



Mécanique des matériaux granulaires

Séance 3 : Milieux granulaires en écoulement

Guilhem MOLLON

4GMD 2014-2015



Plan de la séance

-Ecoulement plastique

- Dilatance de Reynolds
- Essai de cisaillement rectiligne
- Liquéfaction des milieux saturés

-Ecoulements denses

- Ecoulement sur une pente
- Ecoulement sur un tas
- Ségrégation en écoulement
- Ecoulement en silo

-Ecoulements collisionnels

- Analogie avec un gaz
- Théorie cinétique des gaz granulaires



Mécanique des matériaux granulaires

Ecoulement plastique



Dilatance de Reynolds

-Mise en évidence

Les matériaux granulaires étant poreux, on s'attend à ce qu'ils présentent en présence d'un fluide le comportement d'une éponge : ils devraient intuitivement rejeter du liquide lorsqu'ils sont soumis à des sollicitations mécaniques.

Pourtant, on constate que, lorsque l'on marche sur du sable saturé, une zone de sable sec se forme autour des pieds appliquant la charge. Comment expliquer ce phénomène ?





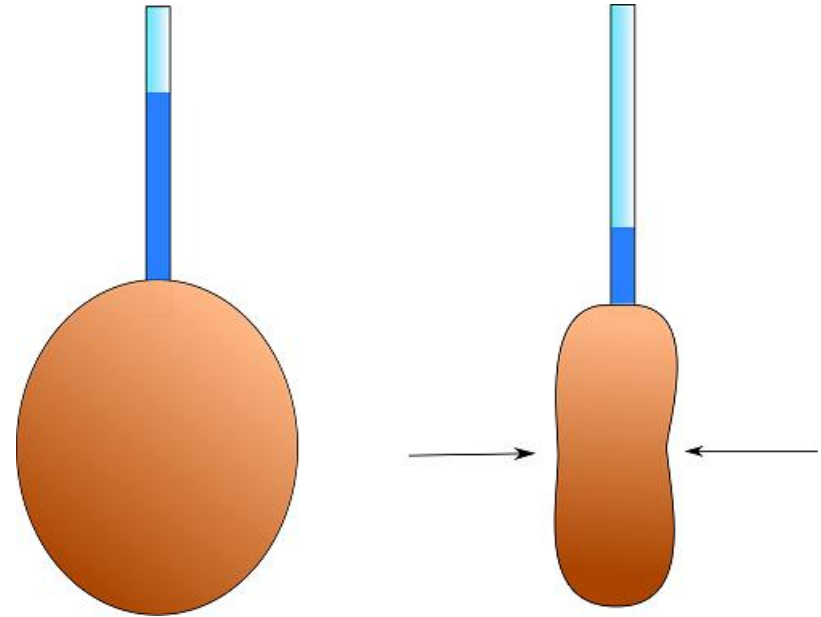
Dilatance de Reynolds

-Mise en évidence

-L'expérience elle-même

Ce comportement a été mis en évidence par Reynolds lors d'une expérience. Celle-ci consiste à remplir une poche déformable de sable saturé d'un liquide, et à la presser. Contre toute attente, le liquide n'est pas éjecté mais aspiré par le matériau granulaire.

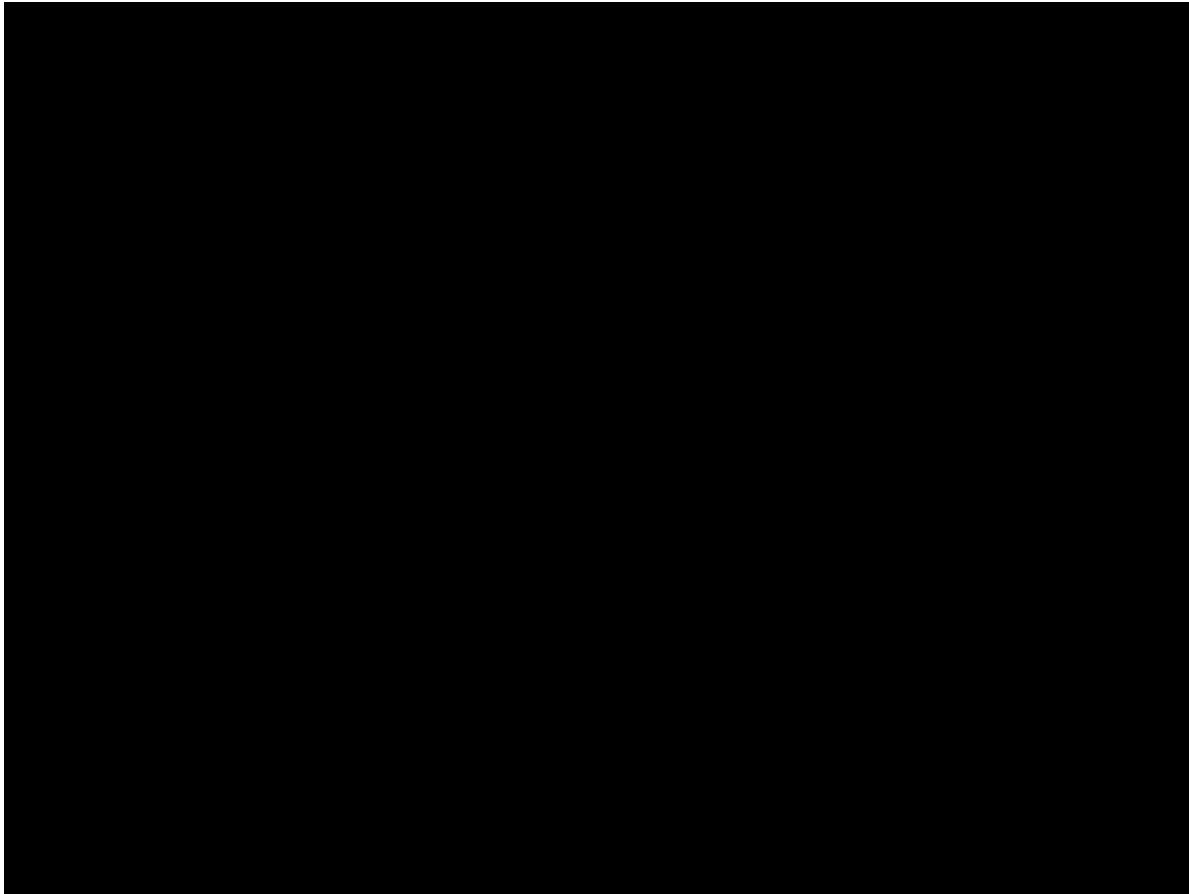
Il semble donc que le fait de déformer l'assemblage granulaire a tendance à élargir les vides situés entre les grains, ce qui conduit à cette aspiration de liquide. Ce phénomène est appelé « dilatance ».





Dilatance de Reynolds

- Mise en évidence
- L'expérience elle-même





Dilatance de Reynolds

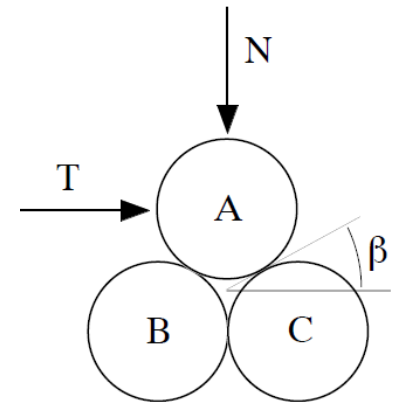
- Mise en évidence
- L'expérience elle-même
- Interprétation micromécanique

Pour expliquer ce comportement, on imagine un assemblage très simple de trois disques empilés, dont on suppose qu'ils ne peuvent pas tourner. On cherche à déterminer quel est l'effort tangentiel nécessaire pour déplacer horizontalement la bille A. Le problème est analogue à celui de la déformation en cisaillement d'un empilement hexagonal compact.

Si on appelle β l'angle du plan de contact A-C et si on considère un coefficient de frottement intergranulaire égal à $\tan(\delta)$, alors cet effort vaut :

$$T = N \cdot \tan(\beta + \delta)$$

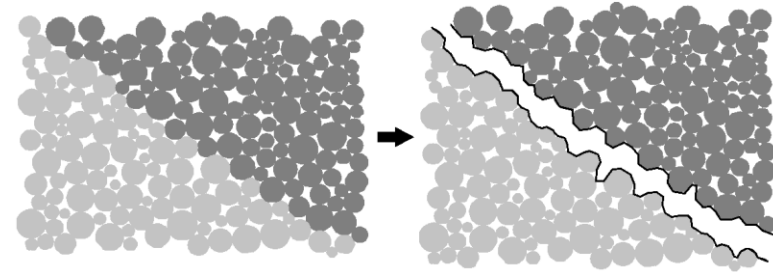
Pour un assemblage compact, la mise en cisaillement nécessite donc de vaincre deux contributions : le frottement intergranulaire, et l'enchevêtrement géométrique des grains.



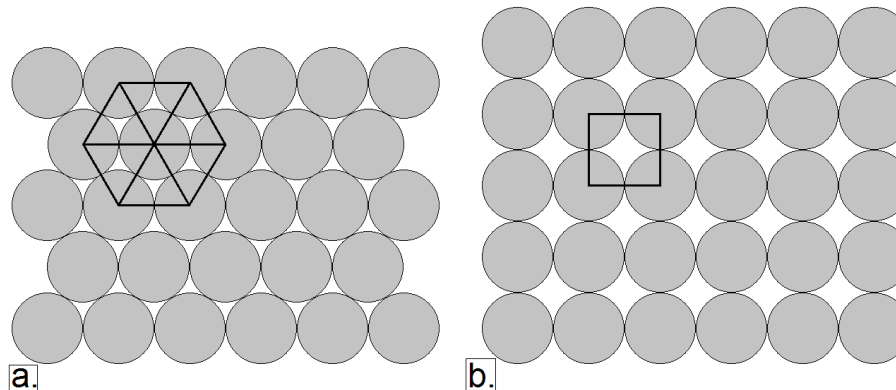


Dilatance de Reynolds

- Mise en évidence
- L'expérience elle-même
- **Interprétation micromécanique**



Ce désenchevêtrement n'est nécessaire que si le matériau granulaire est suffisamment dense dans son état initial. On en déduit que la résistance au cisaillement ne dépend pas uniquement de propriétés intrinsèques au matériau (frottement intergranulaire, morphologie, etc.), mais également de l'état de compaction dans lequel il se trouve.



Si le matériau est initialement dense, il doit d'abord se dé-densifier pour se déformer : c'est la raison micromécanique de la dilatance de Reynolds. C'est également un comportement qui est ignoré par le modèle de plasticité de Mohr-Coulomb.



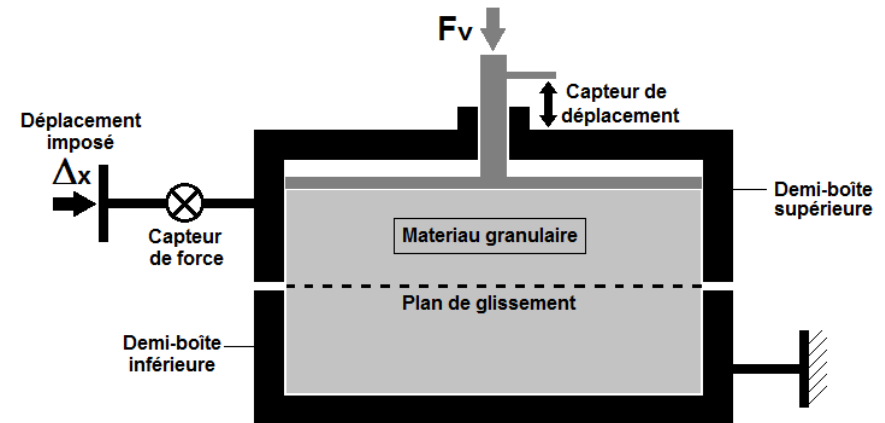
Essai de cisaillement rectiligne

-Principes expérimentaux

Pour décrire plus quantitativement le comportement dilatant, on a recours à un dispositif expérimental appelé « boîte de Casagrande ».

