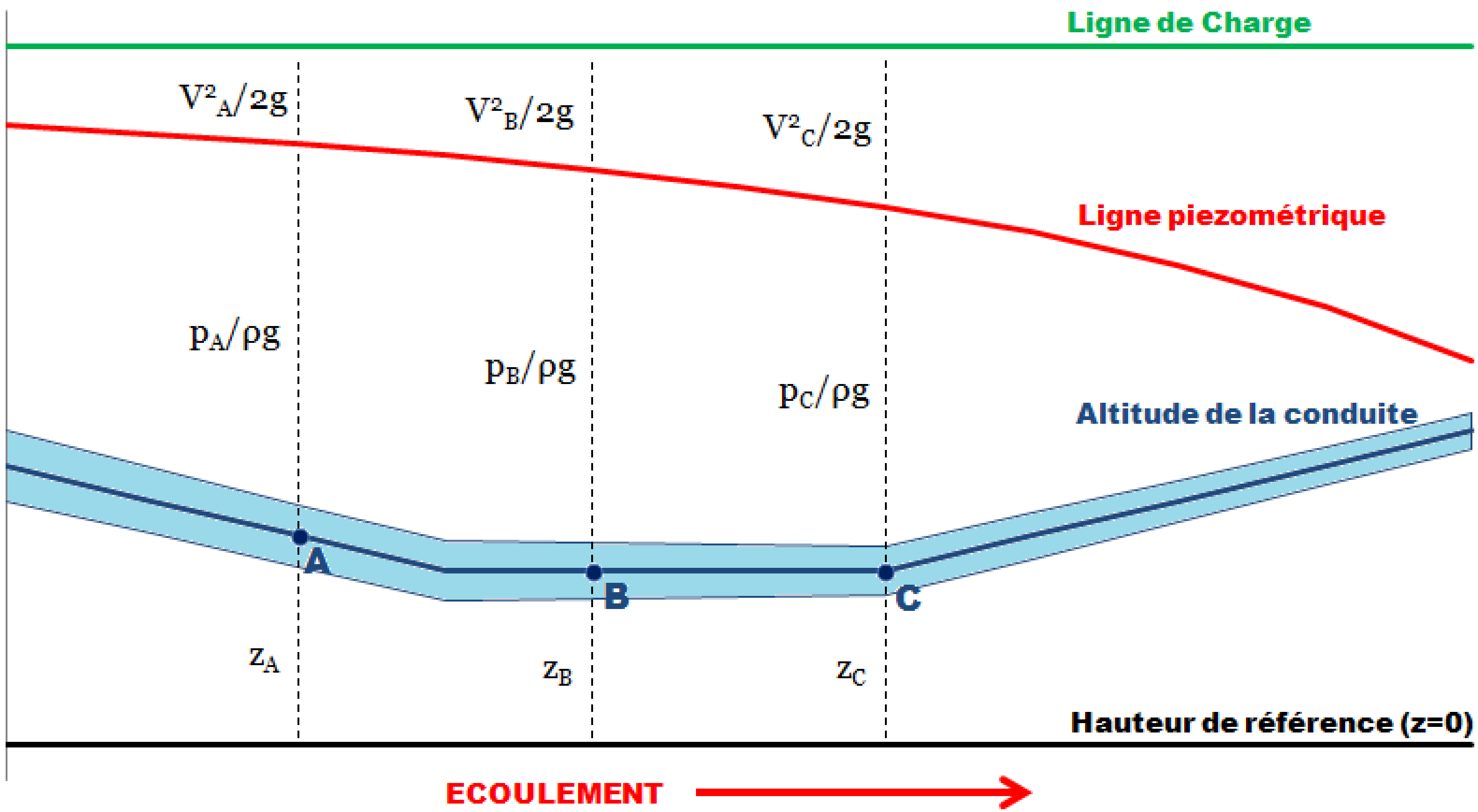
C. Représentation graphique

Pour une conduite à section constante mais dont l'altitude varie, on observe que la ligne piézométrique est horizontale. Ceci est dû au fait que la vitesse de l'écoulement est constante. En revanche, on constate que la pression dans le fluide diminue.



