POLYTECH
GRENOBLE

Hydraulique des terrains

Séance 3 : Hypothèses de l'écoulement en conduite

Guilhem MOLLON

GEO3 2012-2013

Plan de la séance

A. Cinématique d'écoulement

- -Lignes caractéristiques
- -Vitesses et débits

B. Hypothèse de continuité

- -Postulats
- -Equation de continuité

Séance 3

A. Cinématique d'écoulement

A. Cinématique d'écoulement

On introduit ici des notions d'**hydrodynamique**, et non plus d'hydrostatique : le fluide est désormais animé d'un mouvement.

On définit la **trajectoire** d'une particule fluide (au sens particule matérielle de la MMC) comme la **ligne joignant ses différentes positions** $\vec{x}$ **au cours du temps**. Elle se définit par l'équation paramétrique suivante :

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t) \quad et \quad \vec{x}(\vec{X}, 0) = \vec{X}$$

De manière plus explicite et dans un repère (x, y, z), on a :

$$\begin{cases} x = x(X, Y, Z, t) \\ y = y(X, Y, Z, t) \\ z = z(X, Y, Z, t) \end{cases}$$

La notion de trajectoire est typiquement lagrangienne, difficile à appliquer en général dans le cas d'un fluide.

Une trajectoire est propre à une particule, elle est donc indépendante du temps (seule la position de la particule sur sa trajectoire dépend du temps).

A. Cinématique d'écoulement

Pour une description plus eulérienne du mouvement, on se base sur les vecteurs vitesse et on a recours à la notion de **ligne de courant**.

On considère non plus des particules se déplaçant sur leurs trajectoires, mais des vecteurs vitesses en chaque point fixe du fluide en mouvement et à chaque instant :

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{x}, t)$$

Par conséquent, de manière explicite et dans un repère (x, y, z) , on a :

$$\begin{cases} V_x = V_x(x, y, z, t) \\ V_y = V_y(x, y, z, t) \\ V_z = V_z(x, y, z, t) \end{cases}$$

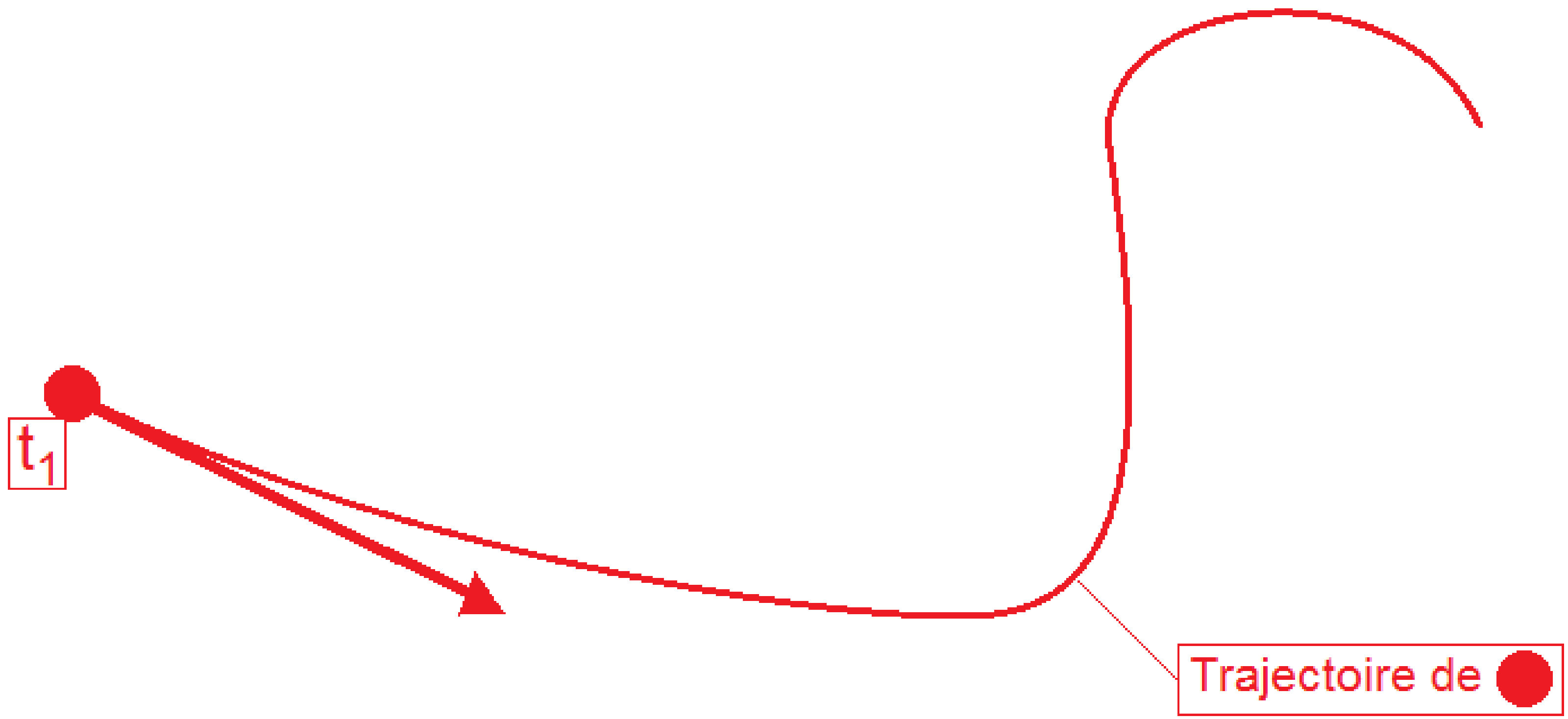
Une ligne de courant est une ligne qui en chacun de ses points est colinéaire au vecteur vitesse local.

Une ligne de courant est donc variable dans le temps, puisque c'est le cas des vecteurs vitesse sur lesquels elle « s'appuie ».

A. Cinématique d’écoulement

Dans le cas général, il n’y a aucune raison pour que les trajectoires et les lignes de courant soient confondues.

