POLYTECH
GRENOBLE

Hydraulique des terrains

Séance 2 : Interaction fluide-structure

Guilhem MOLLON

GEO3 2012-2013

Plan de la séance

A. Principes de l'interaction fluide-structure

B. Force hydrostatique sur une paroi plane

C. Force hydrostatique sur une paroi gauche

D. Force hydrostatique sur un objet immergé

POLYTECH GRENOBLE

Séance 1

A. Principes de l'interaction fluide-structure

A. Principes de l’interaction fluide-structure

On considère une paroi plane immergée dans l’eau, et on souhaite savoir quelle force elle subit. On sait que cette force provient uniquement de la pression appliquée par le fluide.

Pour caractériser une force, il nous faut déterminer

- son intensité

-> 1 scalaire

- sa direction

-> 3 coordonnées d’un vecteur unitaire

- son point d’application

-> 3 coordonnées d’un point

A. Principes de l'interaction fluide-structure

Dans un fluide au repos, les règles suivantes s'appliquent :

- Intensité

Si on considère un petit élément de surface dS soumis à une pression p , l'intensité de la force à laquelle il est soumis est égale à :

$$dF = p \cdot dS$$

- Direction

La force appliquée par un fluide sur une surface s'effectue toujours **du fluide vers la surface, dans la direction normale à la surface.** Si on considère par exemple le même petit élément de surface dS et qu'on le munit d'une **normale sortante** $\vec{n}$, l'effort appliqué par le fluide est égal à :

$$\overrightarrow{dF} = -dF\vec{n}$$

- Point d'application

Il correspond au **barycentre des surfaces élémentaires** pondérées de la pression qu'elles subissent.

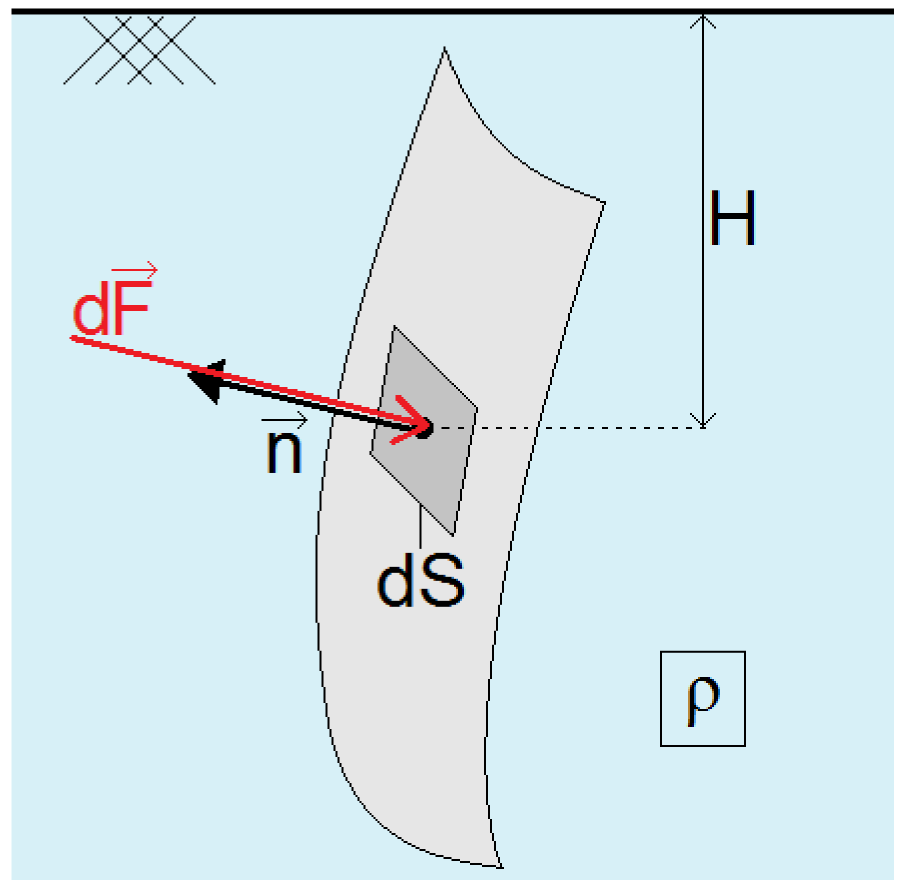
A. Principes de l'interaction fluide-structure

La force appliquée par le fluide sur un petit élément de surface immergée est donc exprimée par :

$$\overrightarrow{dF} = -\rho g H \cdot \vec{n} dS$$

Le signe « - » dans cette équation vient de la convention qui consiste à utiliser une normale sortante.

Cette formule ne fonctionne que dans un cadre hydrostatique. Un liquide en mouvement est également capable d'appliquer des efforts tangentiels à une structure immergée.



A. Principes de l'interaction fluide-structure

Si on considère maintenant une surface non-élémentaire plongée dans le même fluide, la force totale qu'elle va subir est égale à la somme **vectorielle** de toutes les forces élémentaires qui lui sont appliquées, soit :

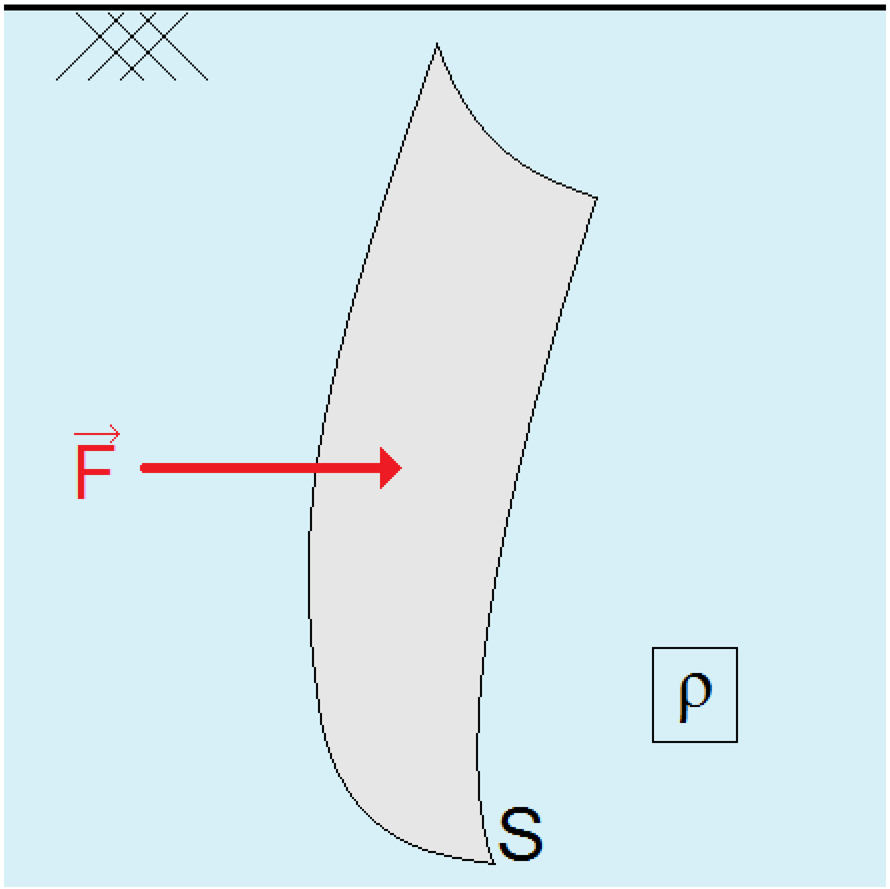
$$\vec{F} = \int \overrightarrow{dF}$$

Ceci se ramène à une intégrale de surface :