Il s'agit d'un essai de cisaillement pour lequel le plan de glissement est imposé par la cinématique du dispositif, avec les mesures suivantes :

- Effort de résistance à un déplacement tangentiel imposé
- Variation de volume de l'échantillon lors de la sollicitation





Essai de cisaillement rectiligne

-Principes expérimentaux

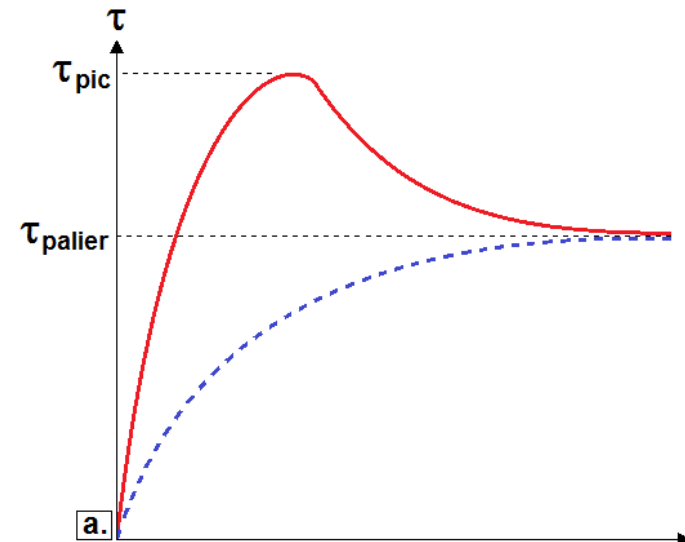
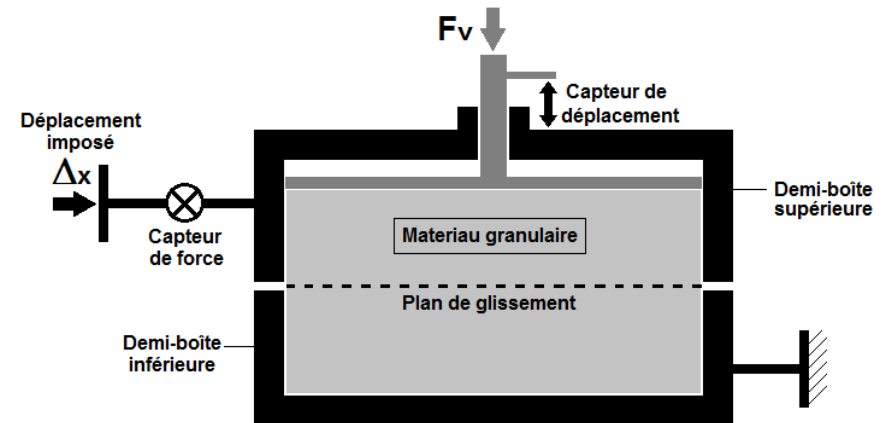
-Résistance au cisaillement

Lorsqu'on fait varier progressivement le déplacement Δx , on peut obtenir deux types de comportements différents selon que le matériau est initialement dense ou lâche.

Pour un matériau dense, la résistance au cisaillement augmente très vite et atteint un pic, puis diminue pour atteindre un palier constant. On peut donc calculer deux types d'angles de frottement interne pour ce matériau :

$$\tan(\varphi_{pic}) = \frac{\tau_{pic}}{\sigma_v}$$

$$\tan(\varphi_{résiduel}) = \frac{\tau_{palier}}{\sigma_v}$$



— Matériau initialement dense Matériau initialement lâche



Essai de cisaillement rectiligne

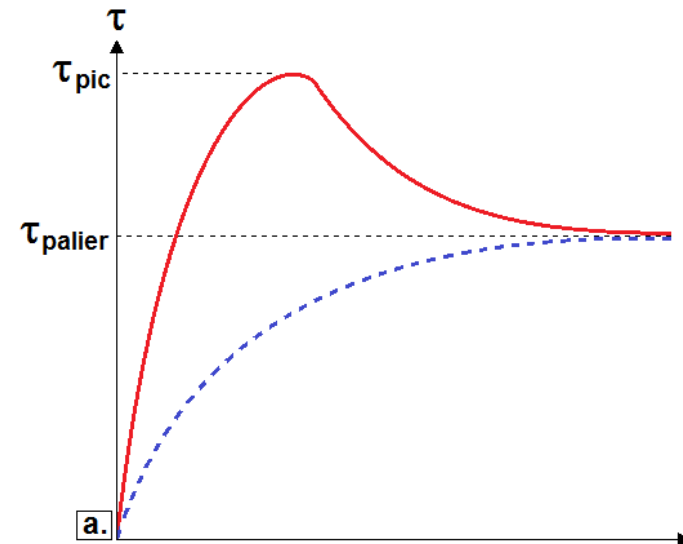
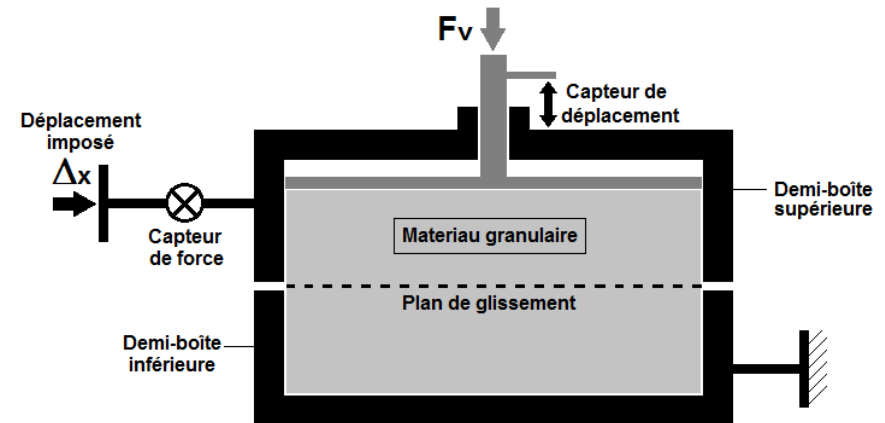
-Principes expérimentaux

-Résistance au cisaillement

Dans le cas d'un matériau initialement lâche, on ne distingue pas de pic et on tend directement vers la résistance résiduelle au palier :

$$\tan(\varphi_{\text{résiduel}}) = \frac{\tau_{\text{palier}}}{\sigma_v}$$

Par conséquent, dans un matériau dense, un surplus de résistance est apporté par l'enchevêtrement des grains. Mais lorsque celui-ci est rompu, on tend finalement vers le même état résiduel que pour un matériau lâche.



— Matériau initialement dense Matériau initialement lâche



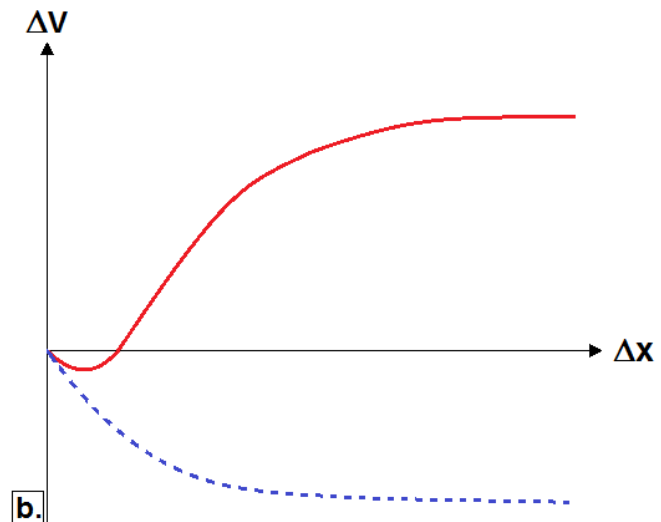
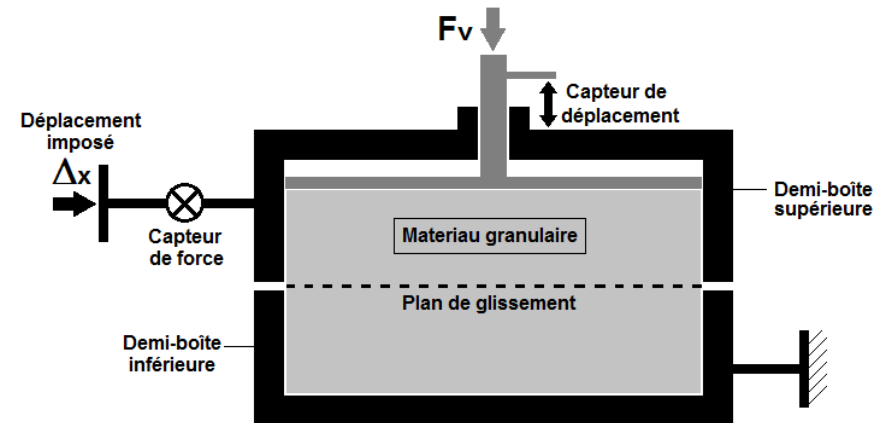
Essai de cisaillement rectiligne

- Principes expérimentaux
- Résistance au cisaillement
- Variation de volume

Si l'on s'intéresse à la variation de volume dans l'échantillon, on constate également une différence de comportement selon la compacité initiale.

-Un échantillon dense, après une très faible contraction, va se dilater considérablement avant d'atteindre un palier. C'est la dilatance de Reynolds

-Un échantillon lâche va au contraire voir son volume apparent se réduire, pour atteindre également un palier. On appelle ce phénomène la contractance.



— Matériau initialement dense Matériau initialement lâche

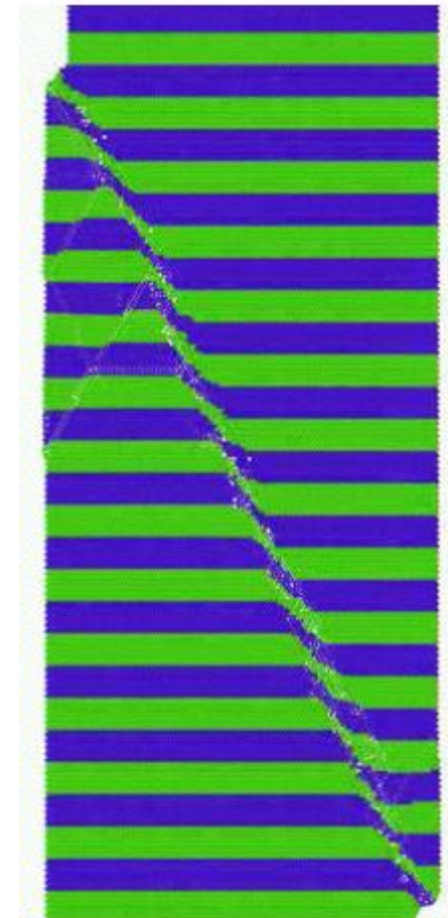


Essai de cisaillement rectiligne

- Principes expérimentaux
- Résistance au cisaillement
- Variation de volume

On peut démontrer expérimentalement que la densité finale atteinte dans la zone cisailée est la même quelle que soit la densité initiale du matériau : le matériau dense s'est dilaté, le matériau lâche s'est contracté, et ils tendent vers un même état avec un angle de frottement noté $\varphi_{résiduel}$.

On appelle ce comportement l'état critique d'écoulement plastique. Il correspond à la situation pour laquelle le squelette granulaire a été tellement remanié qu'il ne garde plus aucune mémoire de son état initial.





Liquéfaction des milieux saturés

-Mise en évidence

Dans certaines conditions très particulières, on observe un changement brutal du comportement mécanique des milieux granulaires grossiers : la liquéfaction. Ce phénomène se produit si :

- Les sollicitations mécaniques sont très brèves (séismes, vibrations, impacts...)
- Le matériau est saturé d'un liquide incompressible
- Le matériau est très peu polydisperse ($C_u < 1.5$)
- Le matériau est très peu dense, et les grains sont dans un équilibre statique précaire

C'est le même phénomène qui est connu du grand public sous le terme « sables mouvants »



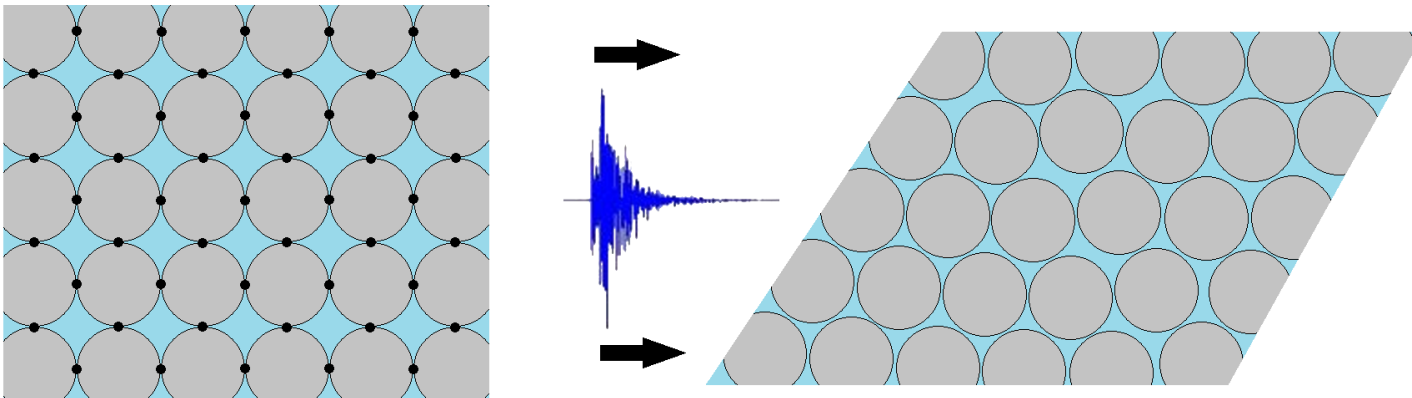
Liquéfaction des milieux saturés

-Mise en évidence

-Interprétation micromécanique

La liquéfaction s'explique de la façon suivante : on est en présence d'un matériau très peu dense, les grains sont en contacts mais l'assemblage est très loin d'être optimal, et l'espace des pores est saturé de liquide.

Sous les sollicitations, les contacts sont détruits et l'eau n'a pas le temps de s'échapper (conditions « non drainées ») : le matériau voudrait se contracter, mais il ne le peut pas à cause de l'incompressibilité : il se comporte comme une suspension granulaire et perd la totalité de sa résistance au cisaillement.