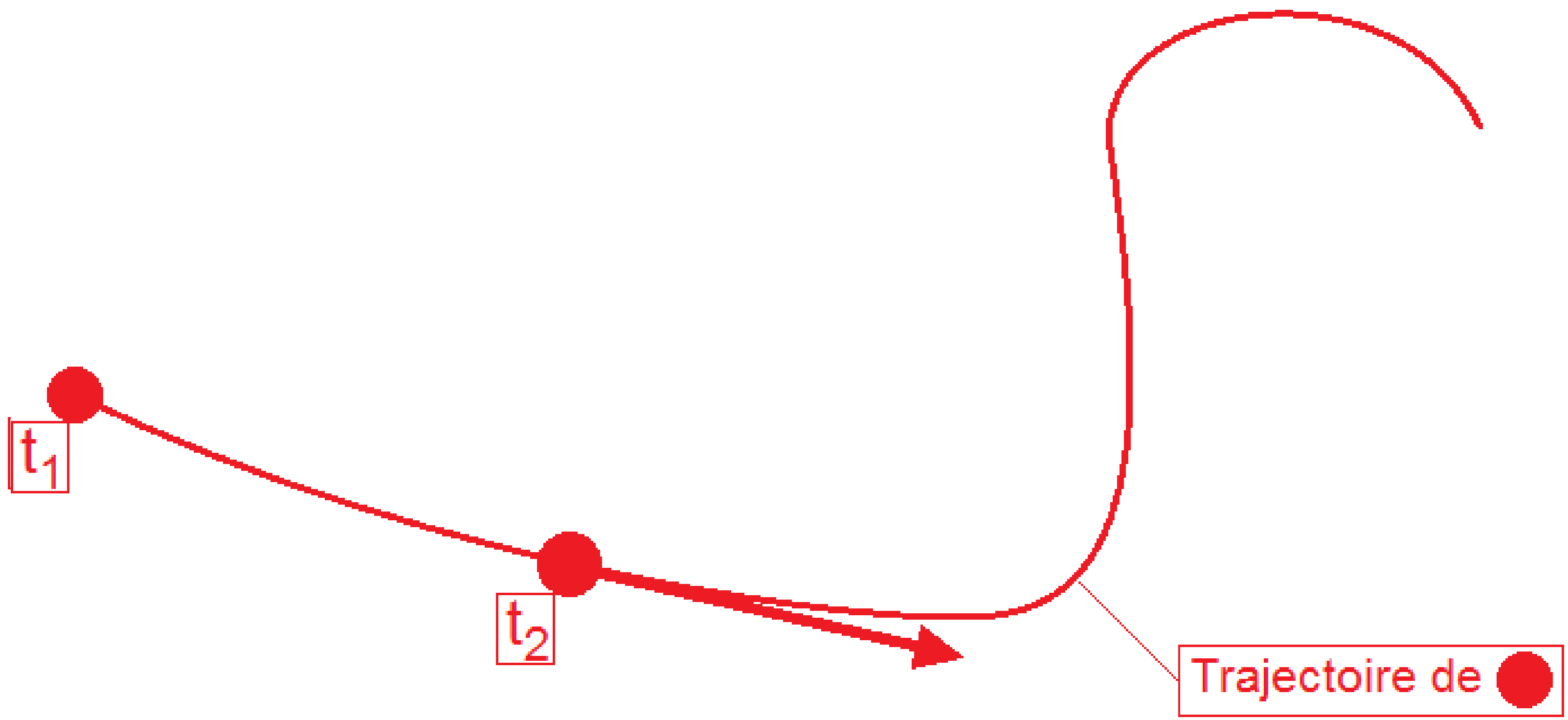
Cette complication naît de l’instationarité du champ de vitesse.



A. Cinématique d'écoulement

Dans le cas général, il n'y a aucune raison pour que les trajectoires et les lignes de courant soient confondues.

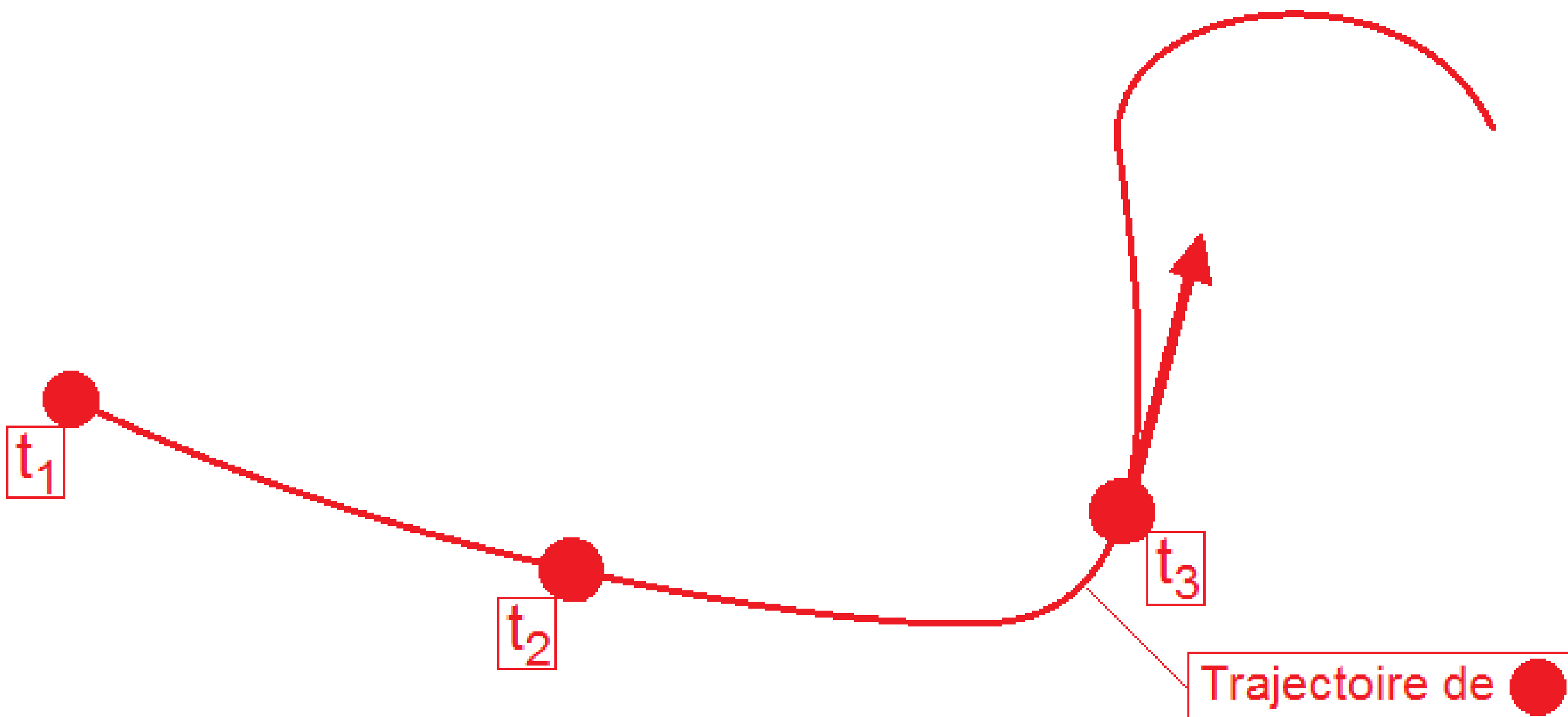
Cette complication naît de l'instationarité du champ de vitesse.



A. Cinématique d'écoulement

Dans le cas général, il n'y a aucune raison pour que les trajectoires et les lignes de courant soient confondues.

