Problème d'hydrodynamique.

On s'intéresse au réseau hydraulique d'un système de plancher chauffant de bâtiment. Ce système se compose de plusieurs éléments (de haut en bas, voir Figure 1) :

-Un réservoir d'entrée $R1$ dont le niveau est maintenu constant.
-Une conduite d'amenée composée du segment horizontal AB et du segment vertical BD.
-Un serpentin qui sert d'échangeur thermique, coulé dans la dalle de béton composant le plancher que l'on souhaite chauffer. Ce serpentin comporte 10 segments horizontaux de mêmes longueurs.
-Une conduite d'échappement composée du segment vertical FG et du segment horizontal GK.
-Un réservoir de sortie $R2$ dont le niveau est également maintenu constant.

Les conduites d'amenée et d'échappement sont en acier soudé (rugosité $\varepsilon_1 = 0.05mm$) et ont un diamètre $D_1 = 0.1m$. Les conduites composant l'échangeur thermique (serpentin horizontal) sont en acier laminé (rugosité $\varepsilon_2 = 0.1mm$) et ont un diamètre $D_2 = 0.05m$.

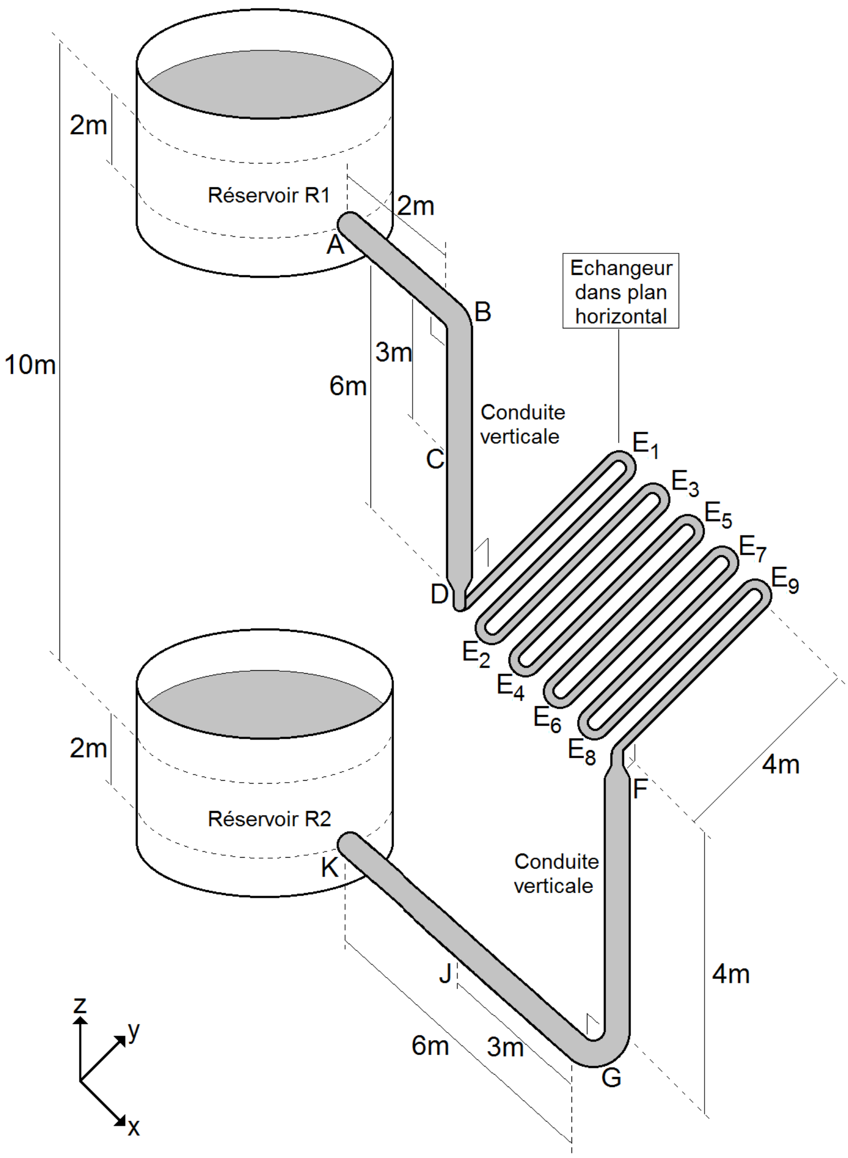


Figure 1 : Système hydraulique de plancher chauffant.