$$\vec{F} = \int_S -\rho g H \cdot \vec{n} dS$$

La normale $\vec{n}$ et la profondeur H sont différentes pour chaque facette et ne peuvent pas être sorties de l'intégrale. Finalement :

$$\vec{F} = -\rho g \int_S H \cdot \vec{n} dS$$



Séance 1

B. Force hydrostatique sur une paroi plane

B. Force hydrostatique sur une paroi plane

On a montré que la résultante des forces de pression appliquées à une surface immergée se calcule dans le cas le plus général par :

$$\vec{F} = -\rho g \int_S H \cdot \vec{n} dS$$

On va s'intéresser maintenant au cas d'une **paroi plane**.

L'intérêt d'une telle paroi est que le vecteur normal $\vec{n}$ est le même sur toute la surface. On peut donc écrire :

$$\vec{F} = -\rho g \int_S H \cdot \vec{n} dS = -\rho g \vec{n} \int_S H \cdot dS$$

Ceci simplifie énormément le problème, car on intègre un scalaire sur une surface au lieu d'intégrer un vecteur à trois composantes.

B. Force hydrostatique sur une paroi plane

L'exemple de la paroi rectangulaire verticale est le plus simple à résoudre. Soit une plaque de normale :

$$\vec{n} = \vec{y}$$

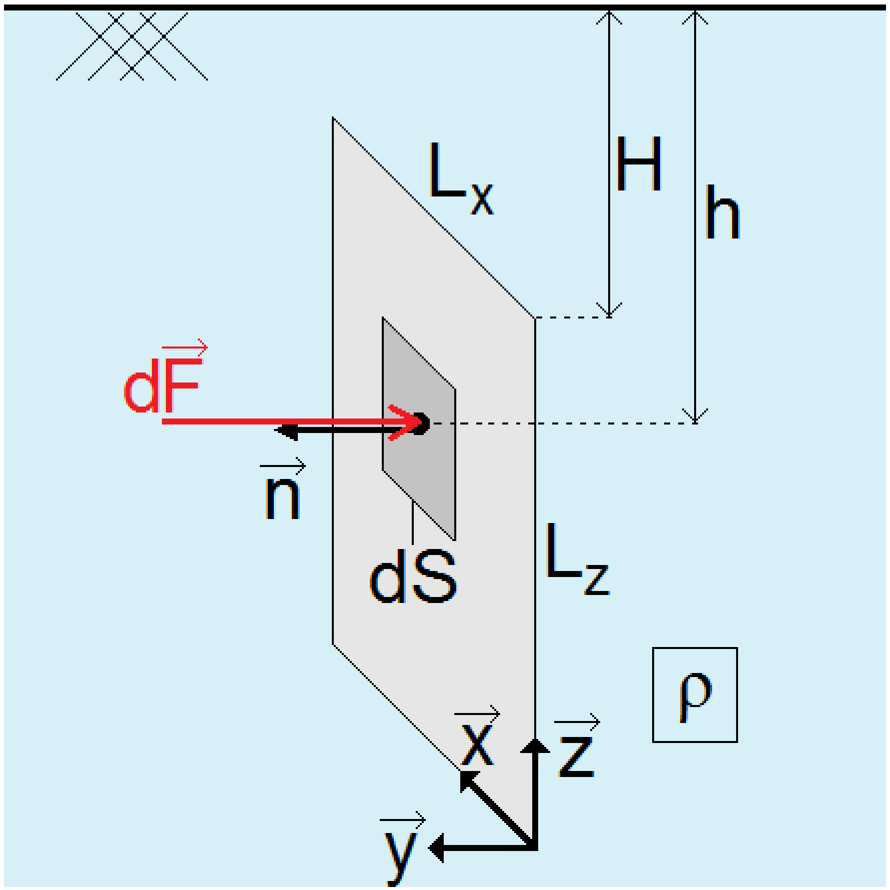
La force totale subie par cette surface est :

$$\vec{F} = -\rho g \vec{n} \int_S h \cdot dS$$

$$\vec{F} = -\rho g \vec{y} \int_{x=0}^{L_x} \int_{z=0}^{L_z} h(x,z) \cdot dz\, dx$$

La profondeur d'un élément de surface vaut :

$$h(x,z) = H + L_z - z$$



B. Force hydrostatique sur une paroi plane

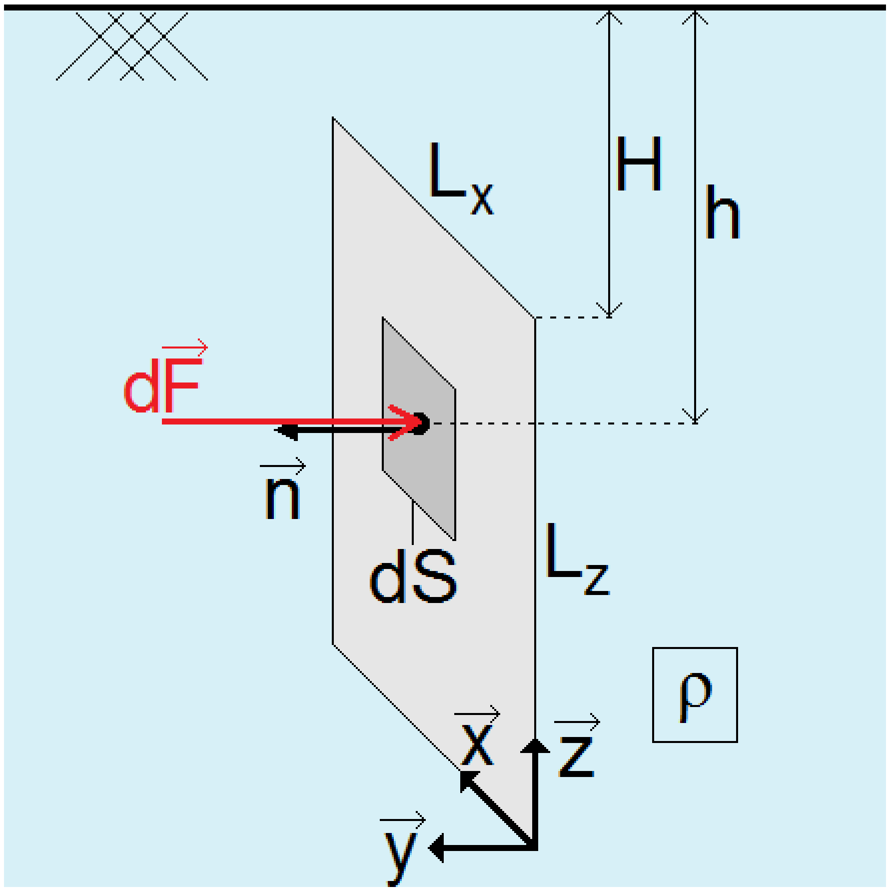
Finalement, on doit calculer :