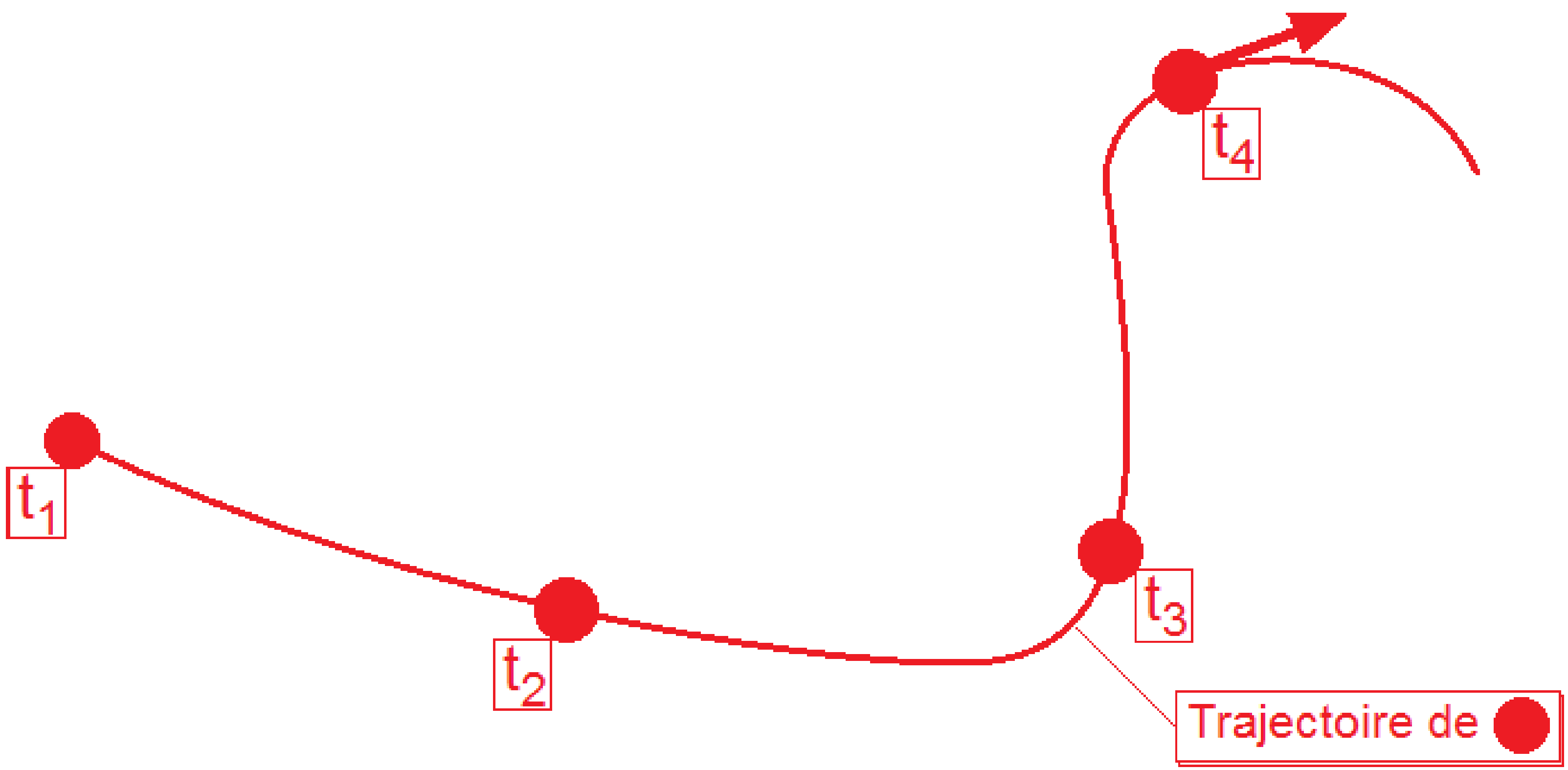
Cette complication naît de l'instationarité du champ de vitesse.



A. Cinématique d'écoulement

Dans le cas général, il n'y a aucune raison pour que les trajectoires et les lignes de courant soient confondues.

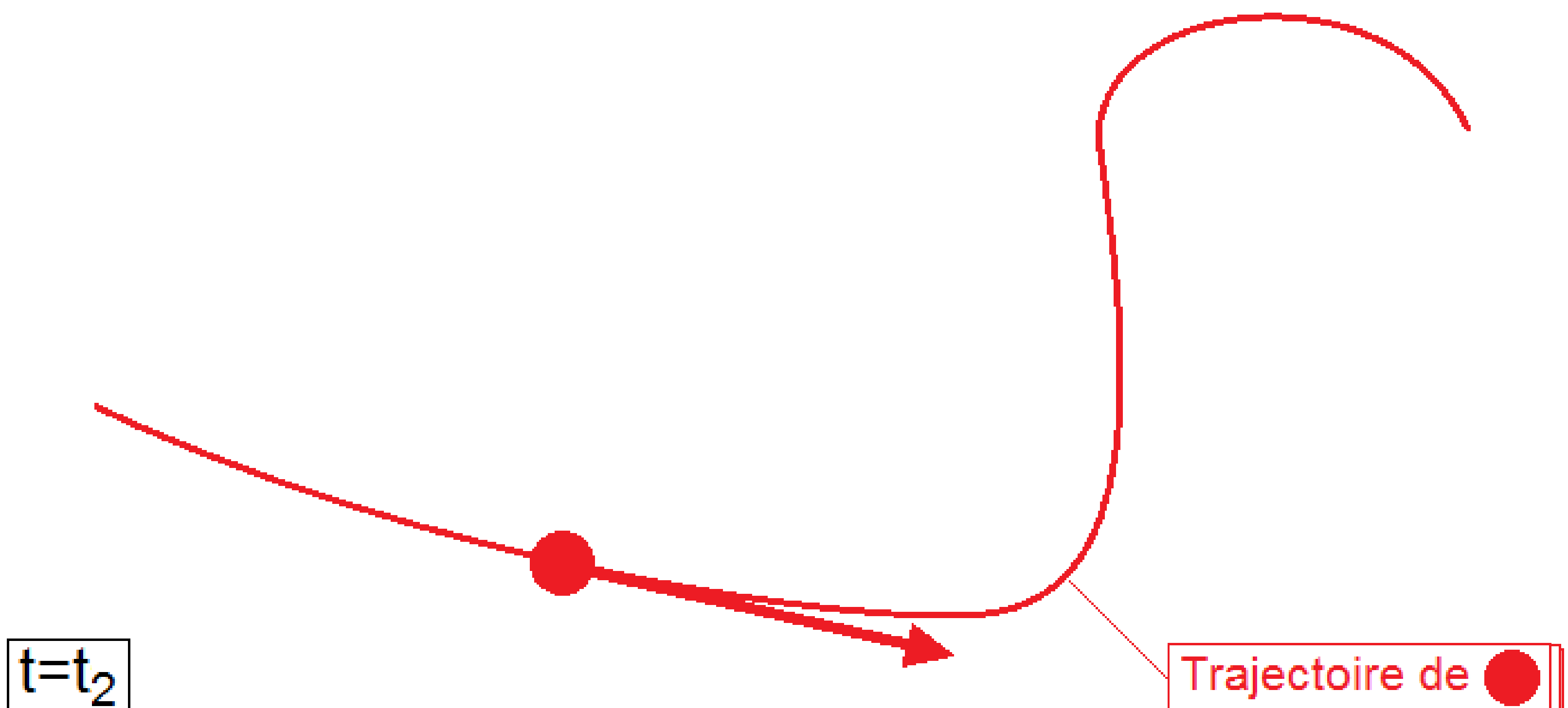
Cette complication naît de l'instationarité du champ de vitesse.



A. Cinématique d'écoulement

Dans le cas général, il n'y a aucune raison pour que les trajectoires et les lignes de courant soient confondues.