Mécanique des matériaux granulaires

Ecoulements denses



Écoulement sur une pente

-Hypothèses d'étude

L'écoulement plastique étudié précédemment correspond encore à un régime quasi-statique, et décrit uniquement le comportement mécanique des matériaux granulaires en grandes déformations.

Quand ce type d'écoulement commence à prendre des effets dynamiques, on change de vocabulaire et on parle d'écoulements denses. Il s'agit d'un sujet d'étude fondamental en géophysique et en ingénierie de l'environnement.

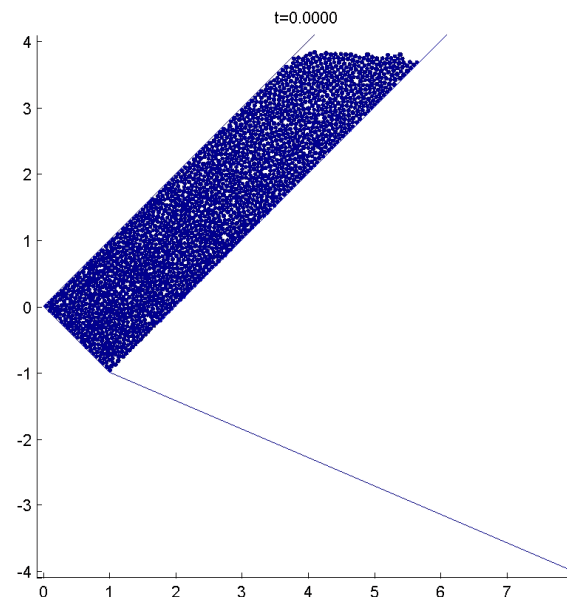




Écoulement sur une pente

-Hypothèses d'étude

Une approche classique pour traiter ce problème sans avoir recours à des hypothèses trop restrictives est de mettre en œuvre une démarche expérimentale.





Écoulement sur une pente

-Hypothèses d'étude

Pour représenter mathématiquement ce problème, on doit faire de nombreuses simplifications. L'hypothèse principale est l'approche de Saint-Venant, initialement formulée pour les écoulements de liquides à surface libre et de faibles épaisseurs.

Cette hypothèse postule que la couche de matériau en écoulement est d'une épaisseur négligeable devant les autres dimensions caractéristiques du problème (dimensions latérale et longitudinale).

Cette supposition est raisonnable dans beaucoup de situations naturelles et industrielles. Les glissements de terrain, par exemple, se propagent sur plusieurs centaines de mètres de distance pour une épaisseur généralement inférieure à 10 mètres.

Pour simplifier encore plus, on travaille le plus souvent en 2D.



**Adhémar Barré
de Saint-Venant**
(1797-1886)



Ecoulement sur une pente

-Hypothèses d'étude

-Equations constitutives

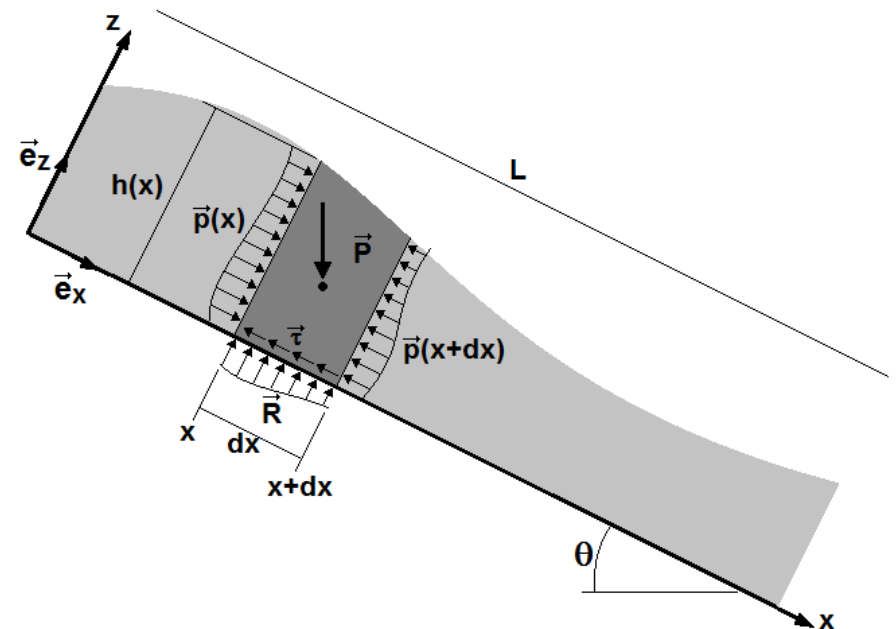
On considère un matériau granulaire d'épaisseur faible (mais à la fois variable et inconnue), se propageant à la surface d'une pente rigide d'inclinaison θ . L'idée de Saint-Venant est de tirer profit de cette faible épaisseur pour négliger la direction $\vec{z}$ (normale à la pente).

On décrit donc entièrement cet écoulement par deux champs 1D définis selon la direction de la pente à chaque instant :

-Le champ d'épaisseur : $h(x, t)$

-Le champ de vitesse moyenne : $\bar{u}(x, t)$

On raisonne donc par « tranches » de matériau. Pour chaque tranche, seule la vitesse moyenne est considérée.





Ecoulement sur une pente

-Hypothèses d'étude

-Equations constitutives

On peut alors lister les efforts appliqués sur chacune de ces tranches :

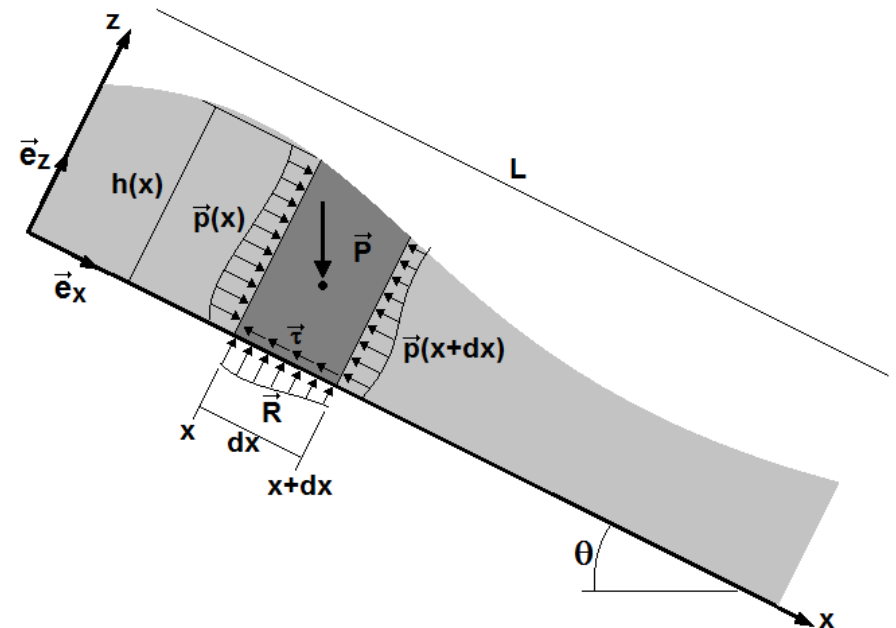
-Le poids de la tranche : $\vec{P}$

-La résultante des pressions appliquées par la tranche amont : $\vec{p}(x)$

-La résultante des pressions appliquées par la tranche aval : $\vec{p}(x + dx)$

-La réaction normale de la pente : $\vec{R}$

-Les efforts tangentiels de frottement sur la pente : $\vec{\tau}$





Écoulement sur une pente

-Hypothèses d'étude

-Equations constitutives

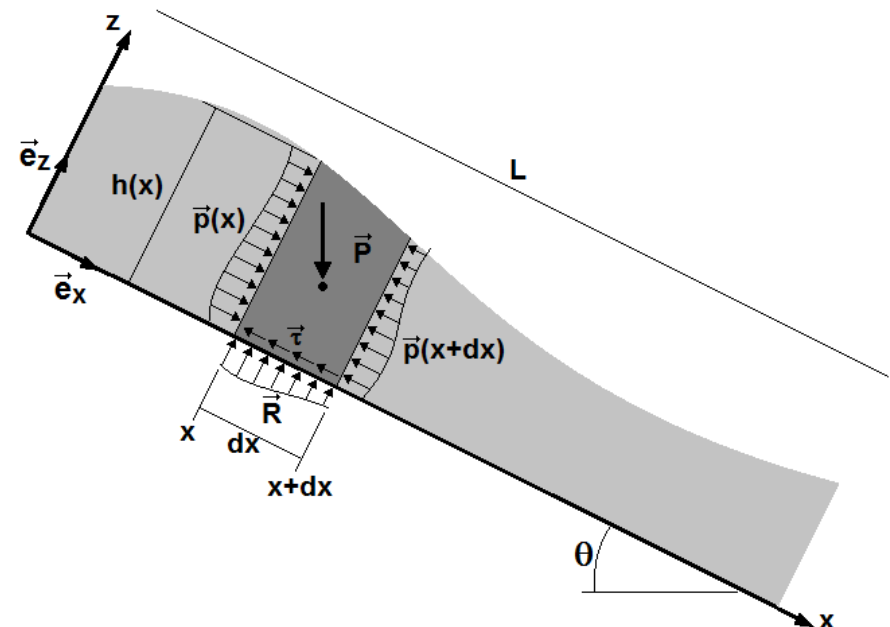
Une autre hypothèse nécessaire pour développer les calculs est de considérer le matériau comme incompressible. Ceci va à l'encontre des résultats obtenus en plasticité, mais peut se justifier pour les écoulements denses pour lesquels la fraction solide est peu variable (si l'écoulement n'est pas perturbé par des obstacles).

Dans ces conditions, le champ de vitesse 2D $\vec{u} = u(x, z, t)\vec{e}_x + v(x, z, t)\vec{e}_z$ vérifie l'équation de divergence nulle :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

On définit également la vitesse moyenne dans une tranche :

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{h(x)} \int_0^{h(x)} u(x, z) dz$$





Ecoulement sur une pente

-Hypothèses d'étude

-Equations constitutives

L'équation de conservation de la masse s'écrit alors à une abscisse donnée : $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} = 0$

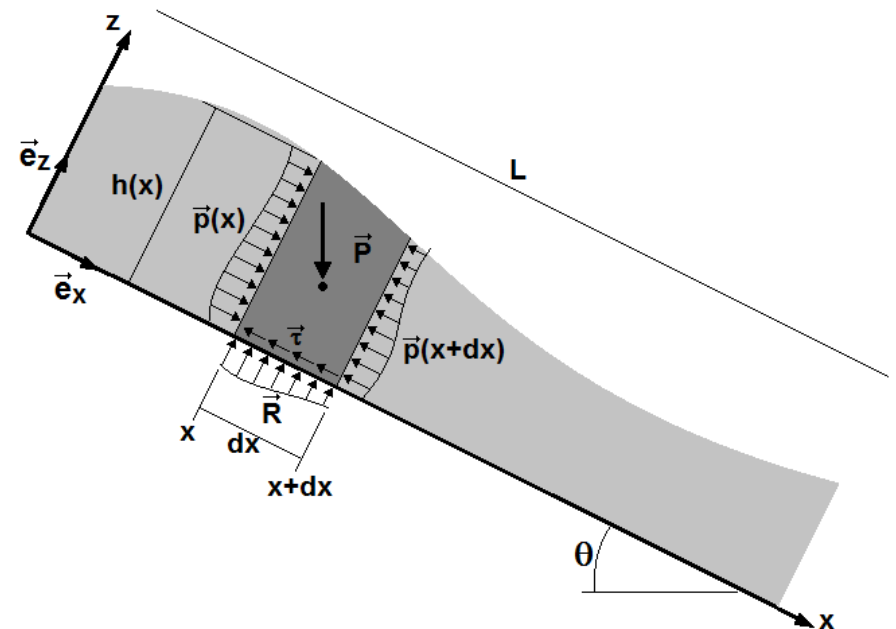
On doit également faire des hypothèses sur le champ de contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$:

-Le champ de pression dans la direction normale à la pente est hydrostatique :

$$\sigma_{zz} = \rho g \cdot \cos \theta \cdot (h - z)$$

-Il existe une relation de proportionnalité entre les contraintes normale et tangente à la pente (analogue à la poussée de Rankine) :

$$\sigma_{xx} = k \cdot \sigma_{zz}$$





Ecoulement sur une pente

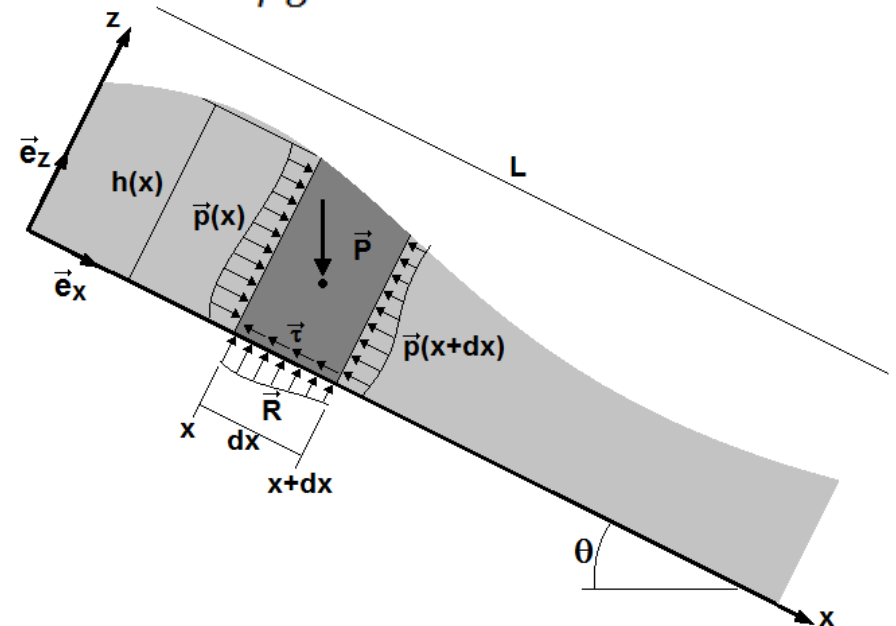
- Hypothèses d'étude
- Equations constitutives
- Fermeture du système

On peut déduire de ces réflexions l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left(\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \alpha \frac{\partial(h\bar{u}^2)}{\partial x} \right) = \rho g h \cdot \cos \theta \left(\tan \theta - \frac{\tau}{\rho g h \cdot \cos \theta} - k \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

Le système de deux équations ainsi défini est fermé pour peu que l'on définisse certains paramètres pour l'instant indéterminés : k , α , et τ .