$$\vec{F} = -\rho g \vec{y} \int_{x=0}^{L_x} \int_{z=0}^{L_z} (H + L_z - z) dz\, dx$$

$$\vec{F} = -\rho g \vec{y} \int_{x=0}^{L_x} \left[Hz + L_z z - \frac{z^2}{2} \right]_0^{Lz} dx$$

$$\vec{F} = -\rho g \vec{y} \int_{x=0}^{L_x} \left(H L_z + \frac{L_z{}^2}{2} \right) dx$$

$$\vec{F} = -\rho g \vec{y} \left(H L_z + \frac{L_z{}^2}{2} \right) \int_{x=0}^{L_x} dx$$



B. Force hydrostatique sur une paroi plane

$$\vec{F} = -\rho g \vec{y} \left(H L_z + \frac{{L_z}^2}{2} \right) L_x$$

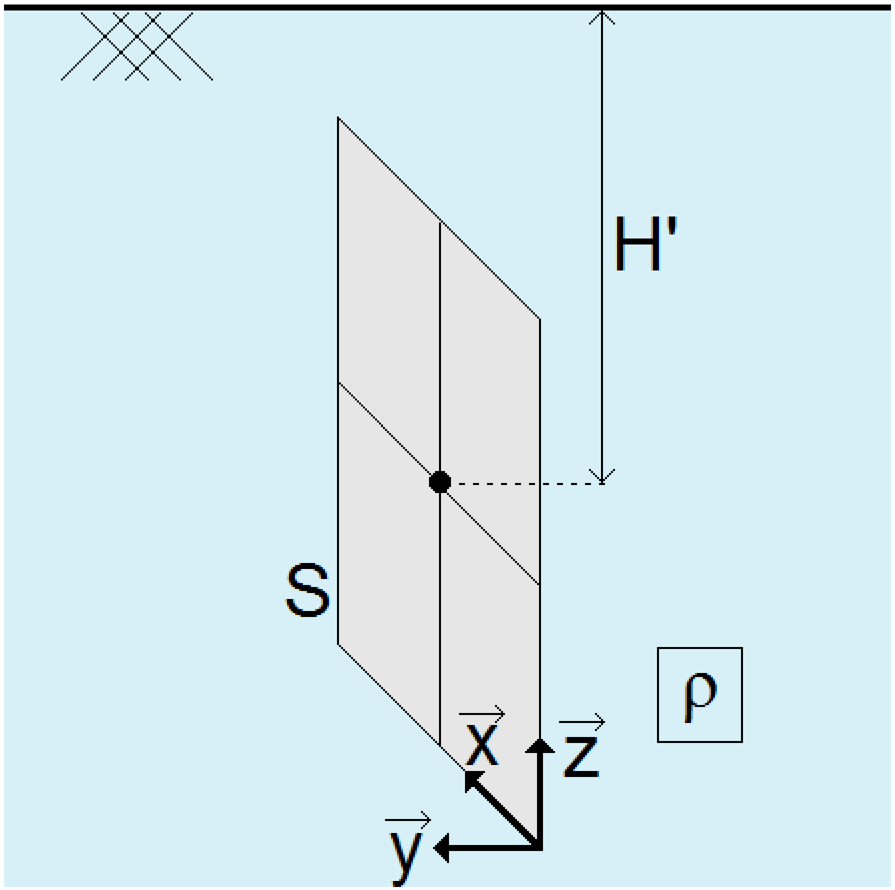
$$\vec{F} = -\rho g \vec{y} \left(H + \frac{L_z}{2} \right) L_z L_x$$

Et enfin :

$$\vec{F} = -\rho g H' S \vec{y}$$

On en conclut que :

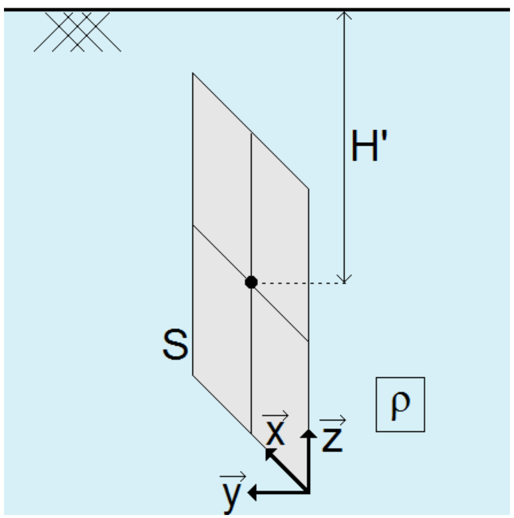
la force appliquée à une paroi rectangulaire verticale est égale à la pression existant en son barycentre multipliée par sa surface.