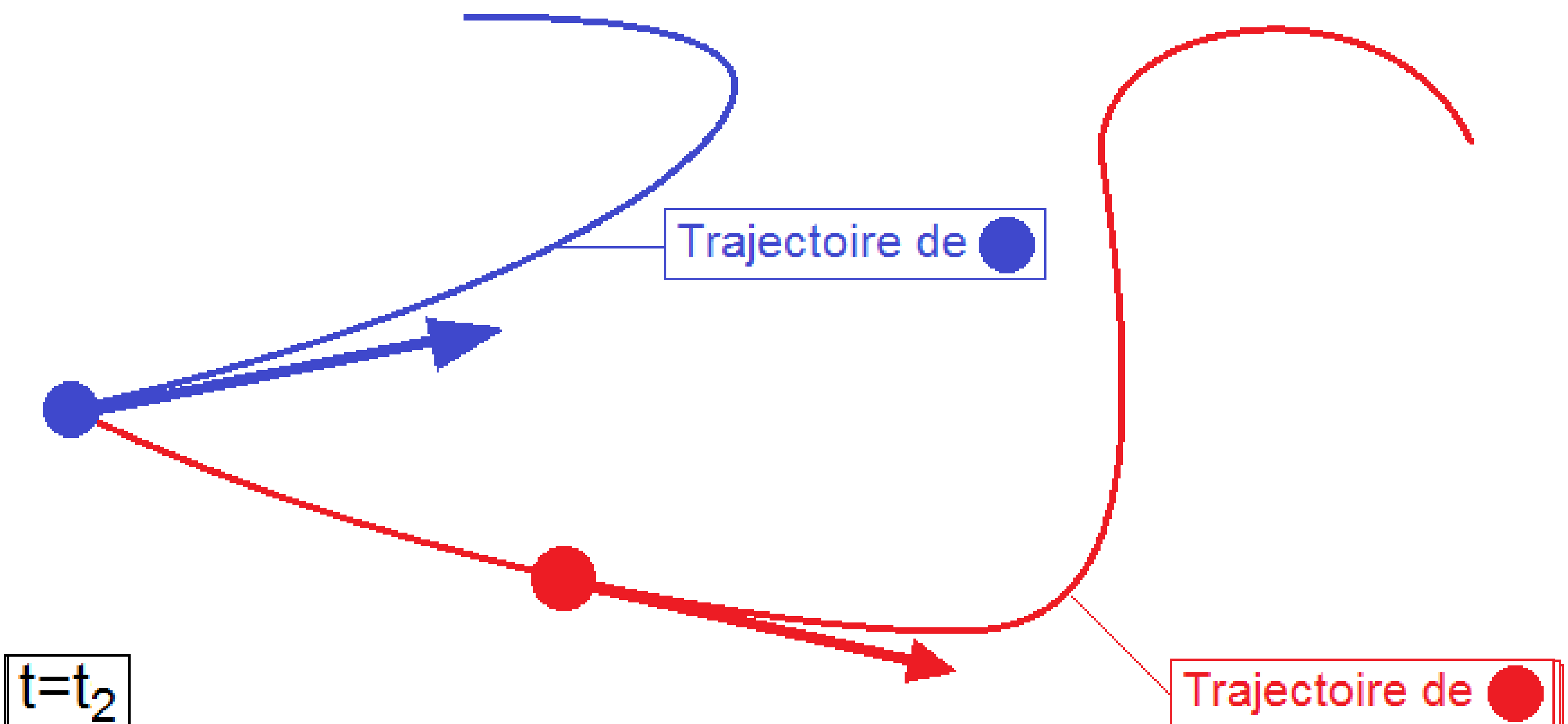
Cette complication naît de l'instationarité du champ de vitesse.



A. Cinématique d'écoulement

Dans le cas général, il n'y a aucune raison pour que les trajectoires et les lignes de courant soient confondues.

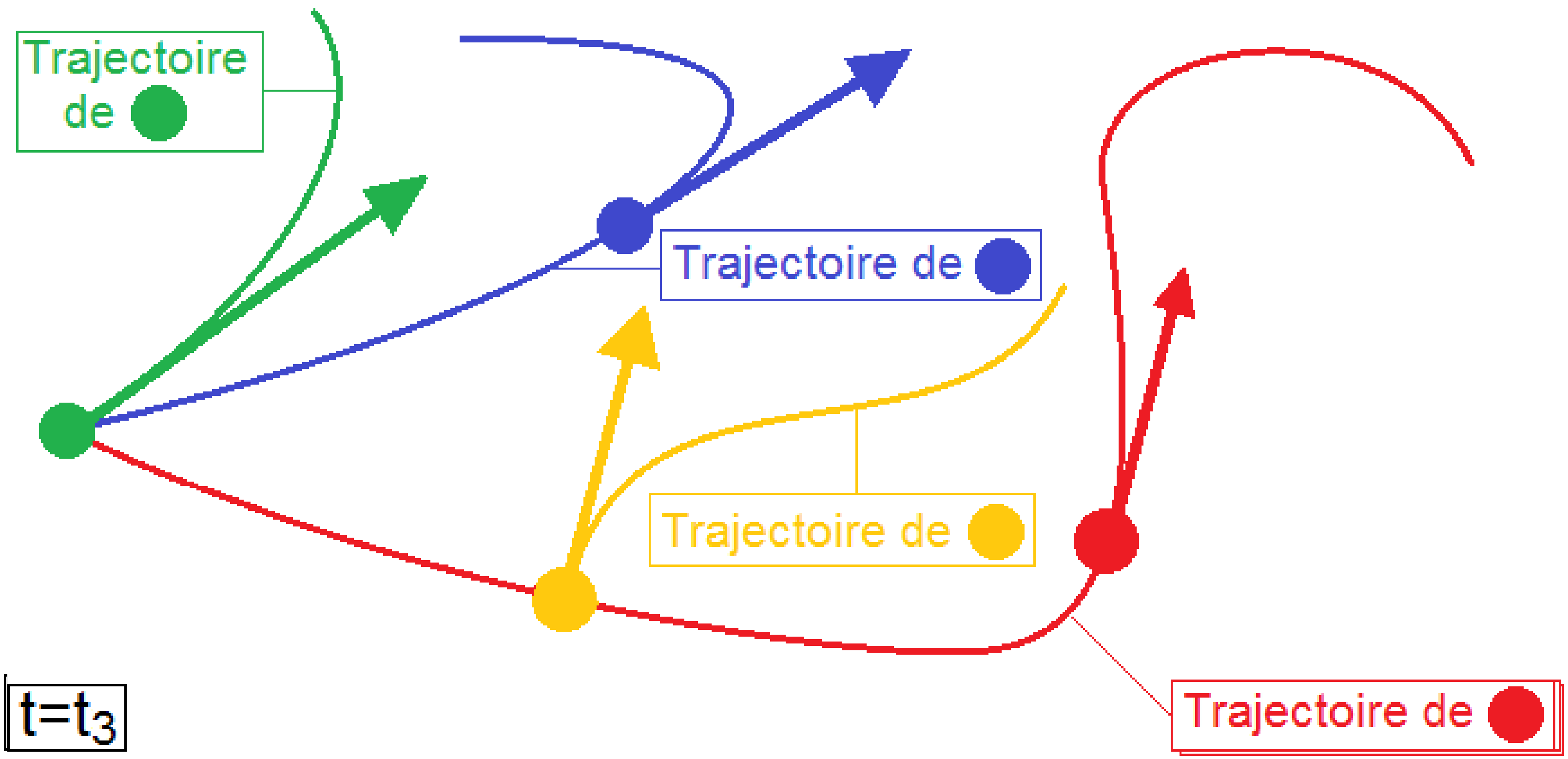
Cette complication naît de l'instationarité du champ de vitesse.



A. Cinématique d'écoulement

Dans le cas général, il n'y a aucune raison pour que les trajectoires et les lignes de courant soient confondues.