Certains résultats expérimentaux montrent que le paramètre k (rapport entre la contrainte normale et la contrainte tangentielle) serait proche de 1.

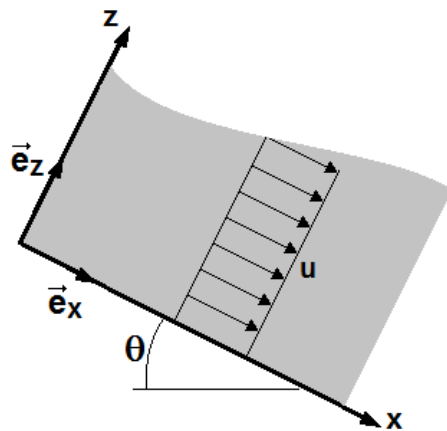




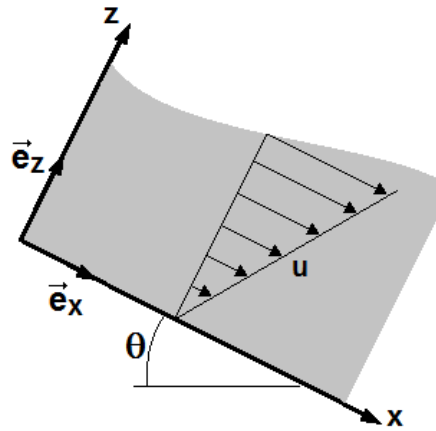
Ecoulement sur une pente

- Hypothèses d'étude
- Equations constitutives
- Fermeture du système

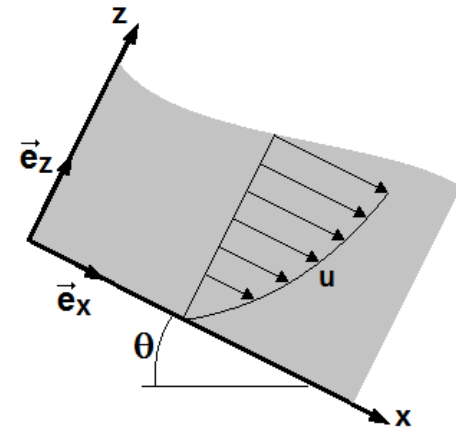
Le paramètre α dépend du profil de vitesse supposé dans une tranche donnée (valeurs respectives de 1, $4/3$ et $5/6$ pour des profils de vitesse uniforme, linéaire et parabolique respectivement). On doit donc faire un choix a priori, à partir d'une certaine connaissance expérimentale du phénomène.



Profil uniforme



Profil linéaire



Profil parabolique



Ecoulement sur une pente

- Hypothèses d'étude
- Equations constitutives
- Fermeture du système

Le paramètre τ , enfin, représente la contrainte tangentielle appliquée au contact entre l'écoulement et la pente. Souvent, une simple loi de Coulomb est utilisée :

$$\tau = \mu \rho g h \cdot \cos \theta$$

Ce terme est à la fois le plus mal connu, et celui sur lequel on peut le plus s'autoriser de liberté afin de faire « coller » le modèle à la réalité. C'est donc ce paramètre qui, à la fois, donne son efficacité à la théorie dans un cadre donné et qui lui retire tout caractère prédictif dans le cas général.

Malgré ces faiblesses et son impuissance à prédire certains phénomènes, cette théorie est aujourd'hui implémentée dans de nombreux logiciels utilisés par les BE d'aménagement du territoire.

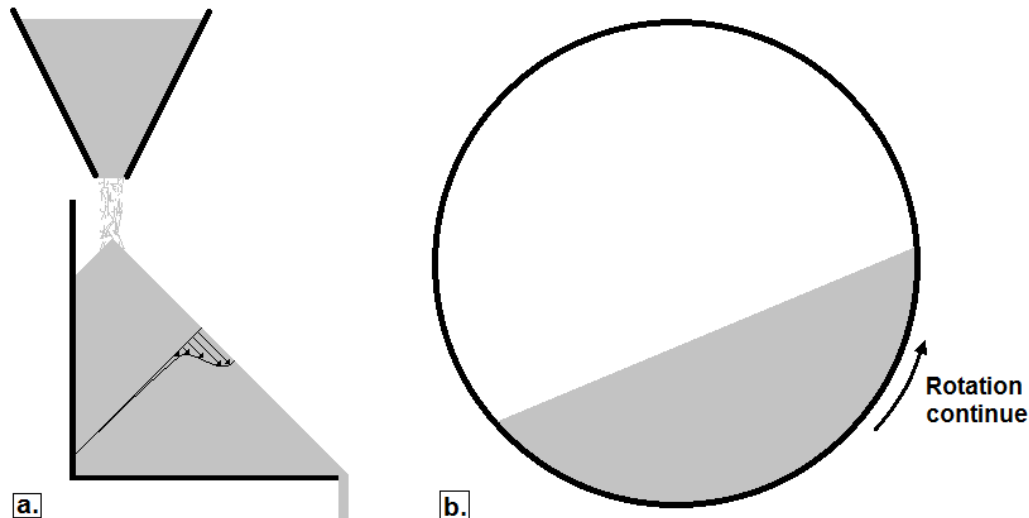


Écoulement sur un tas

-Configurations classiques

Dans beaucoup de situations réelles, les hypothèses de la section précédentes sont mises en défaut parce que la pente n'est pas parfaitement rigide et plane, mais est constituée du même matériau que celui qui s'écoule. On parle d'écoulement « sur un tas ».

Plusieurs méthodes expérimentales permettent de retrouver cette situation, comme par exemple celle du tambour tournant.





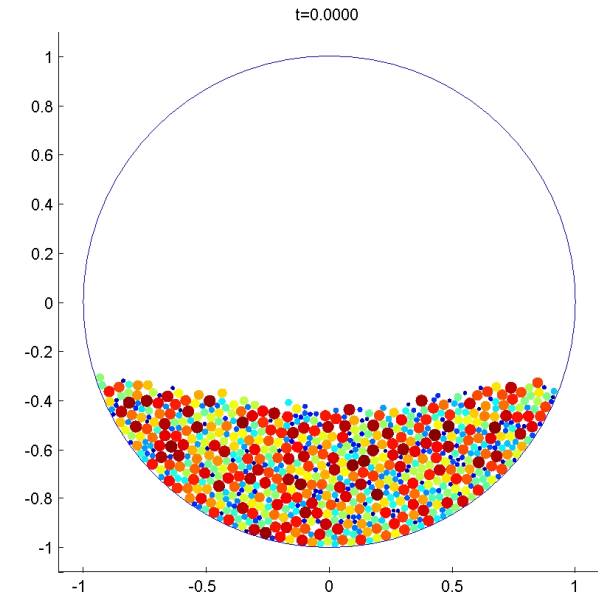
Écoulement sur un tas

-Configurations classiques

Le cas d'un tambour tournant à vitesse lente fait apparaître un nouveau phénomène : l'écoulement n'est pas régulier mais intermittent.

La pente du tas augmente progressivement sans rupture jusqu'à un maximum noté θ_s , puis l'instabilité se produit. Une avalanche se déclenche et laisse en place une nouvelle surface libre avec une inclinaison θ_r nommée « angle de repos ».

L'avalanche qui se déclenche n'implique qu'une couche assez fine de matériau, avec une ligne de glissement assez nette. Elle reproduit donc le schéma d'un écoulement sur pente, à la différence près que la ligne de glissement est inconnue a priori.

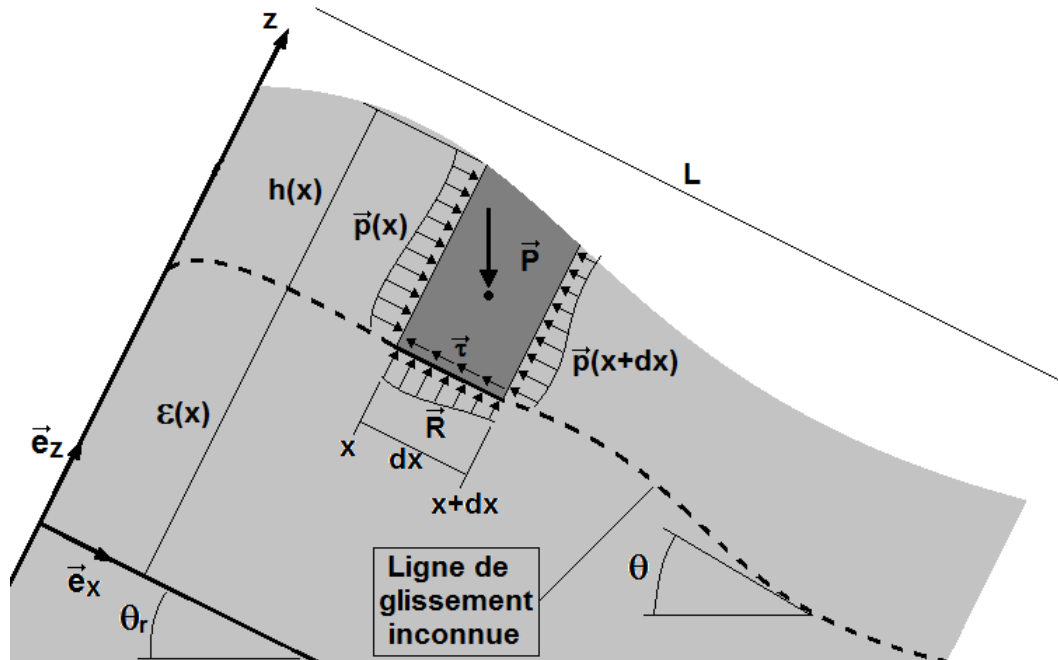




Écoulement sur un tas

- Configurations classiques
- Résolution analytique

Par comparaison avec l'écoulement sur une pente, la résolution analytique de cette nouvelle configuration implique donc l'ajout d'une inconnue : la position $\varepsilon(x, t)$ de la ligne de glissement à chaque abscisse et à chaque instant.





Ecoulement sur un tas

-Configurations classiques

-Résolution analytique

Pour déterminer les trois inconnues $h(x, t)$, $\bar{u}(x, t)$, et $\varepsilon(x, t)$, on ne peut donc pas se contenter des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \alpha \frac{\partial(h\bar{u}^2)}{\partial x} \right) = \rho g h \cdot \cos \theta \left(\tan \theta - \frac{\tau}{\rho g h \cdot \cos \theta} - k \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

Il nous faut une troisième équation, dite « de comportement », qui permette de prédire la position de la ligne de glissement. De nombreuses équations ont été proposées. Celle qui est le plus souvent utilisée repose sur les angles d'avalanche et de repos :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\beta(\theta - \theta_r)$$

Par conséquent, la prédiction de l'écoulement granulaire sur un tas repose sur des considérations encore plus arbitraires que celle de l'écoulement sur une pente.



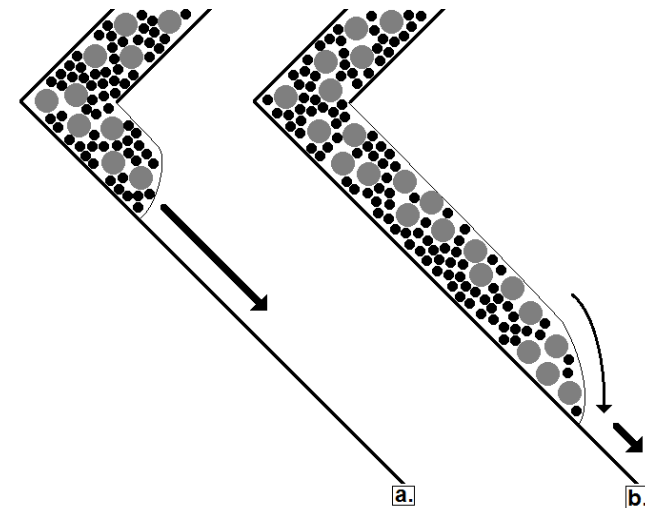
Ségrégation en écoulement

Le problème de la ségrégation se rencontre dès que l'on manipule des mélanges de grains de propriétés différentes. La ségrégation est l'opération exactement inverse à celle de mélangeage : c'est la tendance des matériaux granulaires à la séparation spontanée entre plusieurs phases homogènes.