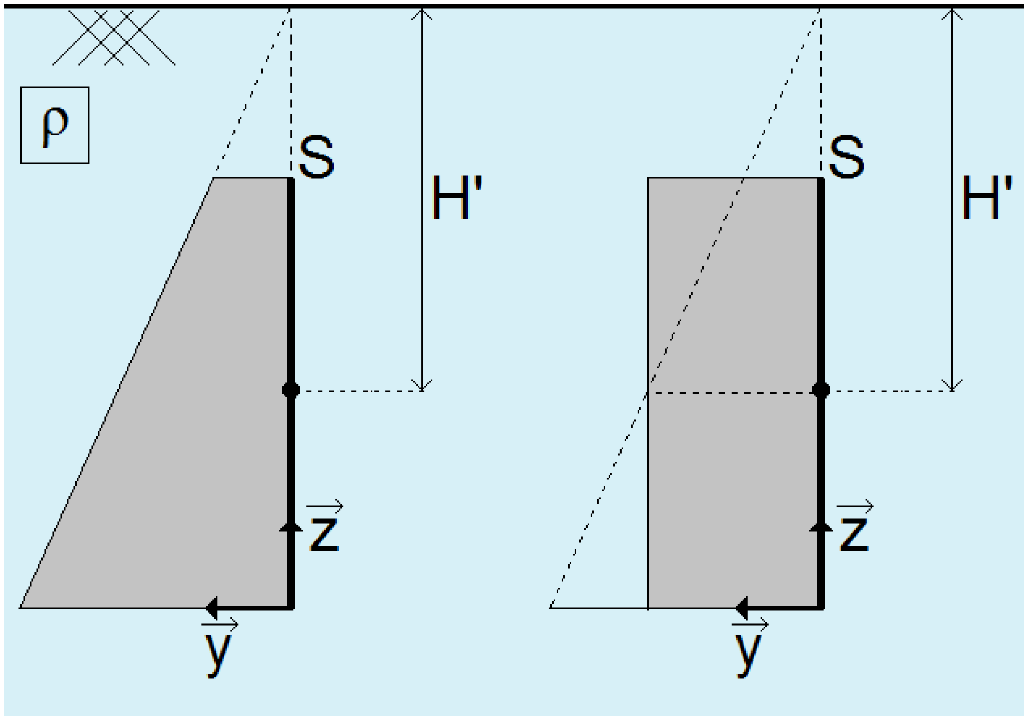


B. Force hydrostatique sur une paroi plane

Ce résultat pouvait se retrouver facilement à partir du diagramme de pression :

$$\vec{F} = -\rho g H' S \vec{y}$$





On peut généraliser sans démonstration cette formule à toute surface plane de forme rectangulaire ou quelconque, qu'elle soit verticale ou inclinée:

La force appliquée par un fluide sur une surface plane est égale au produit de sa surface et de la pression qui règne en son barycentre.

B. Force hydrostatique sur une paroi plane

Grâce à cette méthode, le calcul de la **résultante des forces de pression** sur une paroi plane est très facile. Il suffit de suivre les étapes suivantes :

- Calculer sa surface S

- Calculer la position de son barycentre, et évaluer sa profondeur H

- Calculer la pression $\rho g H$ régnant au niveau de ce barycentre

- Calculer les composantes du vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à cette surface

- Appliquer la formule vectorielle : $\vec{F} = -\rho g H S \vec{n}$

Il faut en revanche faire très attention au point suivant :

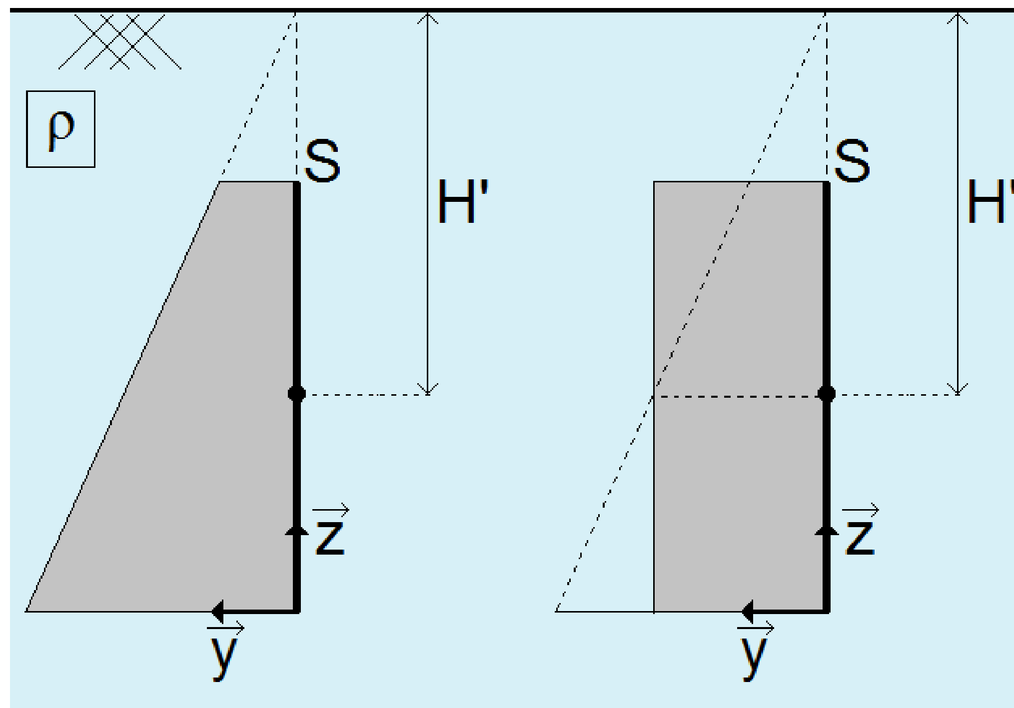
Le point d'application de cette résultante n'est pas le barycentre de la surface. Il est systématiquement situé à une plus grande profondeur.

B. Force hydrostatique sur une paroi plane

On a énoncé en début de cours que le point d'application de la résultante des forces de pression était positionné au barycentre des surfaces élémentaires **pondérées de la pression qu'elles subissent**.

Cette pondération est la raison pour laquelle ce point d'application est plus bas que le barycentre de la surface elle-même, puisque les pressions ne sont pas uniformes et sont plus importantes sur la partie inférieure.

On doit donc chercher le point correspondant à un équilibre en rotation de la surface soumis à une distribution de pression.



B. Force hydrostatique sur une paroi plane

Dans le cas simple de la plaque rectangulaire verticale, on place le repère au barycentre de la plaque et on cherche la distance entre ce point et le point d'application de la résultante de pression. Ce point est également appelé **centre de poussée C**, et se trouve à une certaine distance en dessous du barycentre G.

On doit écrire un équilibre en moment autour de l'axe x, et on considère la force élémentaire appliquée sur chaque « tranche » horizontale de profondeur h.