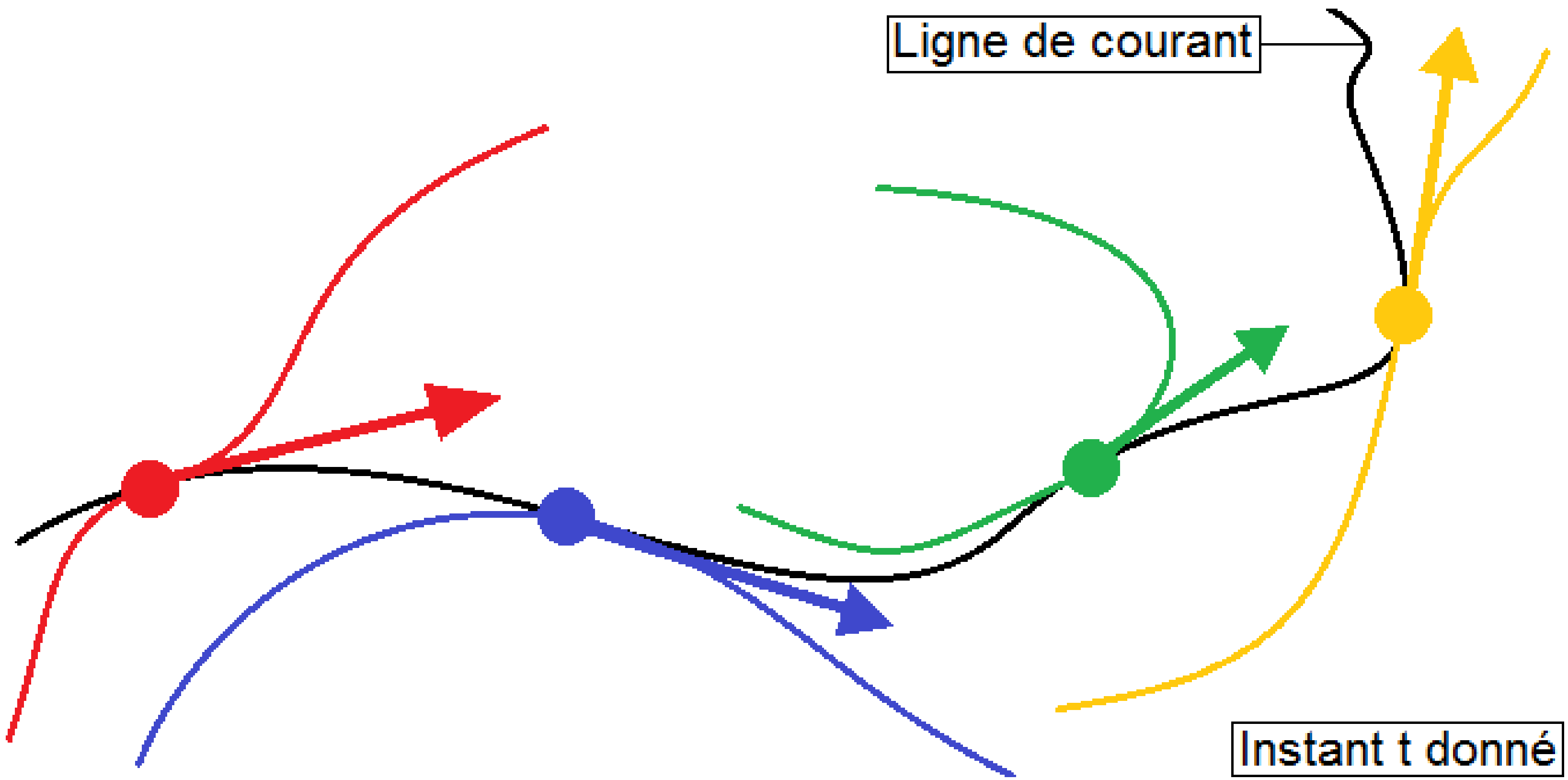
Cette complication naît de l'instationarité du champ de vitesse.



A. Cinématique d'écoulement

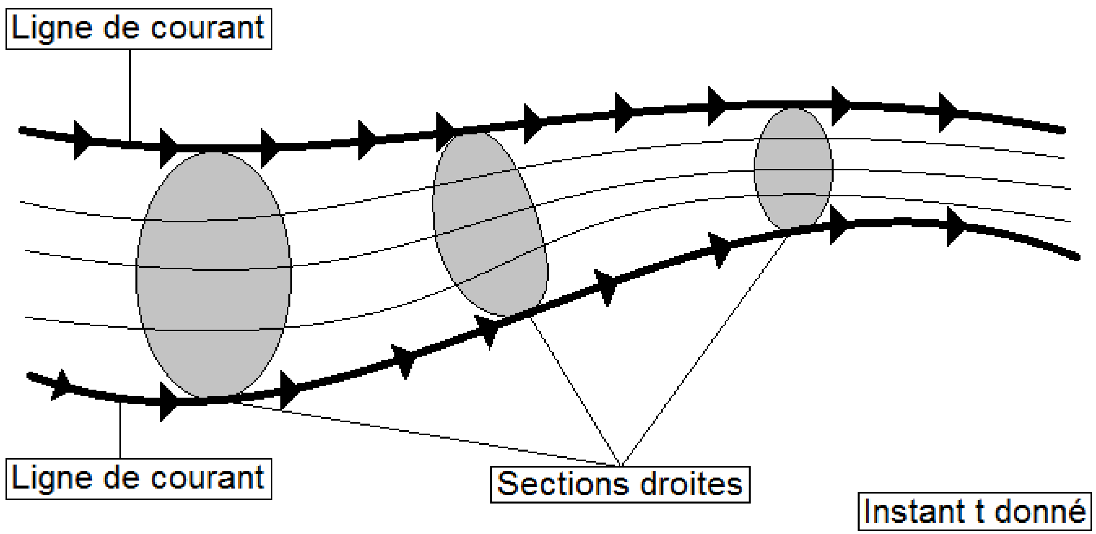
Pour éviter cette complexité, on utilise la notion de ligne de courant à un instant donné.

Une ligne de courant est un « instantané » du champ de vitesse, mais ne décrit pas le comportement du fluide avant ou après cet instant.



A. Cinématique d'écoulement

A partir des lignes de courant, on définit la notion de tube de courant : il s'agit d'**un domaine, à l'intérieur de l'écoulement, délimité par des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.**

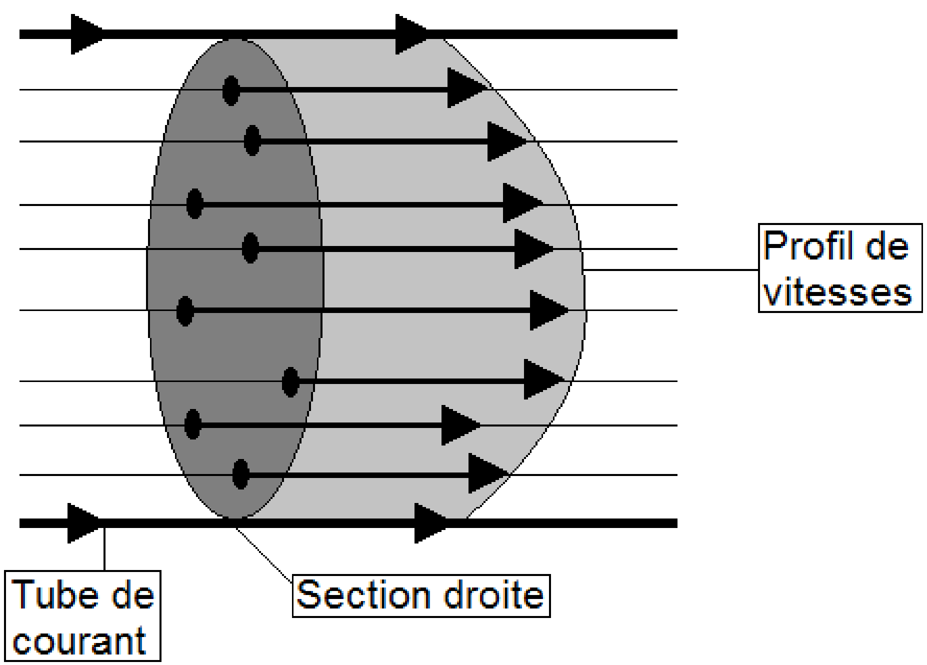


Comme les lignes de courant, les tubes de courant ne sont valables qu'à un instant donné.

Un tube de courant permet de définir les **sections droites de l'écoulement**, qui sont des surfaces perpendiculaires à l'écoulement et intersectées par le tube de courant.