Partie 1 : Ecoulement gravitaire d'un fluide parfait.

Dans cette première partie on considère que le fluide est dénué de viscosité, et qu'il s'écoule à un débit constant $Q = 5\ l/s\ = 0.005\ m^3/s$ sous l'effet de la gravité, du réservoir R_1 vers le réservoir R_2.

- **En utilisant le théorème de Bernoulli, calculer les vitesses et pressions de fluide au point $\boldsymbol{C}$ (milieu du segment $\boldsymbol{BD}$) et au point $\boldsymbol{J}$ (milieu du segment $\boldsymbol{GK}$).**

Partie 2 : Ecoulement gravitaire d'un fluide réel.

On considère maintenant que le fluide en écoulement est de l'eau, qu'il suit un comportement de fluide newtonien, et que sa viscosité vaut $\mu = 0.001\ Kg/(m \cdot s)$. On supposera dans la suite de l'exercice que les seules pertes de charges notable ont lieu dans l'échangeur (c'est-à-dire entre D et F). On rappelle que le coefficient de perte de charge singulière pour un coude à 180° vaut $k = 1.5$. On fournit également le diagramme de Moody sur la Figure 2.

- **Calculer les pertes de charges linéaires et singulières pour un débit d'écoulement $\boldsymbol{Q = 0.005\ m^3/s}$.**

- **Renouveler l'opération pour plusieurs valeurs de débit allant de $\boldsymbol{Q = 0.004\ m^3/s}$ à $\boldsymbol{Q = 0.006\ m^3/s}$, et tracer la courbe de fonctionnement du réseau sur la Figure 3 (cette figure est à rendre avec la copie). Par une méthode graphique, en déduire que le débit correspondant à l'écoulement permanent vaut $\boldsymbol{Q = 4.65\ l/s}$.**

Partie 3: Ecoulement en pompage d'un fluide réel

On considère maintenant que le fluide s'écoule dans le sens inverse, c'est-à-dire du réservoir R_2 vers le réservoir R_1. Pour obtenir cet écoulement, on souhaite mettre en place une pompe au point J. Cette pompe doit fournir une énergie au fluide de manière à obtenir le même débit $Q = 4.65\ l/s$ que pour l'écoulement gravitaire (mais dans l'autre sens). On dispose d'un catalogue constructeur donnant les courbes caractéristiques (Figure 4) et les courbes de rendement (Figure 5) de cinq pompes différentes, nommées pompe 1 à pompe 5.

- **Expliquer pourquoi il n'est pas nécessaire de recommencer les calculs de perte de charge pour répondre aux questions suivantes.**

- **Tracer la courbe de demande en charge du réseau sur la Figure 4 (cette figure est à rendre avec la copie). En déduire quelles sont les deux pompes permettant d'obtenir le débit recherché.**

- **A partir de la Figure 5, estimer le rendement énergétique (pour le débit de régime permanent) de chacune des deux pompes candidates, et évaluer finalement quelle pompe serait le meilleur choix de conception.**