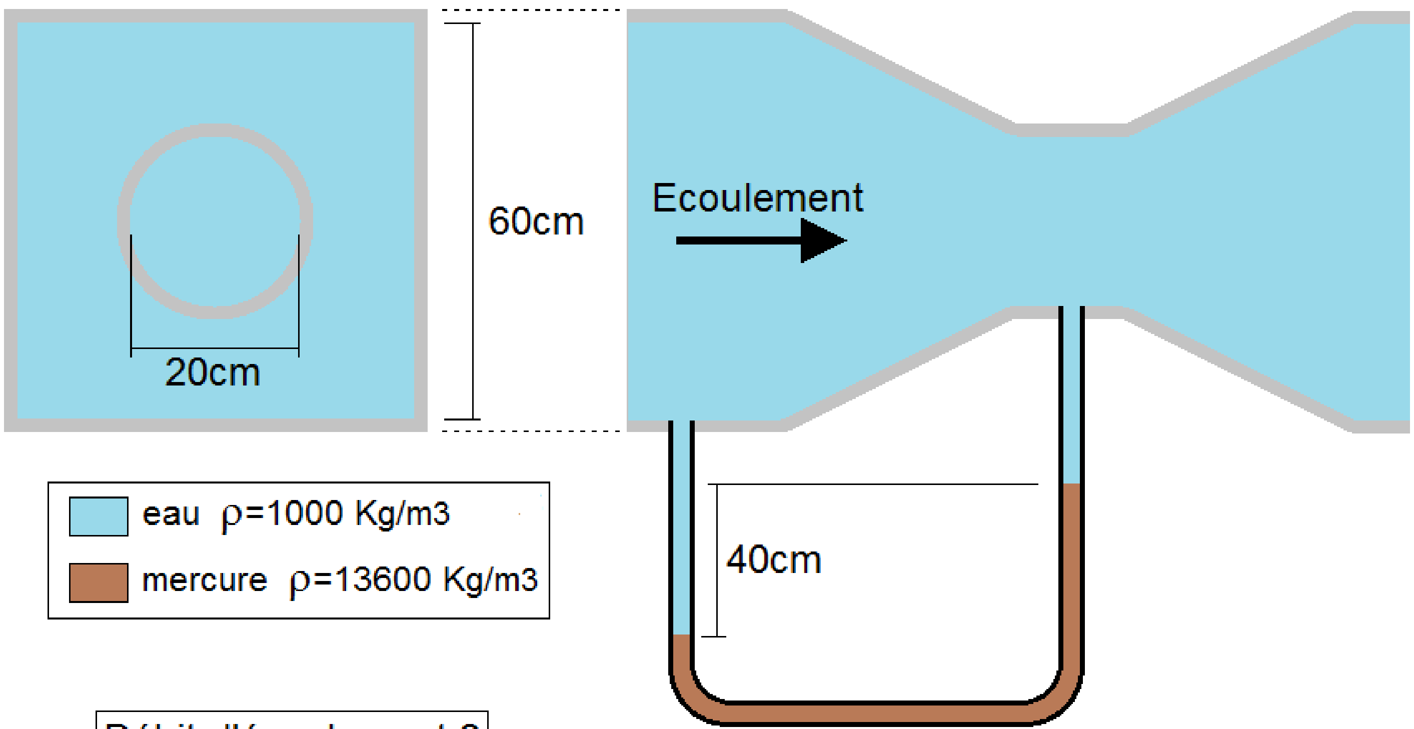
C. Représentation graphique

Un tel graphique permet de suivre le comportement en vitesse et en pression de conduites complexes comme dans cet exemple où la section diminue progressivement tandis que la conduite descend, se stabilise, puis remonte.



C. Représentation graphique

Exercice 6 : Effet Venturi.



Débit d'écoulement ?

Indice : les fluides sont au repos dans les tubes minces

C. Représentation graphique

Lorsqu'on applique la représentation graphique à un venturi, on obtient le même résultat :

-La vitesse augmente dans le rétrécissement, puis diminue à nouveau

-La pression diminue dans le rétrécissement, puis augmente à nouveau