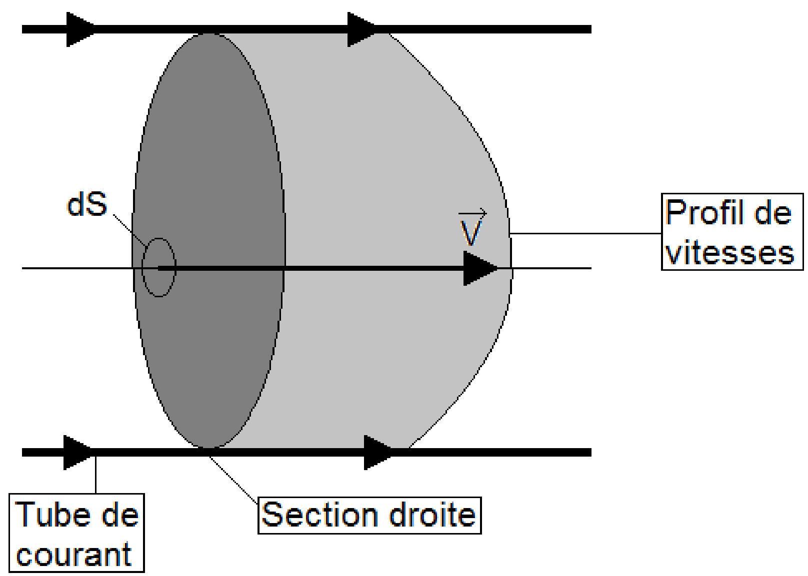
Lors d'un écoulement sous pression en conduite, la conduite elle-même est un tube de courant.

Dans une section droite de l’écoulement donné, le profil de vitesse n’est pas forcément homogène. Cette section est coupée par une infinité de lignes de courant, et celles-ci peuvent toutes avoir une vitesse différente. On a donc un **profil de vitesse** sur une section droite :



A. Cinématique d'écoulement

Un profil de vitesse n'est pas facile à manier, et on préfère définir une vitesse moyenne sur la section droite. Pour cela, on considère chaque petit élément de surface dS et la vitesse $\vec{V}$ du fluide au niveau de cet élément



La vitesse moyenne sur la section se calcule par :

$$\overrightarrow{V_{moy}}(t) = \frac{1}{S}\int_S \vec{V}(t)\,dS$$

Cette vitesse moyenne est donc seulement valable sur la section S pour un instant donné t.

A. Cinématique d'écoulement

La notion de vitesse permet d'accéder aux **débits**. On définit d'abord les notions de débits élémentaires à un instant donné au travers d'une surface élémentaire fixe dS à l'intérieur du fluide en mouvement.

Le **débit volumique élémentaire** au travers de dS est donné par :

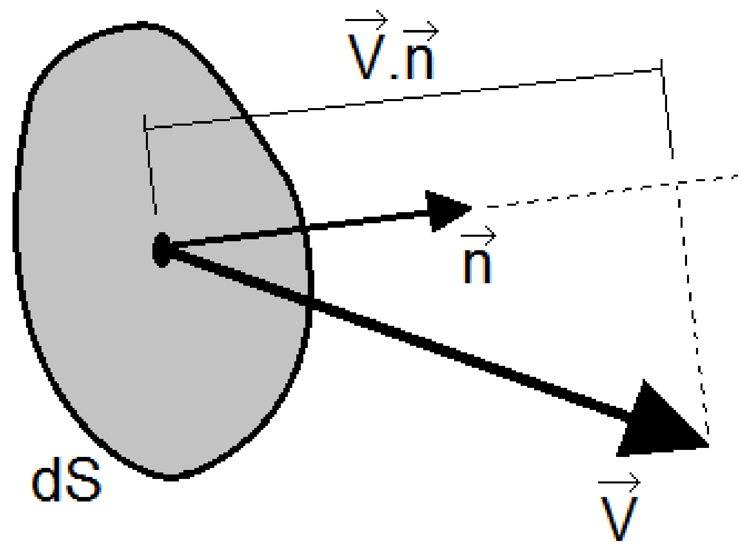
$$dQ = \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

Cette quantité exprime le volume de fluide qui traverse la surface dS à chaque unité de temps.

On définit également le **débit massique élémentaire** au travers de la surface dS :

$$dq_m = \rho \cdot dQ = \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

Cette quantité fait donc intervenir la masse volumique du fluide. Ce débit exprime la masse de fluide qui traverse dS à chaque unité de temps.

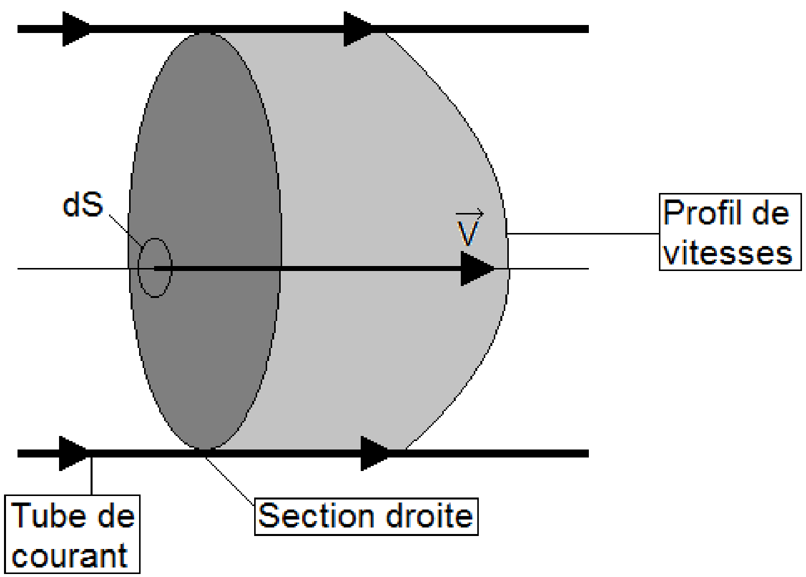


A. Cinématique d'écoulement

Si on considère non plus une surface élémentaire mais un tube de courant, on peut définir les débits macroscopiques traversant une des sections droites de l'écoulement dans ce tube de courant :

-**Débit volumique** au travers de la section S :

$$Q = \int_S dQ = \int_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$



-**Débit massique** au travers de la section S :

$$q_m = \int_S dq_m = \int_S \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

Dans un **écoulement en conduite**, les sections droites de l'écoulement sont planes, et on peut donc écrire :

$$Q = \int_S V dS = V_{moy} S \quad et \quad q_m = \int_S \rho \cdot V dS$$

B. Hypothèse de continuité

B. Hypothèse de continuité

On pose ici deux hypothèses essentielles de tout calcul d'écoulement en conduite :

-L'écoulement est stationnaire.

On dit qu'on est en régime permanent, ce qui signifie que l'intensité et l'orientation de la vitesse en un point donné sont constantes dans le temps.

En régime permanent, **les trajectoires et les lignes de courant sont confondues**. On en déduit que lignes de courants et tubes de courants sont constants dans le temps.

-**Le fluide est homogène et incompressible.**

D'un point de vue cinématique, ceci s'exprime : $div\,\vec{V} = 0$

Plus simplement, ceci signifie que la masse volumique ρ du fluide est constante dans le temps et dans l'espace. Le mouvement est **isochore**.