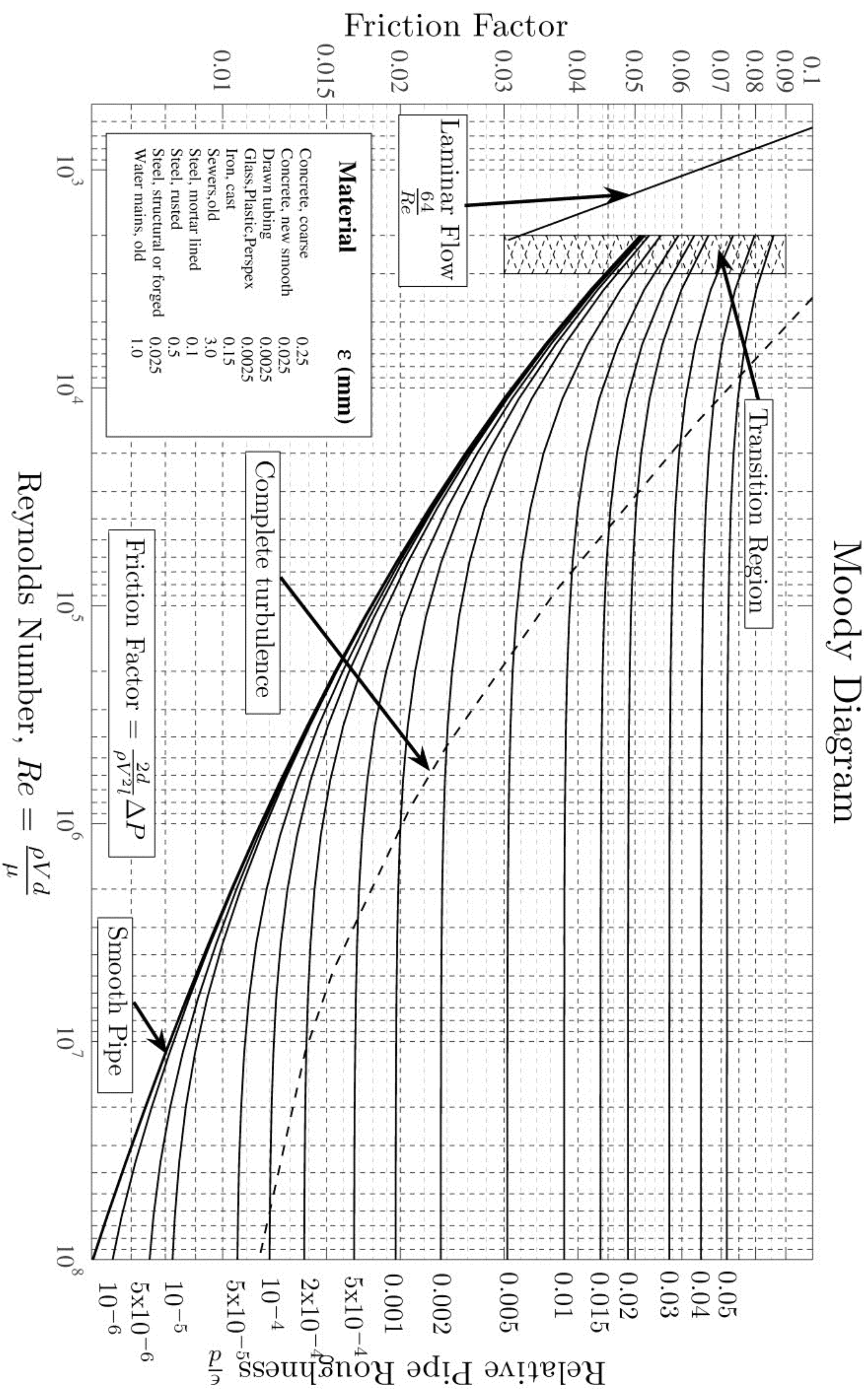


Figure 2. Diagramme de Moody

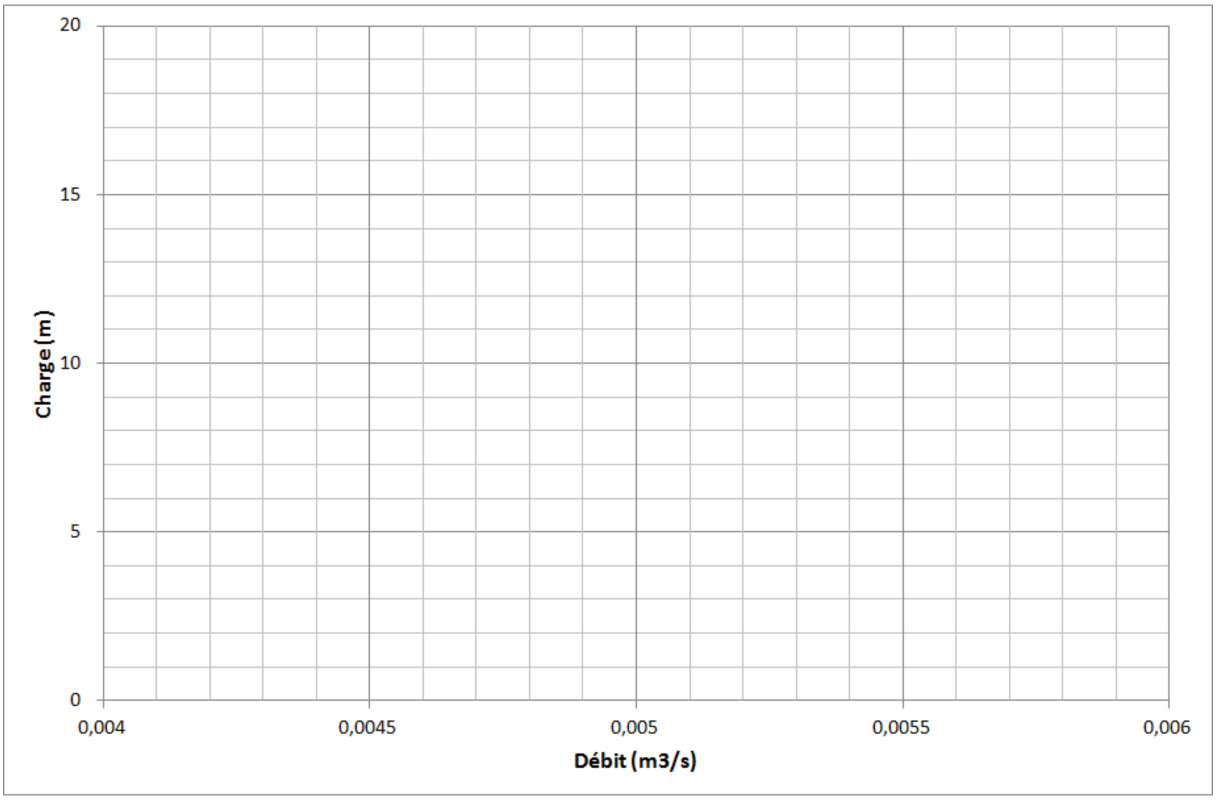


Figure 3. Tracer ici la courbe caractéristique du réseau en écoulement gravitaire