Si on considère un mélange homogénéisé de petits et de gros grains que l'on fait s'écouler sur un plan incliné rugueux, on observe que les gros grains remontent spontanément sur le dessus de l'écoulement. Par effet de « tapis roulant », ils atteignent ensuite l'avant de l'avalanche, où ils se concentrent progressivement.

On suppose que ce mécanisme se déroule de la manière suivante :

- les grains bougent, des trous se forment entre eux.
- les gros grains peuvent seulement tomber dans les gros trous.
- les petits grains peuvent tomber dans les petits et les gros trous.
- du fait de cette asymétrie cinématique, les petits grains ont tendance à se diriger naturellement vers le bas
- ils font donc remonter les gros grains



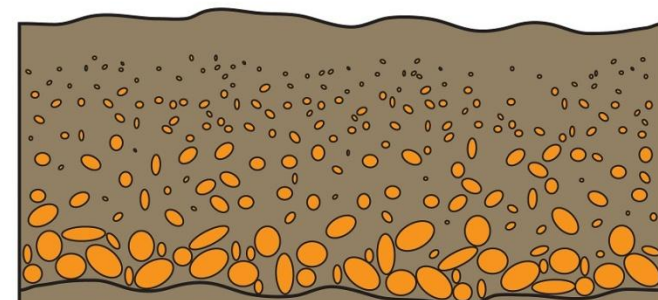
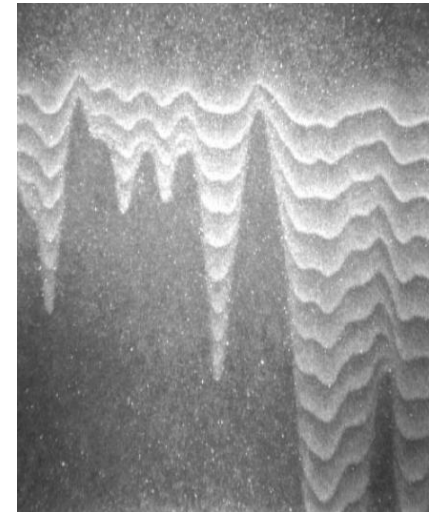


Ségrégation en écoulement

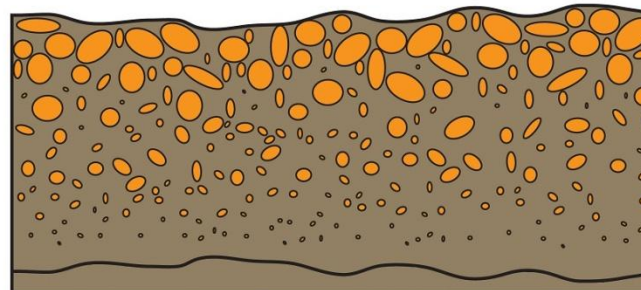
Dans l'industrie, on estime que le coût mondial annuel de la ségrégation (de tous types, pas seulement en écoulement) atteint environ 20 milliards de dollars. Ces coûts sont liés à des mélanges de mauvaises qualités ou à des dysfonctionnements de procédés industriels.

En géophysique, la concentration de grosses particules à l'avant des fronts d'avalanches est à l'origine de phénomènes de « digitations » : les gros grains forment des murs latéraux à l'écoulement et canalisent les petits grains, augmentant ainsi leurs distances de propagations.

Par ailleurs, les géologues utilisent la gradation des tailles dans un dépôt sédimentaire pour déterminer le procédé de déposition et donc l'histoire géologique du site.



Déposition marine ou fluviale



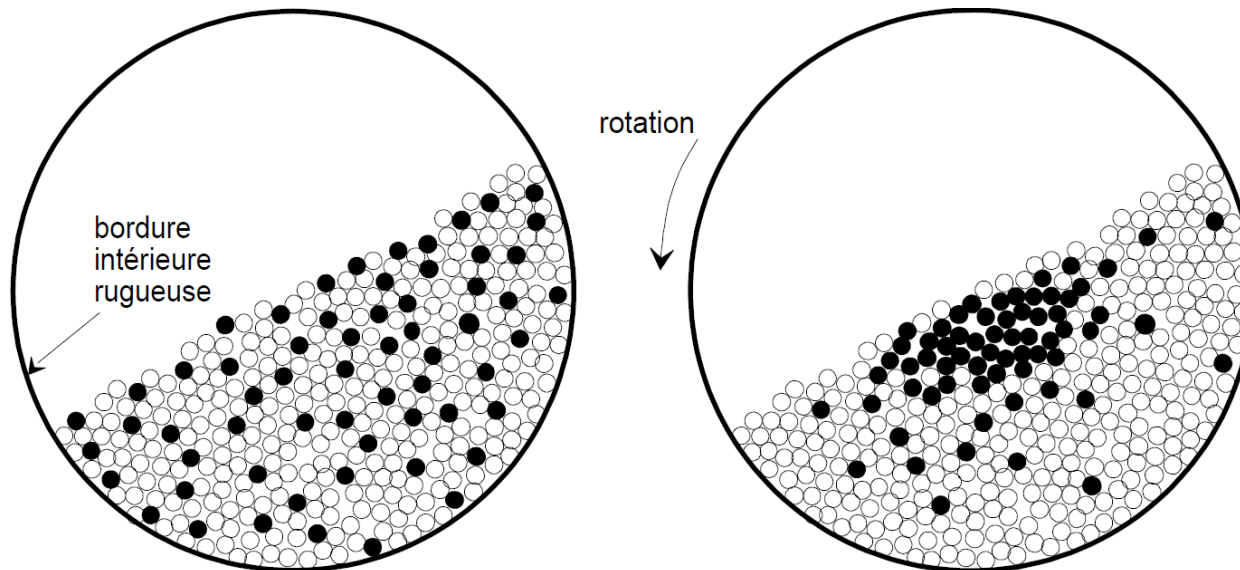
Déposition par écoulement granulaire



Ségrégation en écoulement

La ségrégation en tambour est le phénomène qui voit les particules les plus grosses ou les plus denses se regrouper au centre du tambour, là où les mouvements sont moindres.

Il s'agit cette fois d'un effet inertiel : les zones périphériques connaissent plus d'agitation granulaire (du fait des rugosités du tambour et des avalanches successives en surface), et les particules de petite taille ou de faible densité y sont plus facilement entraînées que les particules les plus inertes.





Écoulement en silo

-Principes

L'écoulement granulaire le plus répandu dans les applications industrielles est l'écoulement en silo convergent. Il sert à canaliser une grande quantité de matériau vers une cible de petite taille.

Cet écoulement est omniprésent dans les industries minière, cimentière, agroalimentaire, chimique, pharmaceutique, etc.

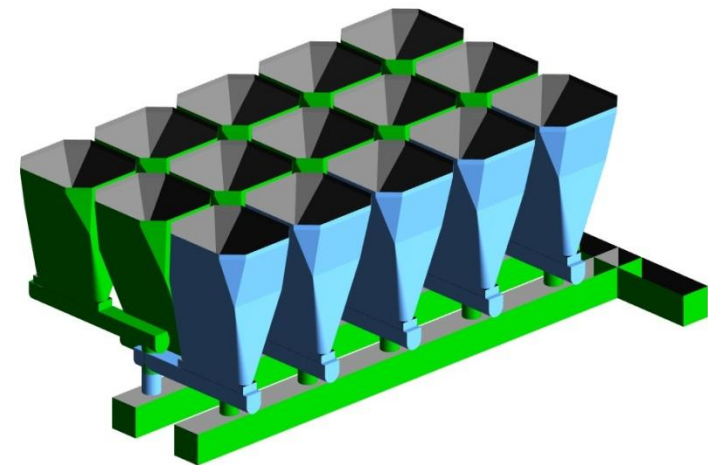


Trois problématiques essentielles se détachent :

-Quel est le débit d'écoulement à travers un silo donné ?

-Quel est le risque de blocage de l'écoulement ?

-Quelles sont les causes et conséquences des fluctuations de ce type d'écoulement ?





Écoulement en silo

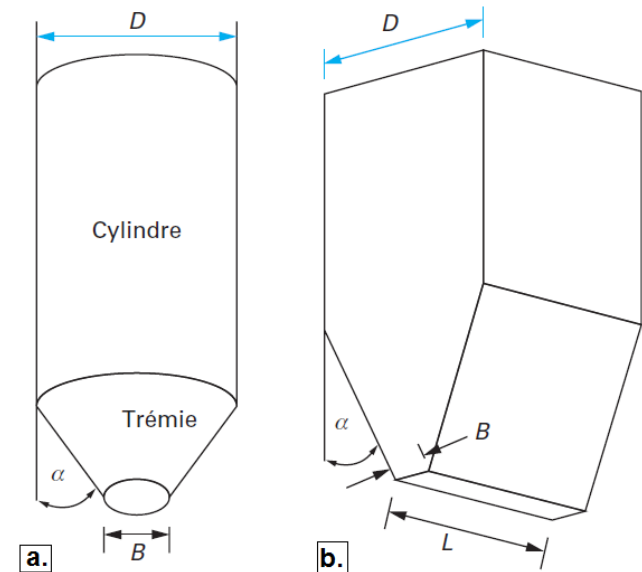
-Principes

Sur le plan technologique, un silo est un système d'une grande simplicité. Il contient un réservoir prismatique (servant au stockage), surmontant une trémie convergente, de forme conique, pyramidale, etc.

L'écoulement est essentiellement contrôlé par la forme et la taille de l'orifice de sortie, et l'inclinaison de la partie convergente.

Grâce à la théorie de Janssen, on sait que la hauteur de matériau dans le silo n'influence pas le débit d'écoulement, qui est constant pour un silo et un matériau donné.

Cette constatation est liée à la présence de voûtes qui redistribuent une majorité des charges vers les parois et limitent considérablement la contrainte au niveau de l'orifice.





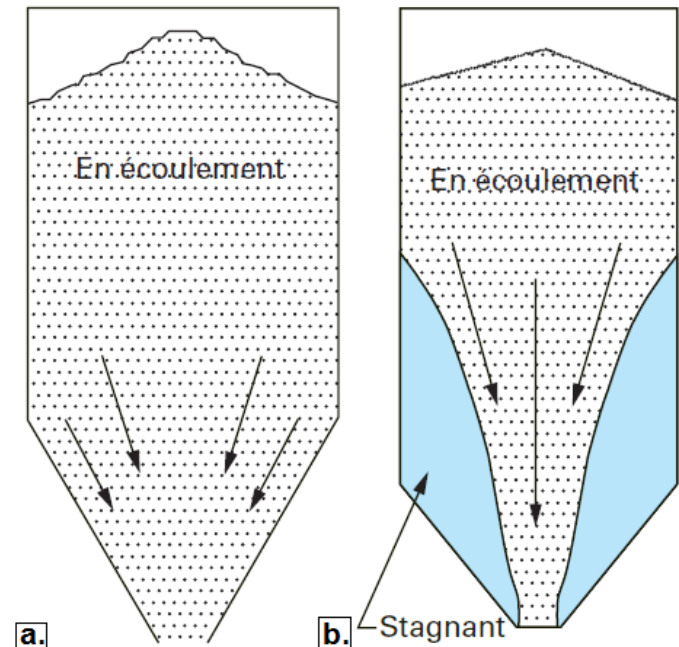
Écoulement en silo

-Principes

Deux cas limites d'écoulement peuvent se produire, en fonction de l'angle d'ouverture du silo, de son état de surface interne, et des propriétés du matériau granulaire en écoulement (en particulier sa cohésion) :

-L'écoulement en masse, pour lequel l'ensemble du matériau est en mouvement vers le bas. Il se produit pour des parois raides et lisses, et pour des matériaux peu frottants et peu cohésifs. Elle présente l'avantage d'un temps de stockage constant. C'est généralement le comportement souhaité.

-L'écoulement en cheminée, pour lequel seule une conduite verticale de matériau est en mouvement. Il présente l'inconvénient d'introduire des écarts considérables sur les temps de stockages, mais il offre une moindre usure des parois intérieures.





Écoulement en silo

-Principes

-Débits d'écoulements

Pour calculer le débit d'écoulement d'un silo, on utilise des lois semi-empiriques, fondées sur des résultats expérimentaux et des approches dimensionnelles. Par exemple, pour un matériau pulvérulent dans un silo à fond plat et à ouverture circulaire, on peut utiliser la formule de Beverloo :

$$\dot{M} = 0.58 \rho_b \cdot \sqrt{g} \cdot (D - k \cdot d)^{2.5}$$

Pour un silo conique, la formule est étendue :

$$\dot{M} = \pi \frac{1 - (\cos \alpha)^{1.5}}{6 \times (\sin \alpha)^{2.5}} \rho_b \cdot \sqrt{g} \cdot (D - k \cdot d)^{2.5}$$

Ces formules sont utiles mais doivent être prises avec précautions. On constate par exemple qu'elles ne font apparaître aucune propriété mécanique du matériau granulaire lui-même, (granulométrie, angle de frottement interne, etc.).