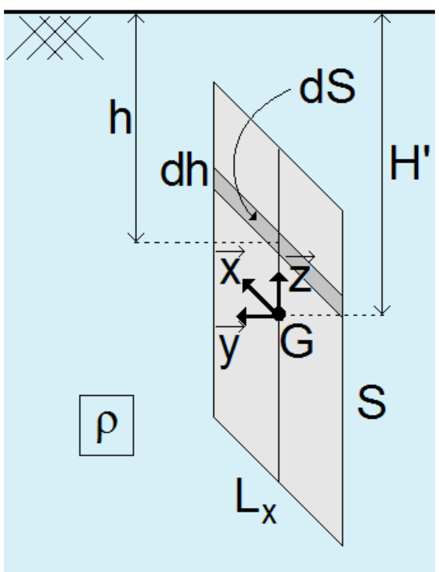
$$\overrightarrow{dF} = -dF\vec{n} = -pL_x dh \cdot \vec{y}$$

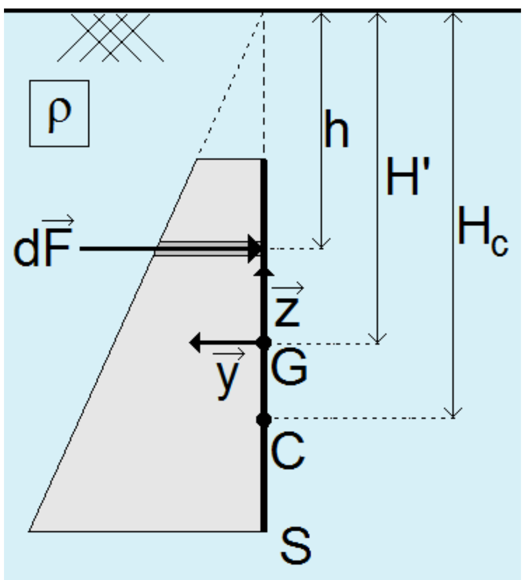
En équilibre des moments par rapport à G, on doit vérifier :

$$(H_c - H')F = \int_{h=H'-L_z/2}^{H'+L_z/2} (h - H')dF$$

Avec :

$$dF = p \cdot dS = \rho g h \cdot L_x dh$$

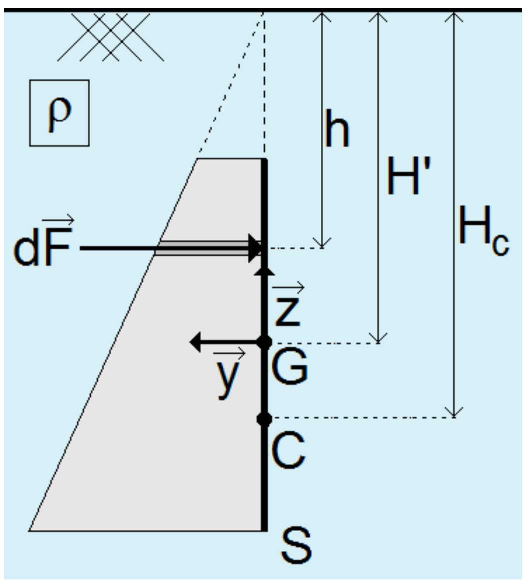




B. Force hydrostatique sur une paroi plane

On peut en déduire la profondeur du centre de poussée, qui se calcule comme suit :

$$H_c = H' + \frac{L_z^2}{12H'}$$



Cette expression s'exprime également par :

$$H_c = H' + \frac{L_x L_z^3}{12} \frac{1}{H' L_x L_z} = H' + \frac{I}{H'S}$$

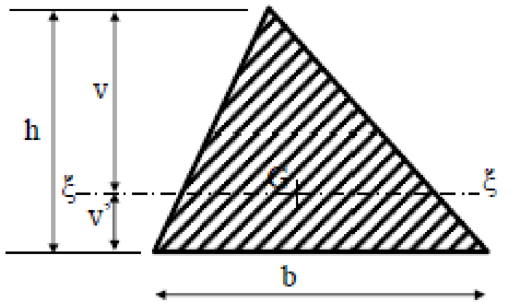
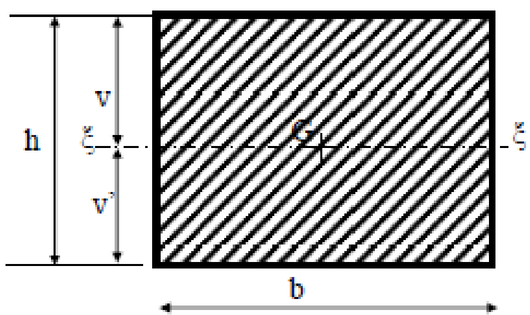
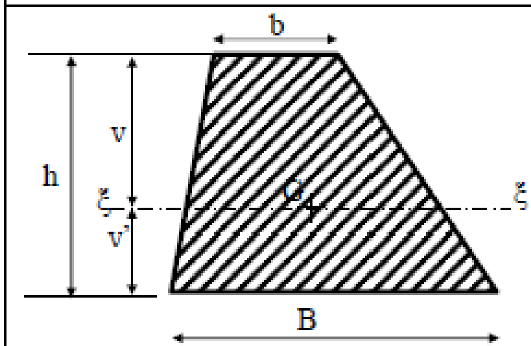
Dans cette expression, $I = \frac{L_x L_z^3}{12}$ est le moment d'inertie du rectangle par rapport à son centre de gravité, et s'exprime en m^4.

Cette expression peut être généralisée à toute géométrie de surface verticale, en remplaçant I et S par leur expression correspondante (qui dépend de la forme).

En l'absence de surface libre connue, on peut remplacer H' par $\frac{P_G}{\rho g}$: $H_C = H' + \frac{\rho g I}{P_G S}$

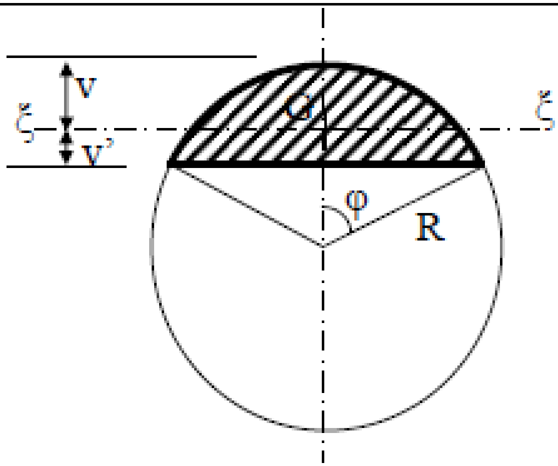
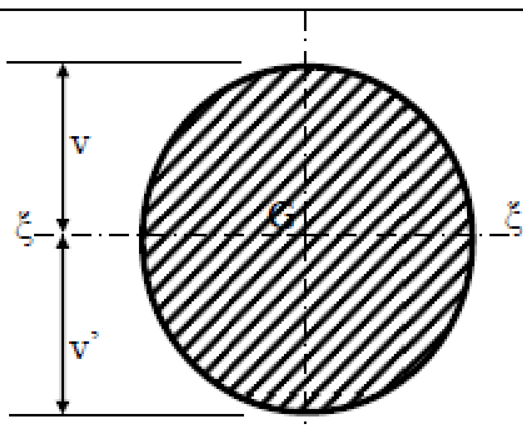
B. Force hydrostatique sur une paroi plane