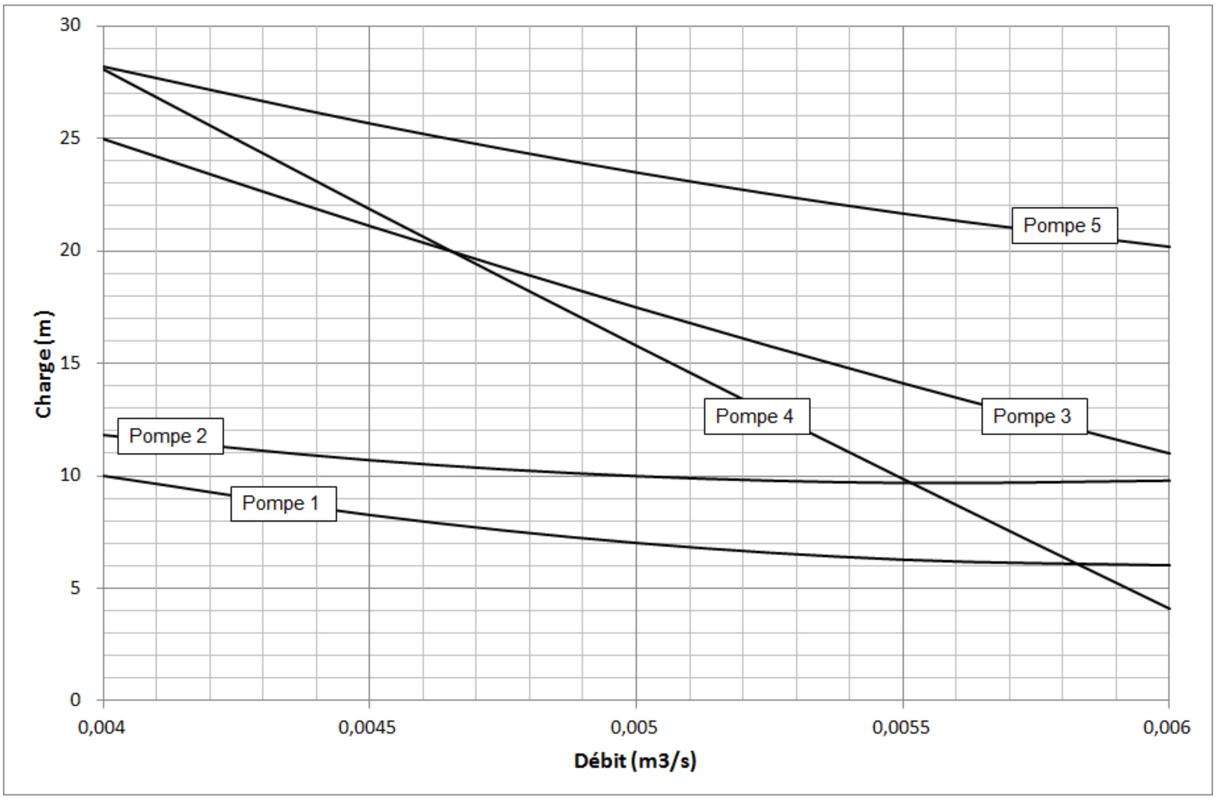


Figure 4. Courbes caractéristiques des cinq pompes (Tracer ici la courbe de demande en charge du réseau)

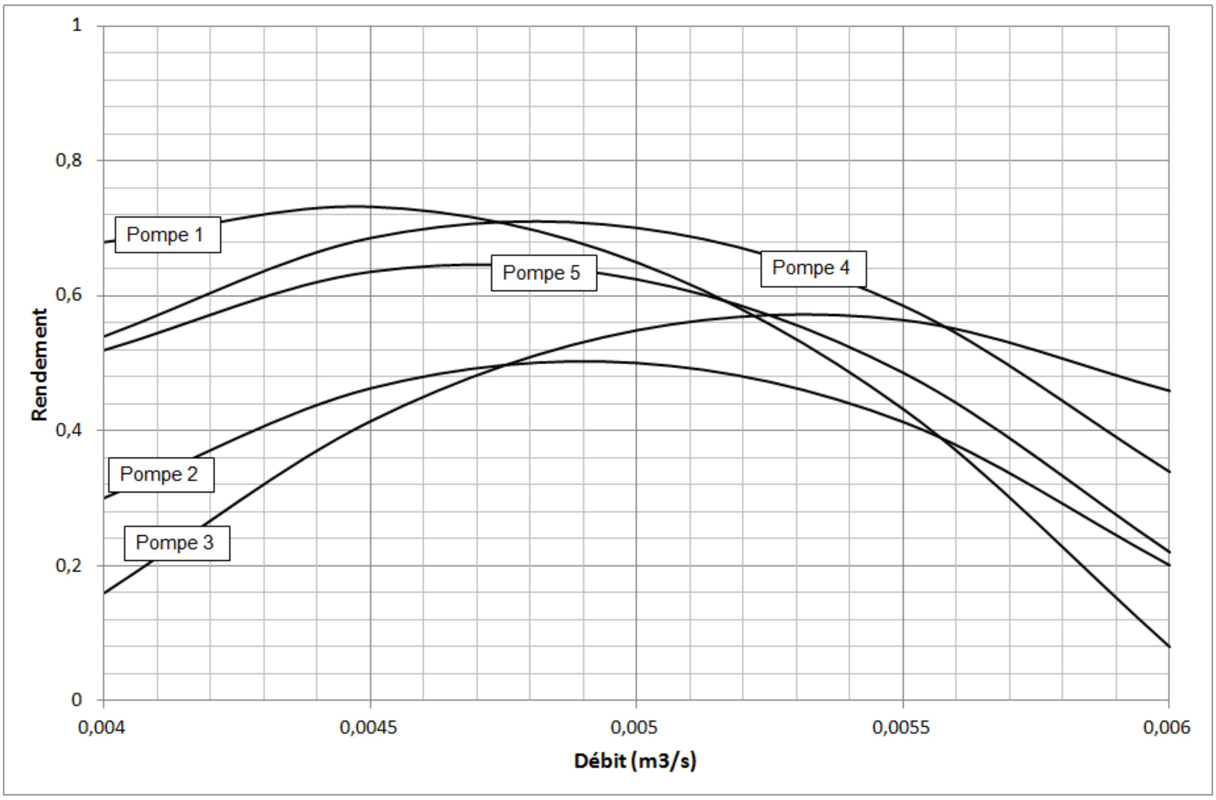


Figure 5.Courbes de rendement des cinq pompes

Corrigé

Partie 1.