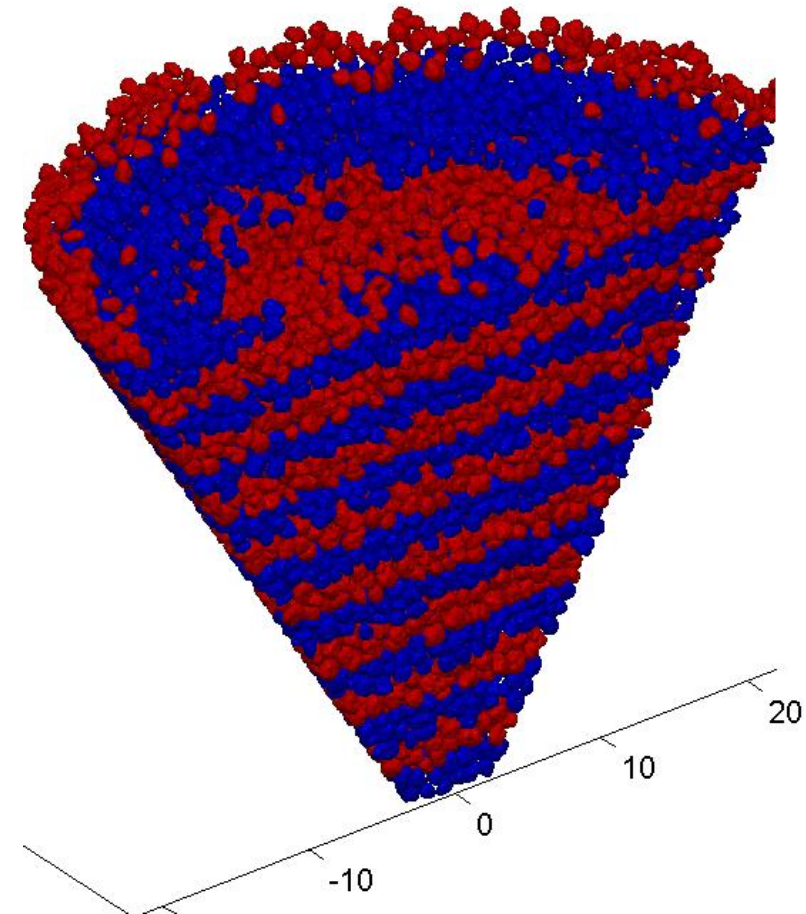


Écoulement en silo

- Principes
- Débits d'écoulements
- Fluctuations et blocage

Une caractéristique étonnante de l'écoulement en trémie convergente est la présence de fluctuations de hautes fréquences dans le champ de vitesse.

Ces fluctuations introduisent des vibrations dans la matière granulaire et l'ensemble du silo, qui peuvent parfois avoir de graves conséquences structurelles.

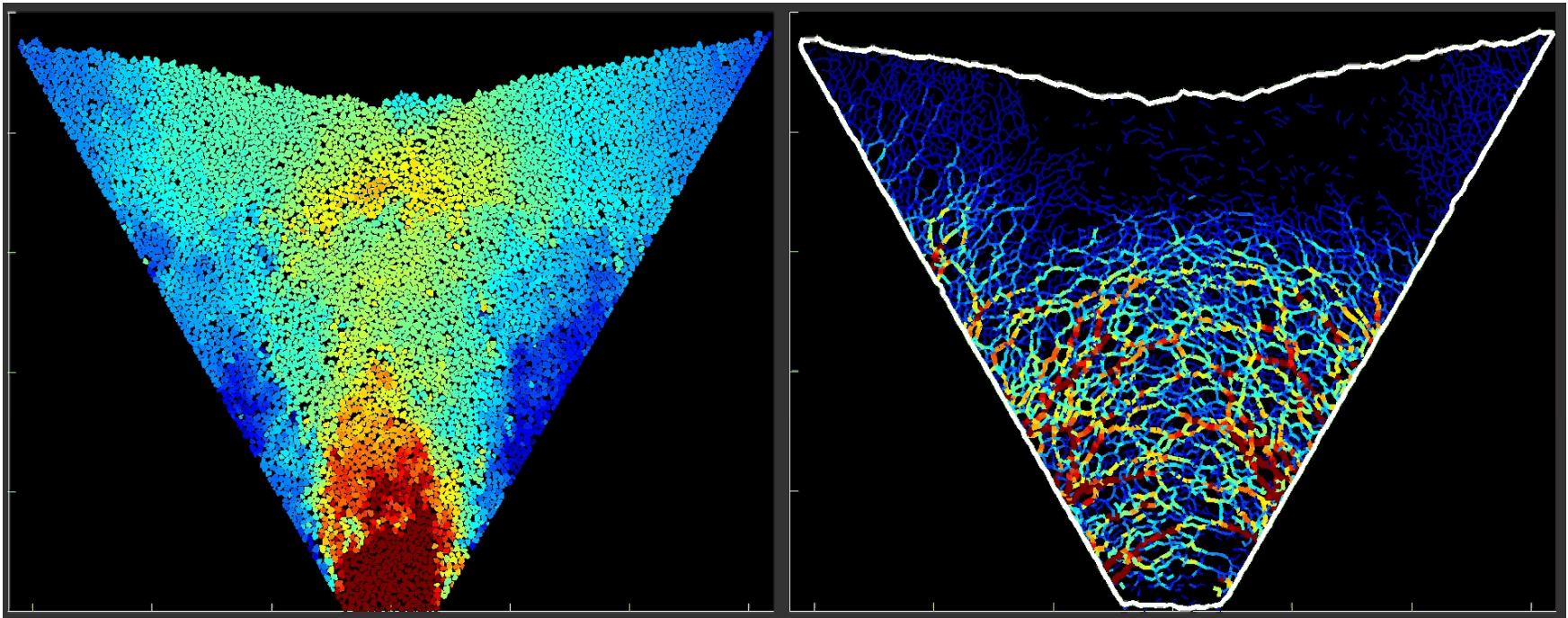




Ecoulement en silo

- Principes
- Débits d'écoulements
- Fluctuations et blocage

Ces fluctuations sont liées à un réseau intermittent de chaînes de forces formant des voûtes en travers du silo, qui pilotent le débit d'écoulement



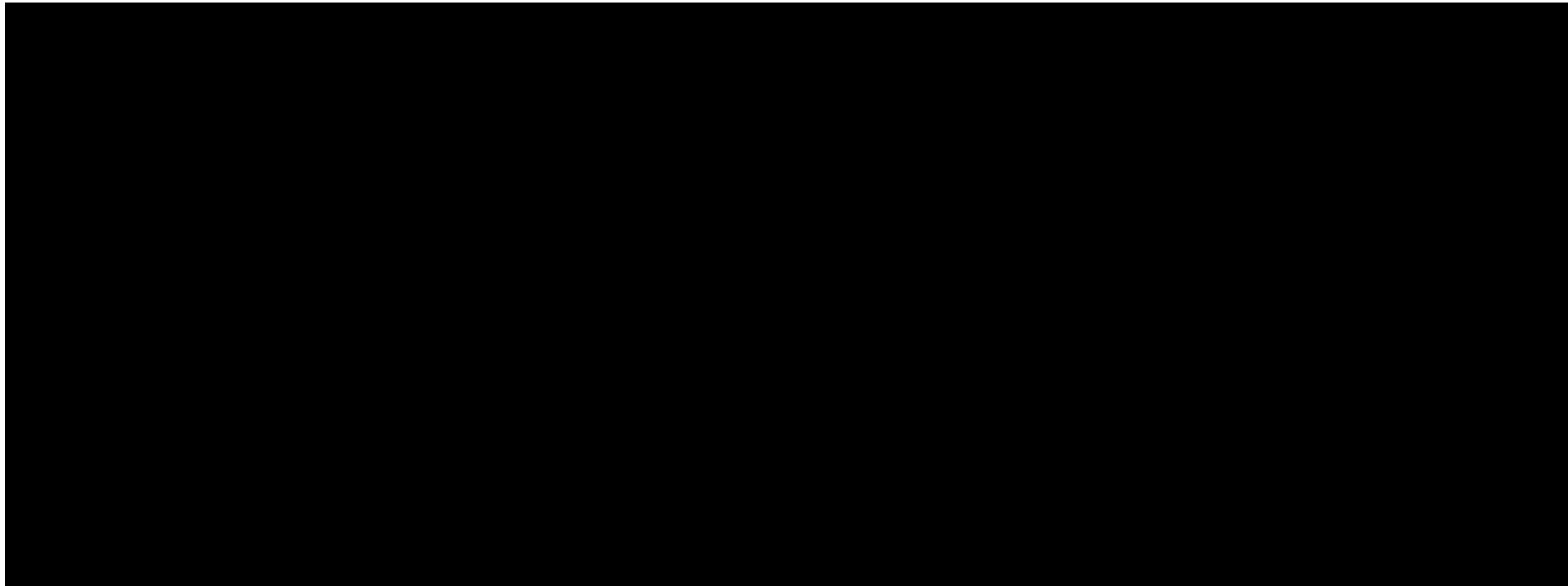


Écoulement en silo

- Principes
- Débits d'écoulements
- Fluctuations et blocage

Si l'ouverture de sortie est d'une dimension trop faible (typiquement, inférieure à 8 diamètres moyens des particules), ces voûtes peuvent conduire à un blocage de l'écoulement.

Duke University





Mécanique des matériaux granulaires

Ecoulements collisionnels



Analogie avec un gaz

-Exemples

Lorsque l'écoulement est très énergétique (s'il a une vitesse initiale très élevée, ou si il se déroule sur une pente très raide), on ne parle plus d'écoulement dense mais d'écoulement collisionnel.

C'est par exemple cas des écoulements aérosols (avalanches, nuées ardentes, etc.)



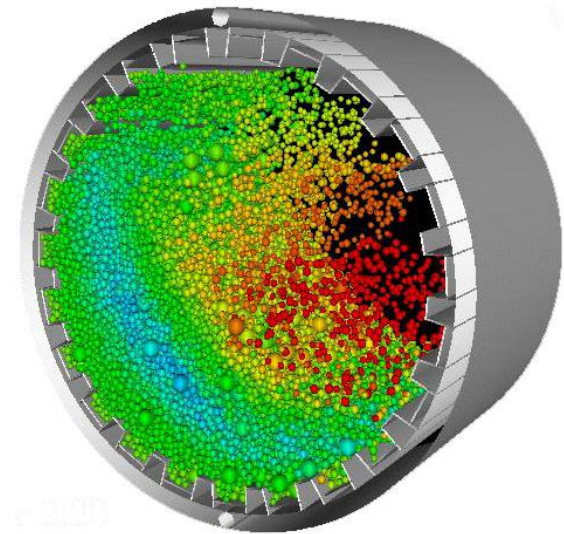
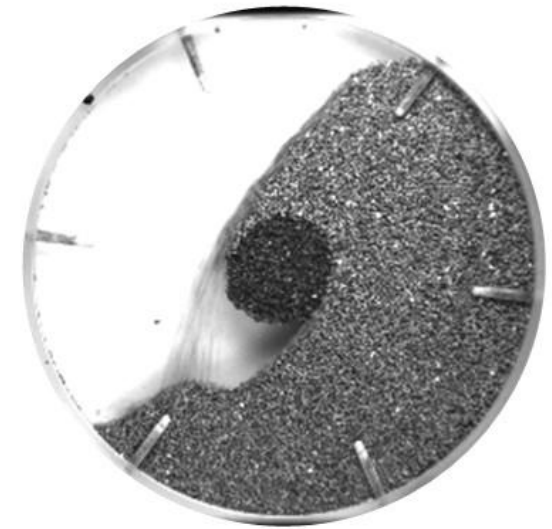


Analogie avec un gaz

-Exemples

On rencontre également ce type d'écoulement dans de nombreuses applications industrielles.

La situation collisionnelle est par exemple recherchée dans des situations de mélangeage dynamique (malaxage, moulinage, etc.).

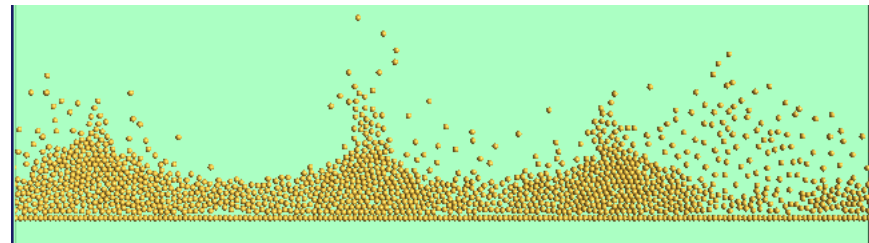
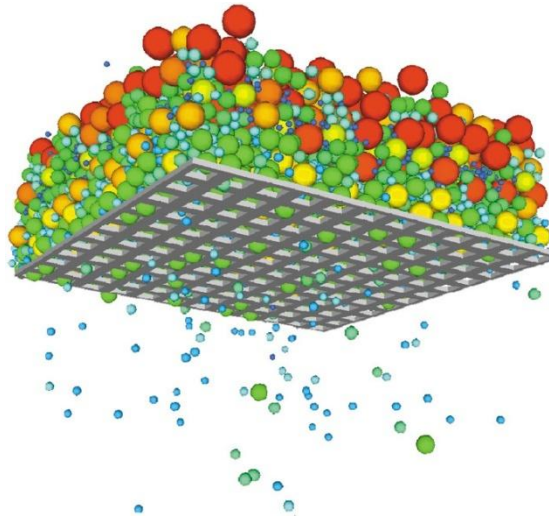




Analogie avec un gaz

-Exemples

Le comportement collisionnel est également présent en l'absence d'écoulement, lorsque le matériau granulaire est soumis à des vibrations (convoyeur vibrant, tamisage, etc.).