Formulaire de surfaces, barycentres, et inerties :

	$v = \frac{2h}{3}$; $v' = \frac{h}{3}$ $S = \frac{bh}{2}$; $I_{\xi\xi} = \frac{bh^3}{36}$
	$v = \frac{h}{2}$; $v' = \frac{h}{2}$ $S = bh$; $I_{\xi\xi} = \frac{bh^3}{12}$
	$v = \frac{h}{3}\left(\frac{2B+b}{B+b}\right)$; $v' = \frac{h}{3}\left(\frac{B+2b}{B+b}\right)$ $S = \frac{h}{2}(B+b)$; $I_{\xi\xi} = \frac{h^3\left(B^2+4Bb+b^2\right)}{36(B+b)}$

B. Force hydrostatique sur une paroi plane

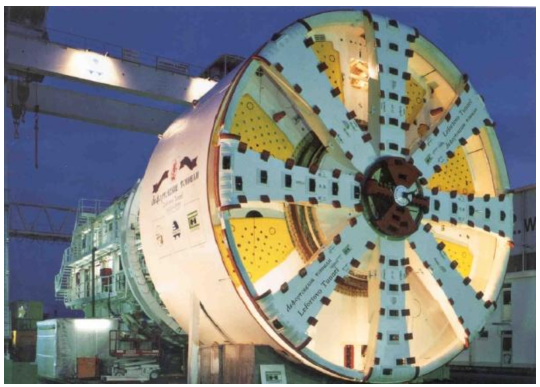
Formulaire de surfaces, barycentres, et inerties :

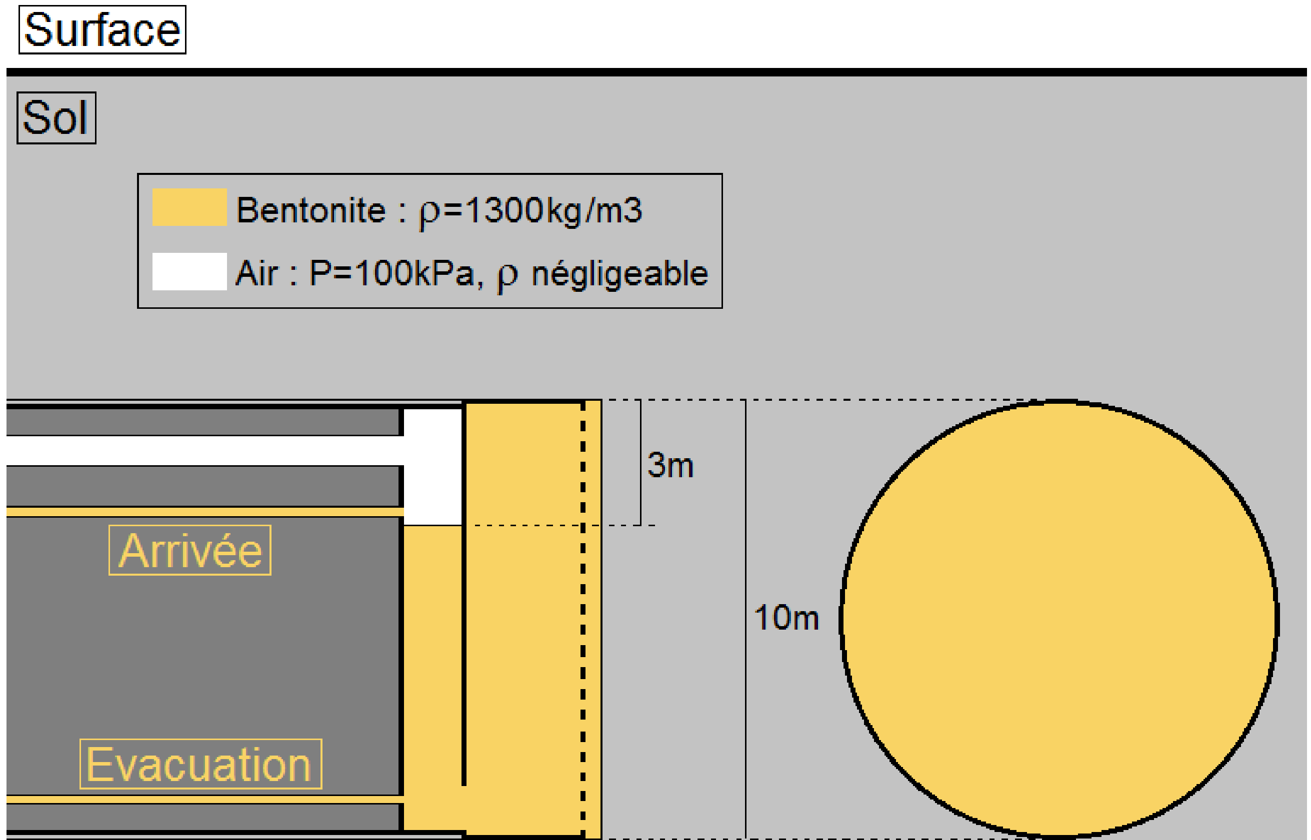
	$v = R\left(1 - \frac{4\sin^3(\varphi)}{3(2\varphi - \sin(2\varphi))}\right)$ $v' = R(1-\cos(\varphi)) - v$ $S = \frac{R^2}{2}(2\varphi - \sin(2\varphi))$ $I_{\xi\xi} = \frac{R^4}{16}(4\varphi - \sin(4\varphi)) - \frac{R^4}{9}\frac{(1-\cos(2\varphi))^3}{(2\varphi - \sin(2\varphi))}$
	$v = R \; ; \; v' = R$ $S = \pi R^2 \; ; \; I_{\xi\xi} = \frac{\pi R^4}{4}$

POLYTECH GRENOBLE

B. Force hydrostatique sur une paroi plane

Exercice 2 : excavation au tunnelier à pression de boue.





Indices :

$$\vec{F} = -p_{barycentre} S\vec{n}$$

$$H_C = H' + \frac{\rho g I}{P_G S}$$

$$I_{disque} = \frac{\pi R^4}{4}$$

Intensité et centre de poussée de la résultante de la pression de boue sur le sol ?