On utilise comme point de référence le niveau de l'eau dans le réservoir supérieur, supposé constant. En ce point, la vitesse est nulle ainsi que la pression relative. En ce point de référence, on a donc $z_{ref} = 0$, $V_{ref} = 0$ et $P_{ref} = 0$. On s'intéresse d'abord au point C. Sa hauteur est $z_C = -5m$ par rapport à la hauteur de référence. Pour calculer la vitesse du fluide, on utilise le débit et la section S_C de la conduite :

$$V_C = \frac{Q}{S_C} = \frac{Q}{\pi D_1^2/4} = \frac{0.005}{\pi \cdot 0.1^2/4} = 0.63\, m \cdot s^{-1}$$

Pour calculer la pression, on utilise la formule de Bernoulli (exprimée en pressions) entre le point de référence et le point C :

$$P_C + \rho \frac{V_C^2}{2} + \rho g z_C = P_{ref} + \rho \frac{V_{ref}^2}{2} + \rho g z_{ref}$$

et donc :

$$P_C = P_{ref} + \rho \frac{V_{ref}^2}{2} - \rho \frac{V_C^2}{2} + \rho g z_{ref} - \rho g z_C$$

$$P_C = 0 + 1000 \frac{0^2}{2} - 1000 \frac{0.63^2}{2} + 1000 \cdot 9.81 \cdot 0 - 1000 \cdot 9.81 \cdot (-5) = 49.5\, kPa$$

On fait les mêmes opérations pour le point J. La cote de J est $z_J = -12m$, et on a $V_J = V_C$ car les débits et les sections sont identiques. On applique ensuite Bernoulli entre le point de référence et le point J :

$$P_J = P_{ref} + \rho \frac{V_{ref}^2}{2} - \rho \frac{V_J^2}{2} + \rho g z_{ref} - \rho g z_J$$

$$P_J = 0 + 1000 \frac{0^2}{2} - 1000 \frac{0.63^2}{2} + 1000 \cdot 9.81 \cdot 0 - 1000 \cdot 9.81 \cdot (-12) = 119.5\, kPa$$

NB : Il y avait une méthode alternative pour ces calculs, qui consistait à prendre comme référence le niveau de l'eau dans le réservoir inférieur. Cette méthode (dans laquelle les formules précédentes sont directement transposables) donne des valeurs différentes des pressions en C et en J, valeurs qui étaient néanmoins acceptées comme justes dans la correction. La raison de ce paradoxe a été expliquée en cours : pour un fluide parfait, il est impossible de définir un régime permanent à charge constante (la charge est ici imposée comme étant la différence de niveau entre les deux réservoirs). Par conséquent, le débit supposé dans l'énoncé n'est pas un débit permanent mais un débit transitoire, et Bernoulli n'est pas applicable rigoureusement. C'est la raison pour laquelle on introduit une viscosité dans les questions suivantes. Ces subtilités n'étaient pas prises en compte dans la correction et la notation.

Partie 2.

On suppose un débit imposé de 5l/s. D'après l'énoncé, les seules pertes de charges considérées sont celles liées à l'échangeur. Elles sont donc de deux types :

-Pertes de charge singulières dans les 9 coudes à 180 degrés

-Pertes de charge linéaires dans les 10 segments de 4m chacun.

On calcule d'abord la vitesse du fluide dans l'échangeur :

$$V_{ech} = \frac{Q}{S_{ech}} = \frac{Q}{\pi D_2^2/4} = \frac{0.005}{\pi \cdot 0.05^2/4} = 2.55\ m \cdot s^{-1}$$

Pour la perte de charge dans un coude, on applique directement la formule générale de perte de charge singulière, exprimée ici en hauteur d'eau :

$$\Delta H_{Coude} = k \cdot \frac{V_{ech}^2}{2g} = 1.5 \cdot \frac{2.55^2}{2 \cdot 9.81} = 0.50\ m$$

Pour la perte de charge linéaire dans un segment, on suit la procédure du cours. On calcule d'abord la rugosité relative de la conduite, qui vaut ici $\varepsilon_2/D_2 = 0.0001/0.05 = 0.002$. On calcule ensuite le Reynolds de l'écoulement, donné par :

$$R_e = \frac{\rho \cdot V_{ech} \cdot D_2}{\mu} = \frac{1000 \cdot 2.55 \cdot 0.05}{0.001} = 127500$$