Analogie avec un gaz

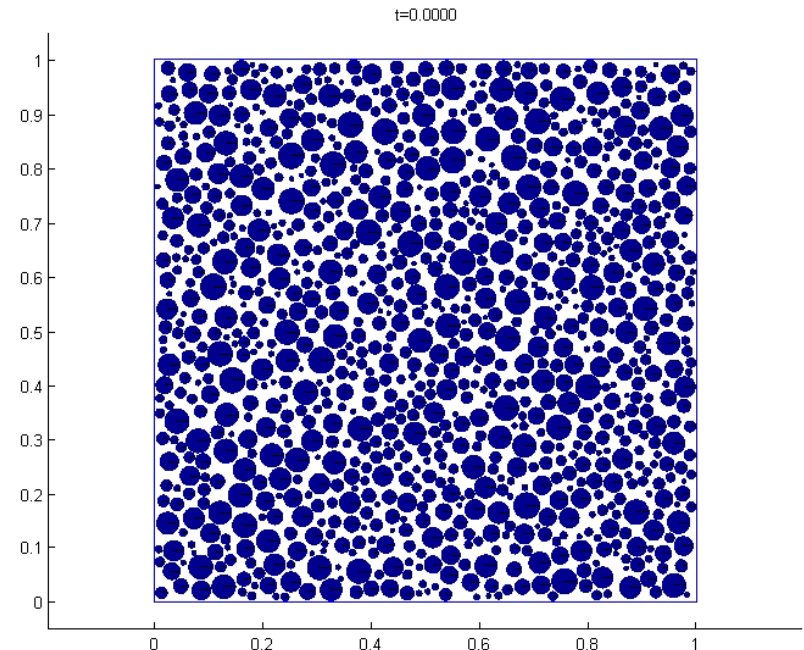
-Exemples

-Grandeurs thermodynamiques

Pour définir de manière rigoureuse la situation collisionnelle, on se réfère à la durée moyenne des contacts : un milieu granulaire est collisionnel si aucun contact n'est persistant, et si la « vie » de chaque grain peut se résumer comme une succession de chocs binaires et de vols balistiques.

Chaque collision étant dissipative (contrairement à un matériau gazeux conventionnel), cet état ne peut persister que si on injecte en permanence de l'énergie au système pour compenser ses pertes.

Dans le cas contraire, le système évoluera naturellement vers un état plus apaisé (écoulement dense ou situation quasi-statique).





Analogie avec un gaz

-Exemples

-Grandeurs thermodynamiques

Pour pousser l'analogie plus loin, on utilise souvent une grandeur d'inspiration thermodynamique appelée « température granulaire ».

Elle se définit comme la moyenne du carré de la fluctuation de vitesse. Cette fluctuation $\vec{q}$ est définie pour chaque particule comme l'écart à la moyenne locale des vecteurs vitesses : on « soustrait » donc au vecteur vitesse de chaque particule la moyenne des vecteurs vitesses des N particules voisines.

La température granulaire est donc une mesure de l'agitation du milieu :

$$T = \langle \vec{q}^2 \rangle$$

Par extension, on peut définir des notions de diffusion et de conductivité « thermiques », liées à la transmission spatiale de cette agitation.

On peut définir d'une manière analogue la notion de pression, et écrire des équations constitutives s'inspirant de la théorie des gaz.



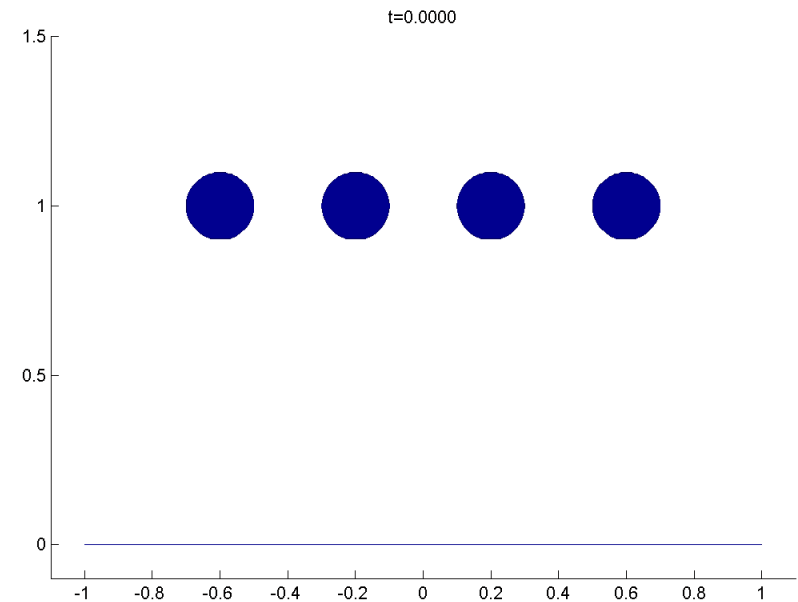
Analogie avec un gaz

- Exemples
- Grandeurs thermodynamiques
- Coefficient de restitution

Dans un gaz granulaire, la dissipation se produisant à chaque collision est souvent modélisé par une grandeur unique appelée coefficient de restitution, notée e .

Si on suppose le choc purement normal d'une particule avec une paroi parfaitement rigide, on définit expérimentalement le coefficient de restitution par le rapport de la vitesse restituée à la vitesse incidente :

$$e = \frac{V_r}{V_i}$$





Analogie avec un gaz

-Exemples

-Grandeurs thermodynamiques

-Coefficient de restitution

Si on considère le cas de deux sphères en collision parfaitement normale (i.e. vecteurs vitesse parfaitement alignés avec la droite liant les centres), on a deux équations constitutives :

-La conservation de la quantité de mouvement :

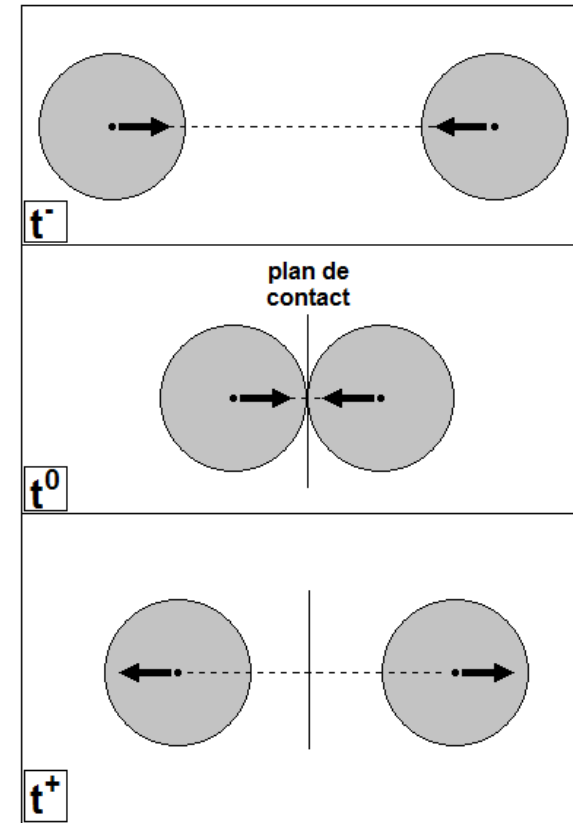
$$m_1 \cdot v_{i1} + m_2 \cdot v_{i2} = m_1 \cdot v_{r1} + m_2 \cdot v_{r2}$$

-La définition du coefficient de restitution :

$$v_{r1} - v_{r2} = -e \cdot (v_{i1} - v_{i2})$$

Il vient la formule suivante, valable pour les vitesses restituées des deux sphères par permutation d'indices :

$$v_{r1} = v_{i1} + \left(\frac{1 + e}{1 + m_1/m_2} \right) (v_{i1} - v_{i2})$$





Analogie avec un gaz

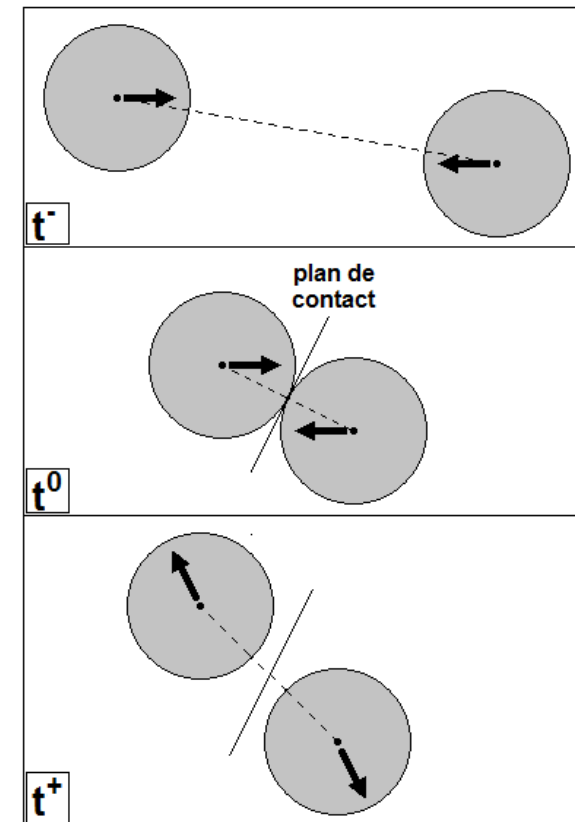
- Exemples
- Grandeurs thermodynamiques
- Coefficient de restitution

Cette théorie s'étend également au cas des chocs non-frontaux. Dans ce cas, les vitesses incidentes exprimées dans le repère du contact ont une composante normale mais également une composante tangentielle.

La composante normale de la vitesse restituée est calculée par la formule précédente :

$$v_{r1} = v_{i1} + \left(\frac{1 + e}{1 + m_1/m_2} \right) (v_{i1} - v_{i2})$$

La composante tangentielle, en revanche, est considérée non affectée par le choc.





Analogie avec un gaz

-Exemples

-Grandeurs thermodynamiques

-Coefficient de restitution

L'énergie cinétique perdue par les deux particules lors du choc peut se déduire des formules précédentes. Par exemple, dans le cas de deux sphères de même masse, on a :

$$E_r - E_i = -\frac{m}{4}(1 - e^2)(\overrightarrow{v_{i1}} - \overrightarrow{v_{i2}})^2$$

On note deux cas limites :

- $e = 1$ correspond à un choc parfaitement élastique, pour lequel la totalité de l'énergie cinétique est restituée au système.
- $e = 0$ correspond à un choc parfaitement inélastique, pour lequel la totalité de l'énergie cinétique (dans la direction normale au plan de contact) est dissipée lors de la collision.

L'approche par coefficients de restitution permet d'écrire des théories intéressantes, mais est très souvent mise en défaut par l'expérience.



Théorie cinétique des gaz granulaires

-Principes

Plusieurs théories ont été proposées afin de prendre en compte les considérations précédentes (collisions binaires, coefficients de restitution, grandeurs thermodynamiques analogues) pour décrire de manière macroscopique les gaz granulaires. Elles s'appuient en particulier sur les techniques de physique statistique mises en place par Boltzmann.



Ludwig Boltzmann
(1844-1906)

Pour être abordables, ces théories postulent souvent deux hypothèses :

- La densité est constante et proche de la densité maximale du matériau granulaire. En conséquence, le libre parcours moyen des particules est négligeable devant leur diamètre.
- Les contacts sont peu dissipatifs, et le coefficient de restitution n'est pas très éloigné de 1.



Théorie cinétique des gaz granulaires

-Principes

Sous ces hypothèses, on peut écrire des équations de conservation (masse, quantité de mouvement, et énergie) faisant intervenir des grandeurs macroscopiques :

- Vitesse moyenne
- Densité
- Pression
- Température granulaire

Chacune de ces grandeurs est en réalité reliée à des réalités microscopiques sur les trajectoires et les chocs des grains. Le système est généralement fermé par des équations de comportement (reliant ces grandeurs) issues de considérations expérimentales et dimensionnelles.

De ces équations, on peut toujours démontrer que le bilan énergétique du système correspond à l'équilibre de trois termes : le travail des forces visqueuses, le gradient de chaleur (au sens de la température granulaire), et la dissipation collisionnelle. L'état reste donc stable si on injecte suffisamment d'énergie par cisaillement pour compenser les pertes.