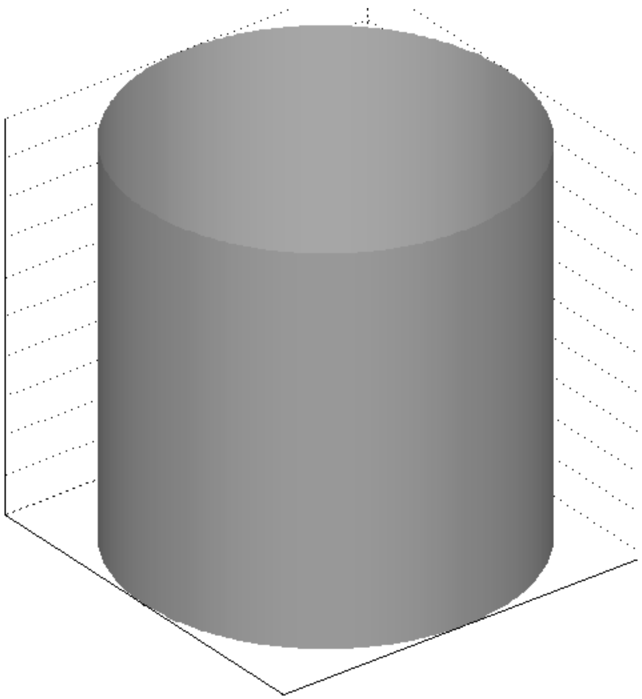
Séance 1

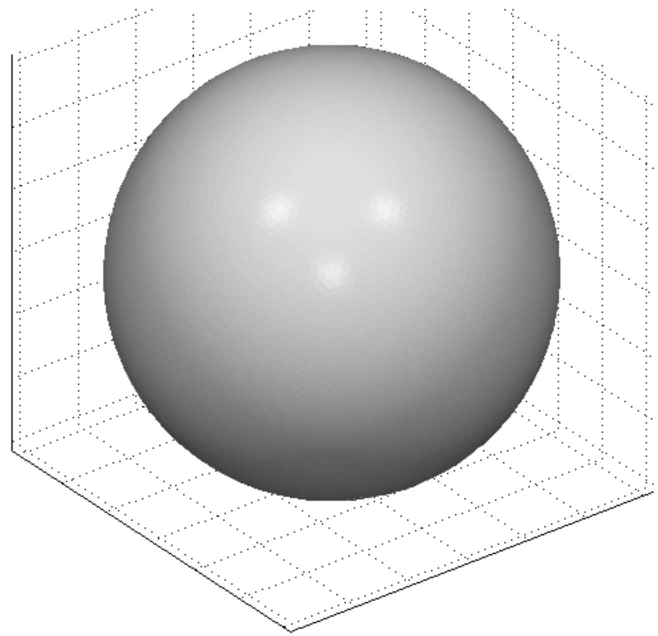
C. Force hydrostatique sur une paroi gauche

C. Force hydrostatique sur une paroi gauche

Une paroi gauche est un paroi qui n'est pas plane.

Elle a donc **une ou deux courbures** :





La complication pour de telles surfaces tient au fait que la normale sortante $\vec{n}$ n'est pas constante sur la surface.

C. Force hydrostatique sur une paroi gauche

On a donc l'expression générale suivante :

$$\vec{F} = -\rho g \int_S H \cdot \vec{n} dS$$

Puisque le vecteur $\vec{n}$ est différent en chaque point P de la surface, on peut écrire que ses trois composantes ont l'allure suivante :

$$\vec{n} = \begin{cases} n_x(P) \\ n_y(P) \\ n_z(P) \end{cases}$$

Pour calculer cette intégrale, il faut considérer indépendamment chacune des trois composantes de la résultante selon les trois directions

C. Force hydrostatique sur une paroi gauche

Il faut donc calculer trois intégrales au lieu d'une :

$$\begin{cases} F_x = -\rho g \int_S H(P) \cdot n_x(P) dS \\ F_y = -\rho g \int_S H(P) \cdot n_y(P) dS \\ F_z = -\rho g \int_S H(P) \cdot n_z(P) dS \end{cases}$$

Selon la forme de la surface, l'expression des composantes de la normale sortante peuvent être plus ou moins compliquées, de même que la calcul de l'intégrale.

C. Force hydrostatique sur une paroi gauche

Une autre solution est d’utiliser les règles générales suivantes :

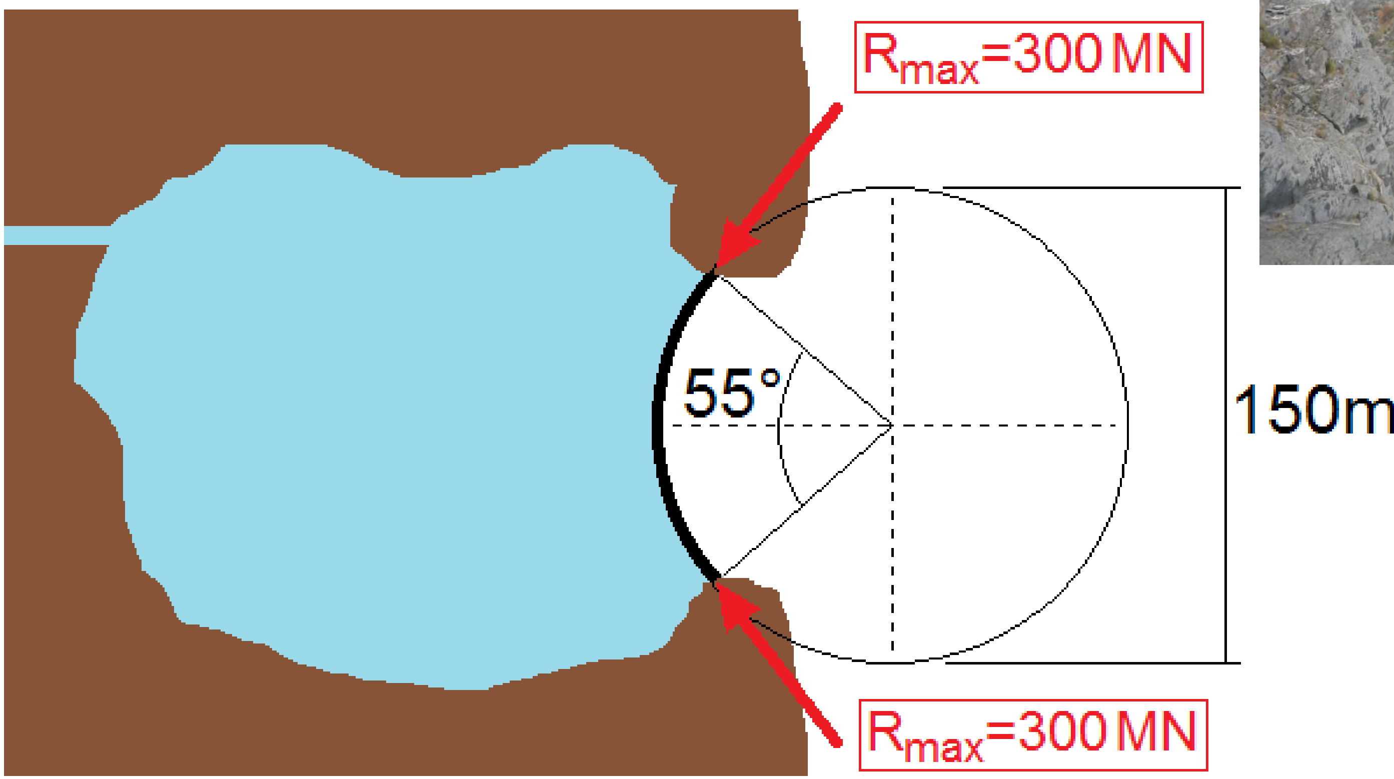
La composante horizontale dans la direction x de la résultante de pression appliquée à une surface quelconque S est égale à la poussée qui s’appliquerait sur une projection de S selon x.