Par lecture sur le diagramme de Moody, on constate qu'on est dans la région du régime turbulent rugueux pour lequel la perte de charge dépend à la fois de la rugosité relative et du nombre de Reynolds. On obtient la valeur du coefficient de pertes de charge, qui vaut $\lambda = 0.026$. On peut alors appliquer la formule du cours pour calculer la perte de charge dans un segment de longueur $L = 4m$, exprimée en hauteur d'eau :

$$\Delta H_{Segment} = \lambda \cdot \left(\frac{V_{ech}^2}{2g}\right)\frac{L}{D_2} = 0.026 \cdot \left(\frac{2.55^2}{2 \cdot 9.81}\right)\frac{4}{0.05} = 0.69\ m$$

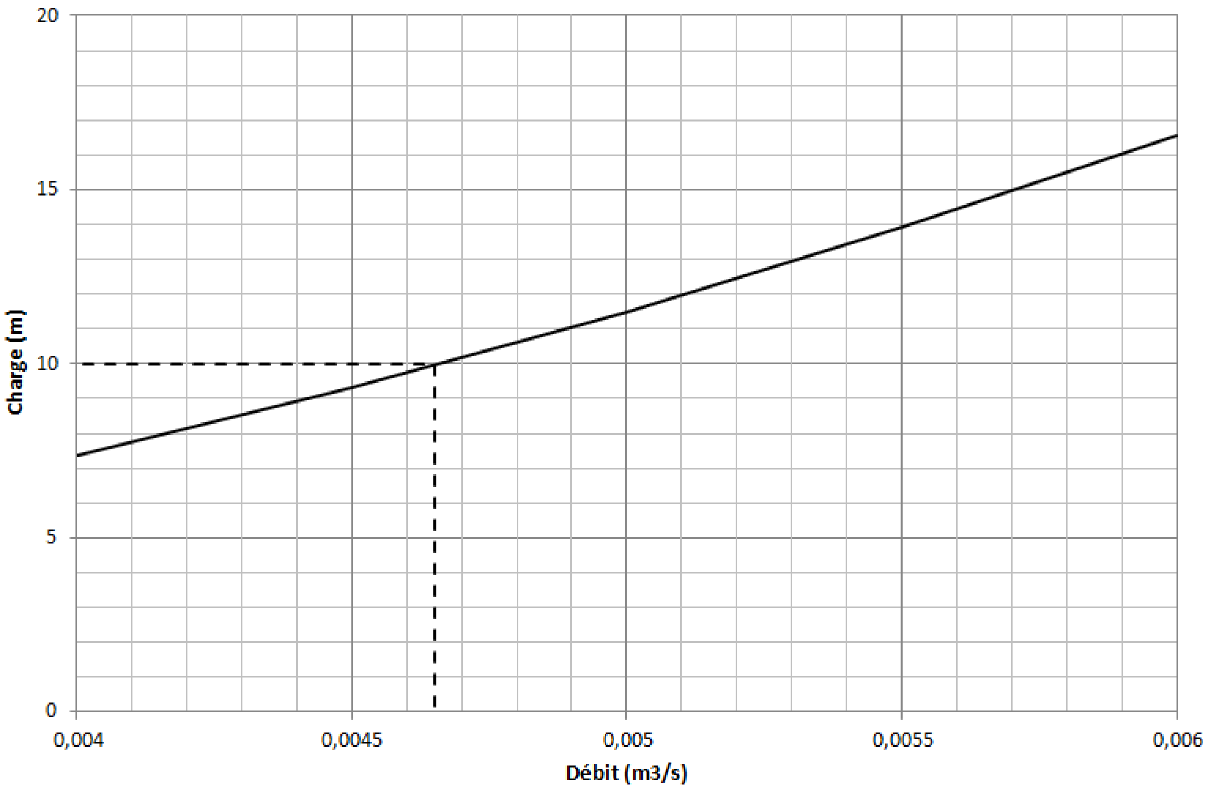
Finalement, la perte de charge totale dans l'échangeur est obtenue en sommant toutes les pertes de charges individuelles :

$$\Delta H_{Echangeur} = 10 \cdot \Delta H_{Segment} + 9 \cdot \Delta H_{Coude} = 10 \cdot 0.50 + 9 \cdot 0.69 = 11.5\ m$$