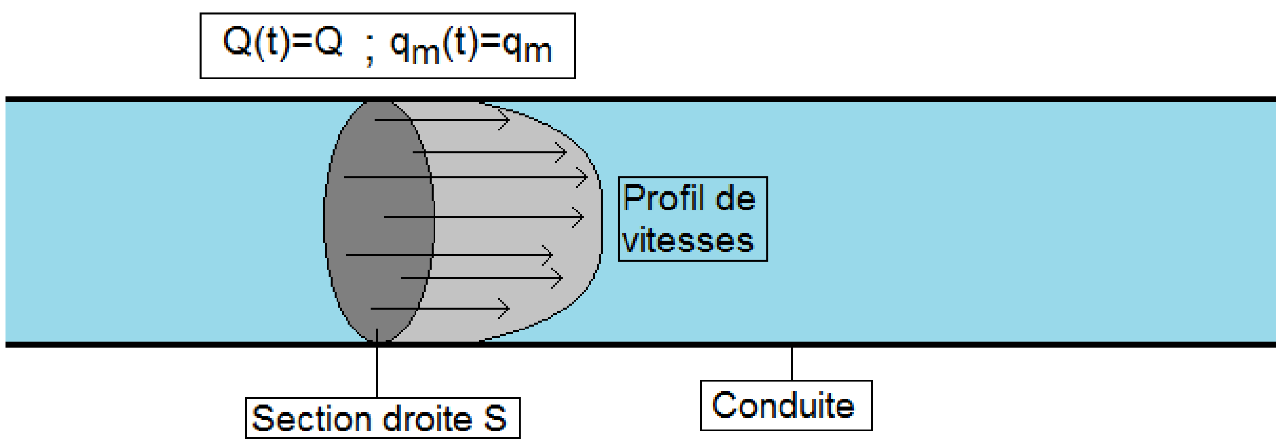
B. Hypothèse de continuité

Si ces deux hypothèses sont respectées, on peut écrire les débits volumiques et massiques au travers d'une section droite S de la manière suivante :

$$Q = V_{moy} S \quad et \quad q_m = \rho Q = \rho V_{moy} S$$

Le débit volumique est le produit de la vitesse moyenne par la section, et le débit massique est le produit du débit volumique par la masse volumique. Dans une conduite, la vitesse moyenne est souvent appelée **vitesse débitante.**

Par ailleurs, en écoulement stationnaire, ces deux débits sont constants dans le temps pour une section droite donnée. C'est également le cas dans une section d'un écoulement en conduite.



B. Hypothèse de continuité

Aux deux hypothèses évoquées, on ajoute le principe de conservation de la masse, utilisé de manière systématique en mécanique classique :

La masse d'un domaine matériel est constante dans le temps.

Appliqué à un écoulement, ce principe énonce qu'aucune matière ne peut être créée ni disparaître dans un volume donné. Ceci peut se reformuler par :

Au cours d'un écoulement stationnaire, le débit total de matière (c'est-à-dire le débit massique) au travers d'une surface fermée est égal à zéro à tout instant.

Lorsque l'on couple ce résultat avec l'incompressibilité du fluide, on peut également écrire :

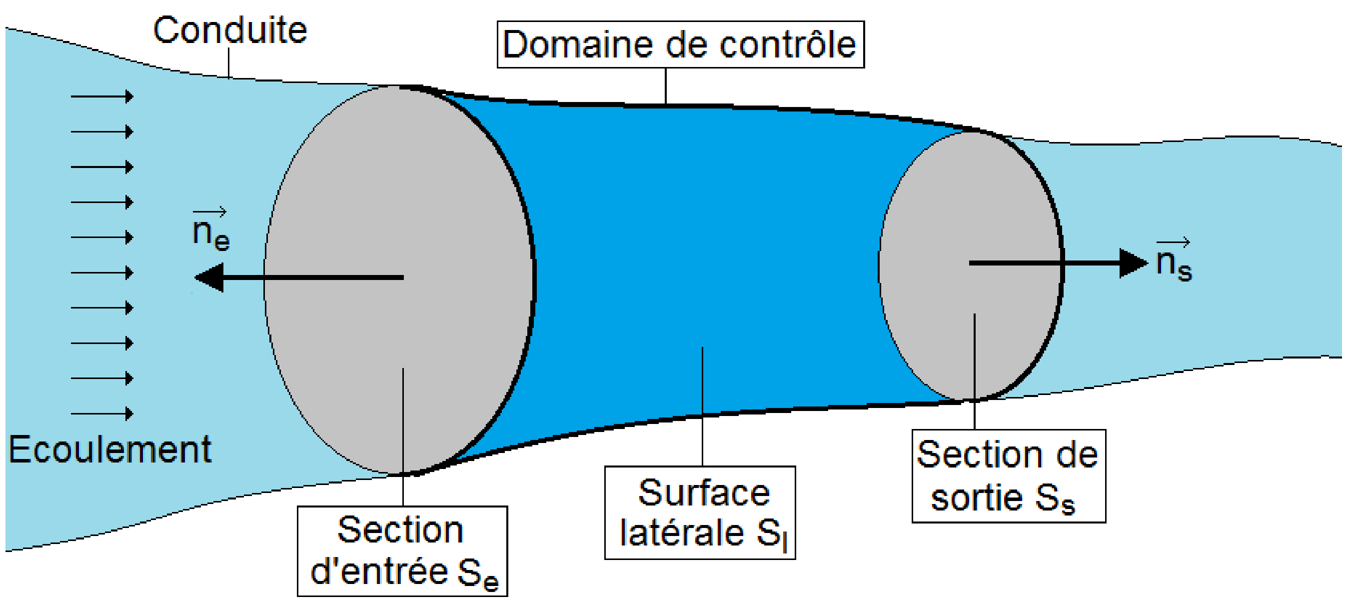
Au cours d'un écoulement isochore et stationnaire, le débit volumique au travers d'une surface fermée est égal à zéro à tout instant.

B. Hypothèse de continuité

En mécanique des fluides, on effectue souvent des bilans sur des **domaines de contrôle**. Il peut s'agir par exemple d'un tronçon de conduite limité par une section d'entrée, une section de sortie, et la surface intérieure latérale de la conduite entre ces deux sections.

Un tel domaine de contrôle est un domaine fixe D, limité par la surface fermée suivante :

$$S = S_e \cup S_s \cup S_l$$

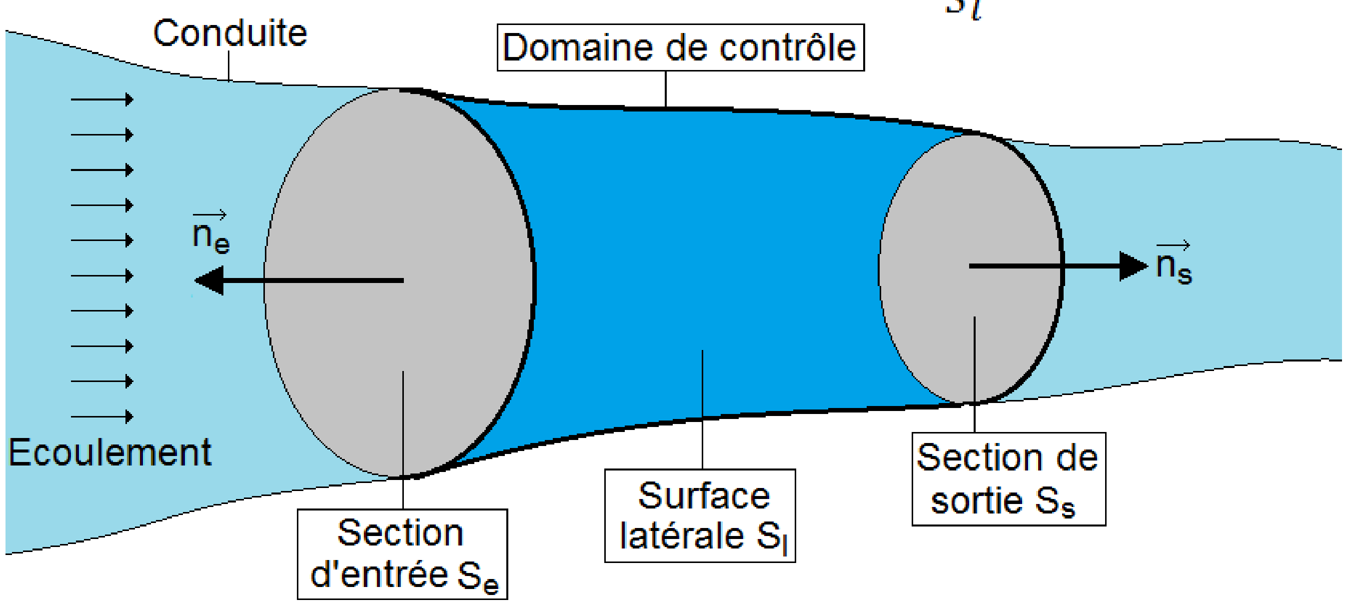


B. Hypothèse de continuité

Le domaine D est fixe, donc le débit volumique au travers de sa frontière fermée est nul :

$$Q = \int_{S_e} \vec{V} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_s} \vec{V} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_l} \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0$$