Idem pour la composante horizontale selon y.

La composante verticale de la résultante de pression appliquée à une surface quelconque S est égale au poids de la colonne verticale d’eau délimitée par S et par la surface libre.

C. Force hydrostatique sur une paroi gauche

Exercice 3 : stabilité d'un barrage voûte



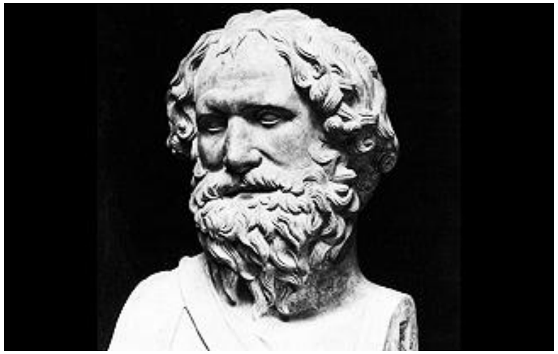
Hauteur maximale d'eau dans le barrage ?

Séance 1

D. Force hydrostatique sur un objet immergé

D. Force hydrostatique sur un objet immergé

La force hydrostatique appliquée sur un objet immergé est généralement appelée **poussée d'Archimède**.



Archimède
287-212 avant JC

On considère une surface fermée constituant un corps solide immergé dans un liquide au repos. En plus de son poids, le corps solide est soumis à la poussée d'Archimède que l'on définit comme suit :

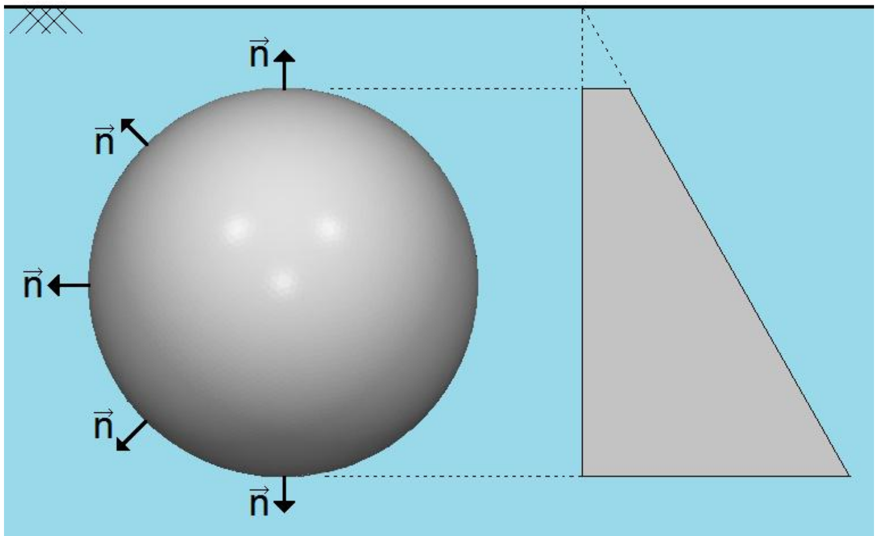
La poussée d'Archimède est une force orientée de bas en haut, dont la norme est égale à celle du poids du volume d'eau déplacé, et dont le point d'application est le barycentre d'un volume d'eau fictif qui occuperait le volume immergé.

Il faut noter que le point d'application n'est pas nécessairement positionné au barycentre du solide immergé si celui-ci n'a pas un poids uniformément réparti, ou si celui-ci n'est pas entièrement immergé.

D. Force hydrostatique sur un objet immergé

Ce théorème peut se redémontrer mathématiquement, à partir de la formule fondamentale suivante, où S est une **surface fermée quelconque** :

$$\vec{F} = \int_S -\rho g H \cdot \vec{n} dS$$



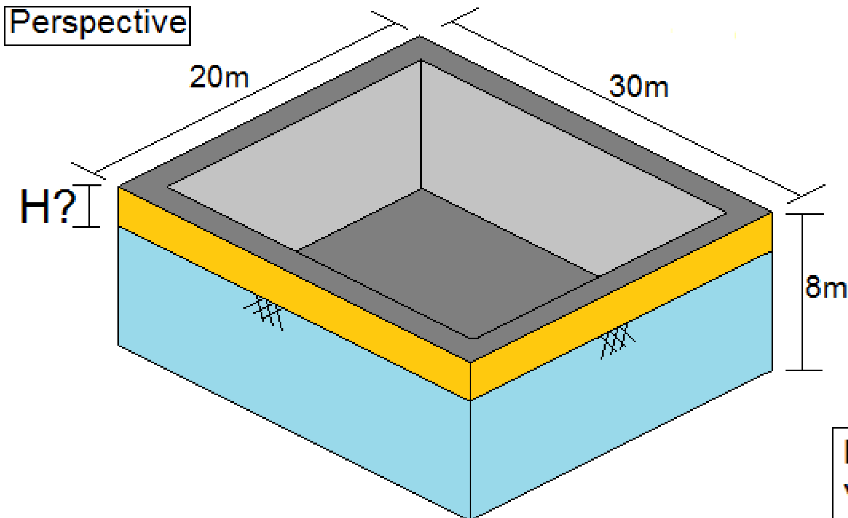
La poussée d'Archimède est simplement la traduction du fait que les pressions qui s'appliquent sur la partie inférieure du corps immergé sont plus importantes que celles de la partie supérieure.

Or les forces de pression appliquées en partie inférieure sont majoritairement orientées « vers le haut », tandis que celles de la partie supérieure sont principalement orientées « vers le bas ».

C'est cette poussée qui est responsable du fait que certains objets flottent et que d'autres coulent.

D. Force hydrostatique sur un objet immergé

Exercice 4 : stabilité d'une paroi moulée



$\rho_{béton}$=2500kg/m3

Sable Sec

Sable saturé

En dessous de quelle valeur de H risque-t-on de voir la paroi moulée se soulever ?