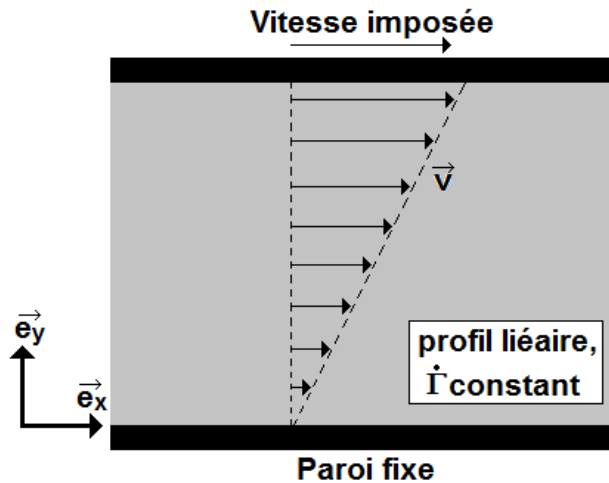
Théorie cinétique des gaz granulaires

-Principes

-L'expérience de Bagnold

Pour étudier les théories cinétiques, on s'intéresse à des situations élémentaires, comme celle du cisaillement simple. Dans cette configuration, un taux de cisaillement $\dot{\Gamma}$ constant est appliqué à un échantillon granulaire, et le champ de vitesse est donc fixé. Il présente un profil linéaire de la forme :

$$\vec{v} = \dot{\Gamma} y \cdot \vec{e}_x$$



On peut alors montrer que la température granulaire (agitation du milieu) suit la loi suivante :

$$T \sim \frac{d^2}{1 - e^2} \dot{\Gamma}^2$$

A partir d'autres observations, on en déduit que, plus le matériau est fortement cisailé, plus sa température, sa pression et sa viscosité augmentent.



Théorie cinétique des gaz granulaires

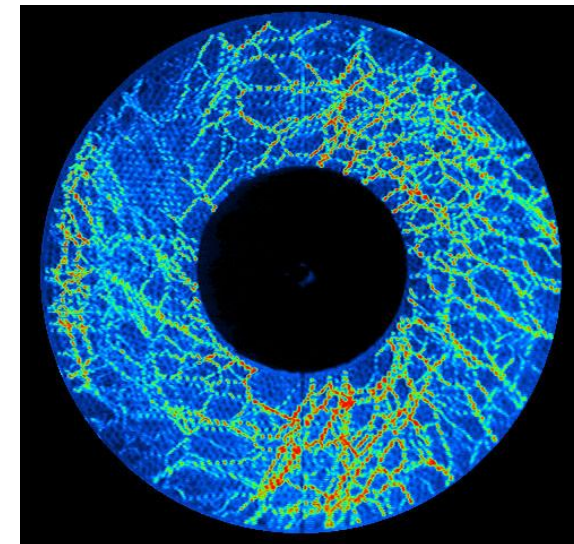
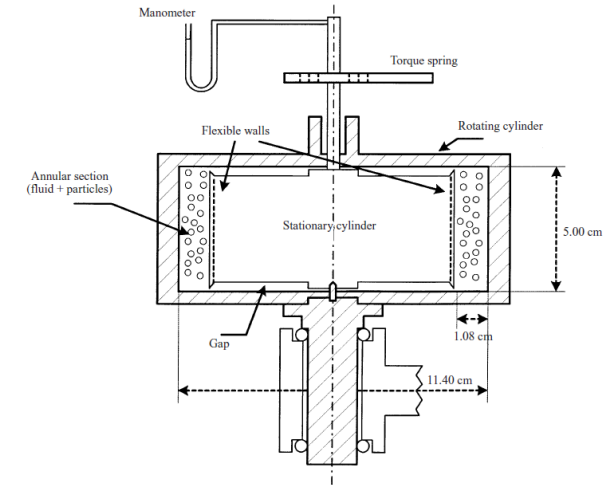
-Principes

-L'expérience de Bagnold

Ces résultats théoriques avaient déjà été énoncés expérimentalement par Bagnold en 1954, au cours d'une série d'essais de cisaillement annulaire en cellule rhéométrique de Couette.

Bagnold s'est intéressé à un milieu granulaire immergé dans un fluide de même densité et de viscosité η_f .

Pour créer le cisaillement on applique une rotation imposée au cylindre intérieur, et pour maintenir le confinement on maintient fixe le cylindre extérieur. Les efforts normaux et tangentiels sont mesurés sur les parois pour en déduire pressions et viscosités





Théorie cinétique des gaz granulaires

-Principes

-L'expérience de Bagnold

L'expérience montre que, selon le taux de cisaillement, le mélange peut avoir deux comportements :

-Pour des cisaillements lents, les forces visqueuses l'emportent. L'écoulement cisailé est de type dense, avec des contacts persistants, et on mesure :

$$P = \text{cste} \quad \tau \sim \eta_f \cdot \dot{\Gamma}$$

-Pour des cisaillements rapides, on entre en régime collisionnel, et les comportements deviennent conformes à la théorie cinétique :

$$P \sim \rho_p d^2 \cdot \dot{\Gamma}^2 \quad \tau \sim \rho_p d^2 \cdot \dot{\Gamma}^2$$

La transition entre les comportements est contrôlée par le nombre de Bagnold : $B_a = \frac{\rho_p d^2 \cdot \Gamma}{\eta_f}$

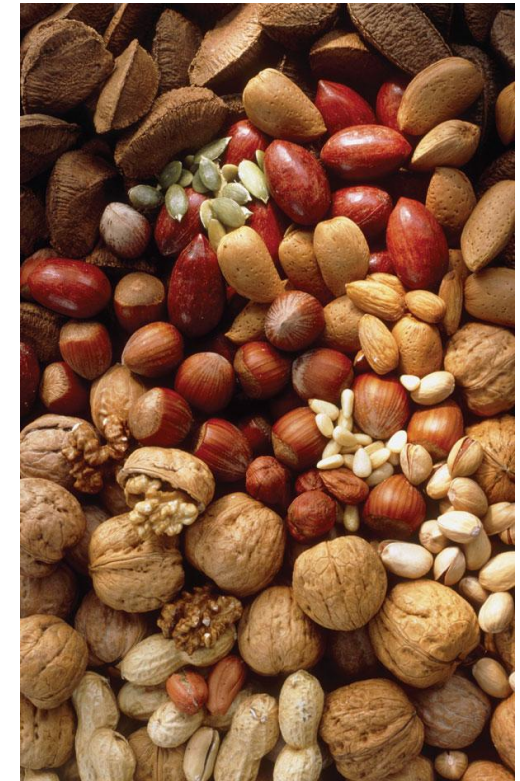
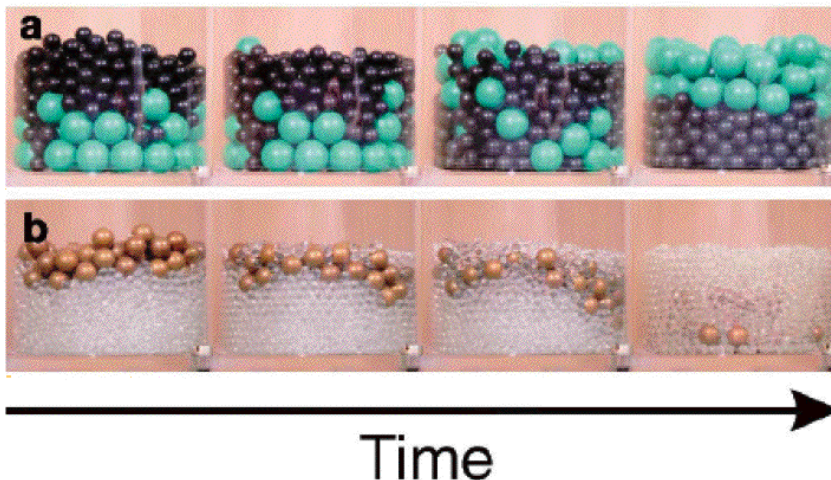
Il s'agit d'un rapport de force entre les contraintes collisionnelles et les contraintes visqueuses. La transition entre les deux états s'effectue aux alentours de $B_a = 40$.



Théorie cinétique des gaz granulaires

- Principes
- L'expérience de Bagnold
- Ségrégation vibratoire

Comme pour les matériaux en écoulements denses, les matériaux en situation collisionnelle sont soumis à des effets de ségrégation par taille et par densité. Dans le cas de matériaux granulaires soumis à vibrations, on parle de « phénomène des noix du Brésil ».



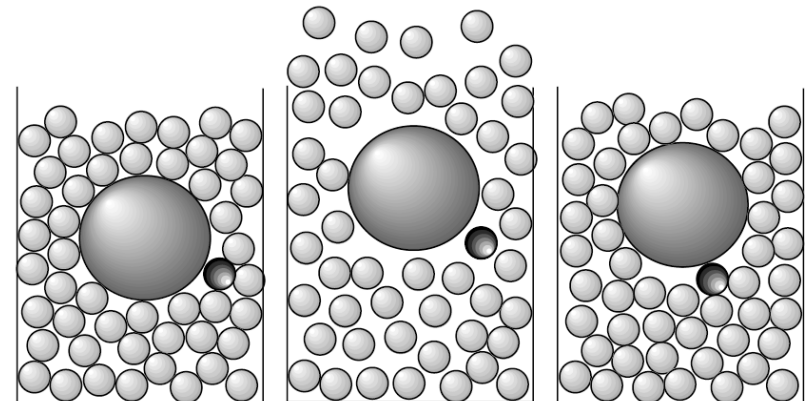
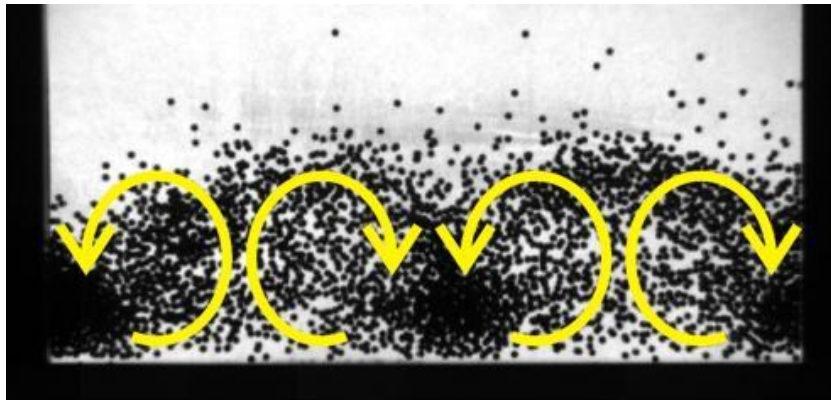


Théorie cinétique des gaz granulaires

- Principes
- L'expérience de Bagnold
- Ségrégation vibratoire

Deux explications principales sont proposées pour expliquer ce phénomène :

- Une percolation des petites particules sous les grosses, à la manière de ce qui se produit en écoulement dense (mais cette proposition échoue à expliquer la ségrégation par densité).
- Des phénomènes de convection granulaire, validées par l'expérience, et liées à la présence des parois du contenant.





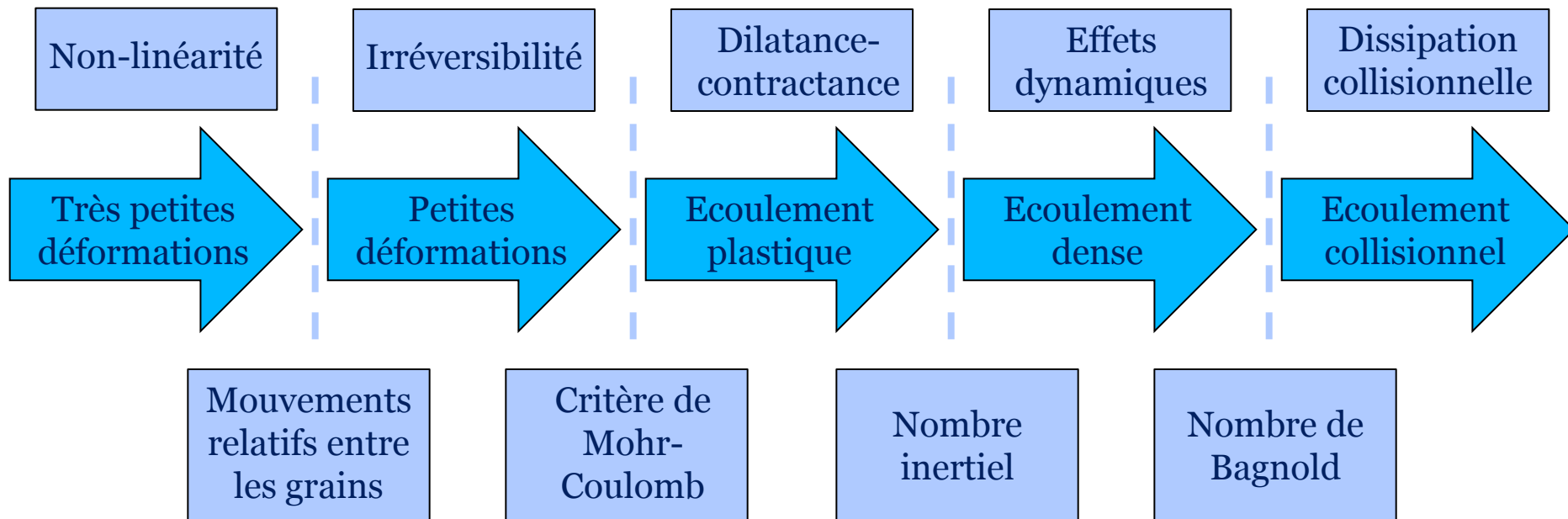
Mécanique des matériaux granulaires

Conclusion



Conclusion

On peut tenter une classification des régimes de comportement mécaniques des milieux granulaires en fonction de leur contenu énergétique. Les transitions entre les régimes sont marquées par des indicateurs (plus ou moins fiables selon les situations), et de nouveaux phénomènes apparaissent à chaque fois que l'on change de régime.





Merci de votre attention

Guilhem MOLLON

4GMD 2014-2015