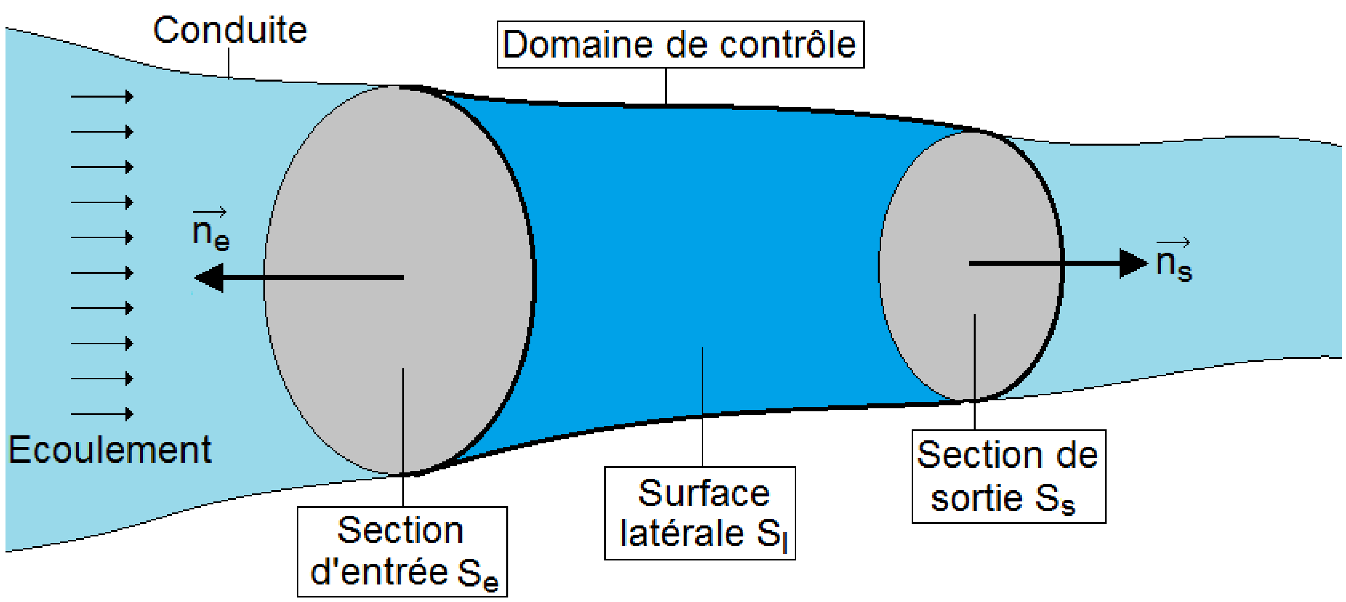
Le débit au travers de la surface latérale est nul, donc : $\int_{S_l} \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0$



B. Hypothèse de continuité

On en déduit $\int_{S_e} \vec{V} \cdot \overrightarrow{n_e} dS = -\int_{S_s} \vec{V} \cdot \overrightarrow{n_s} dS$, et par conséquent $Q_e = -Q_s$.

On déduit de la conservation de la masse que les débits au travers des sections d'entrée et de sortie sont opposés. Ceci est lié au fait que les normales sortantes à ces surfaces pointent dans des directions différentes par rapport à l'écoulement.

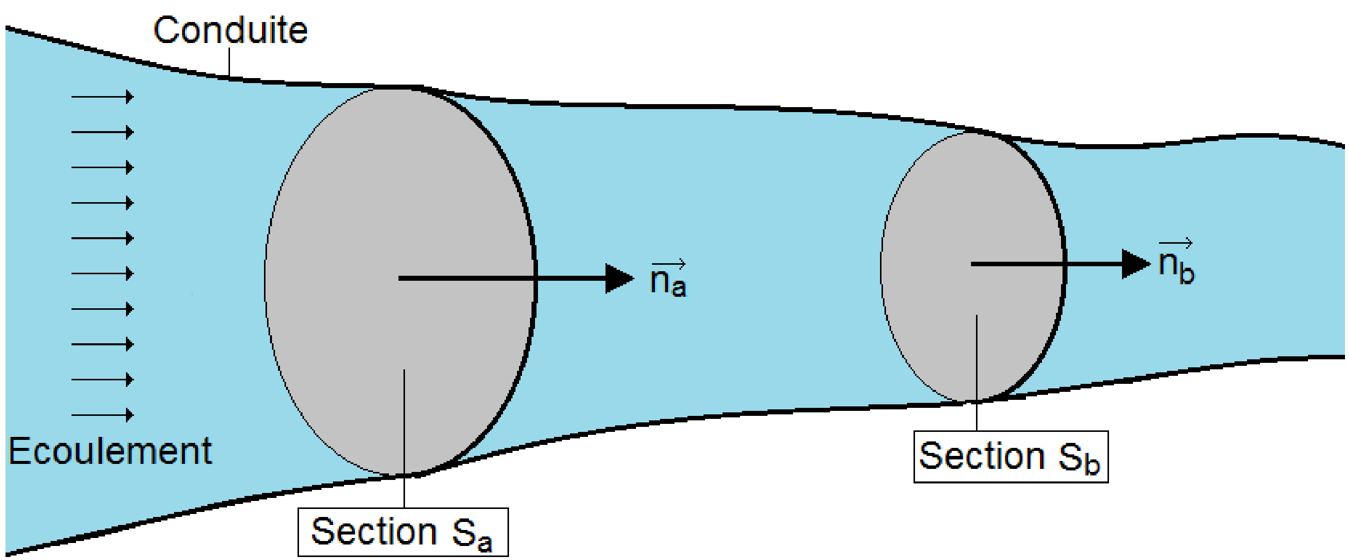


B. Hypothèse de continuité

Si, au lieu d'un domaine de contrôle, on considère deux sections quelconques S_a et S_b, orientées dans la même direction, on peut écrire :

$$\int_{S_a} \vec{V} \cdot \overrightarrow{n_a} dS = \int_{S_b} \vec{V} \cdot \overrightarrow{n_b} dS \qquad \text{et donc :} \qquad Q_a = Q_b$$

Lors d'un écoulement stationnaire et isochore en conduite, le débit est constant et égal dans toute section droite de l'écoulement



B. Hypothèse de continuité

En faisant intervenir les vitesses moyennes dans les sections S_a et S_b, on peut alors écrire :

$$V_{moy,a} \cdot S_a = V_{moy,b} \cdot S_b$$

De manière générale, on appelle **équation de continuité** la formule :

$$Q = V_{moy} \cdot S = constante$$