Pour différents débits, on peut effectuer à nouveau toutes ces opérations et donner le tableau suivant :

Débit (m^3/s)	0.004	0.0045	0.005	0.0055	0.006
Perte de charge (m)	7.37	9.32	11.51	13.93	16.58

Ce tableau nous permet de tracer la courbe de fonctionnement du réseau, sur la figure 2 fournie dans l'énoncé. L'écoulement permanent s'obtient quand les pertes de charge compensent exactement la différence de charge appliquée aux bornes du réseau (c'est une condition d'équilibre énergétique). Ici cette différence est forcée par l'écart de hauteur entre les réservoirs supérieur et inférieur, et vaut donc 10 mètres. Par lecture graphique, on obtient que le débit conduisant à une perte de charge totale de 10 mètres dans l'installation vaut approximativement $Q_{perm} = 0.00465\ m^3/s$, et ce débit est donc celui qui correspond au régime permanent.



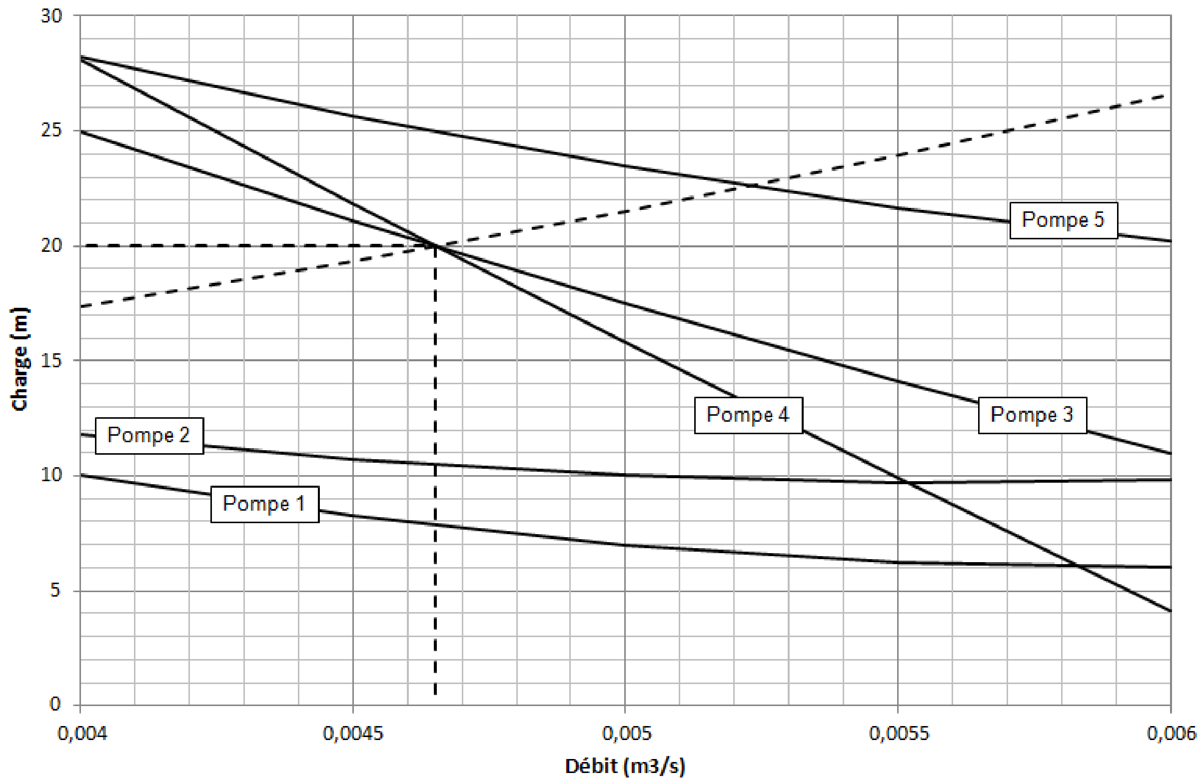
Courbe de fonctionnement du réseau (Charge/Débit)

Partie 3.

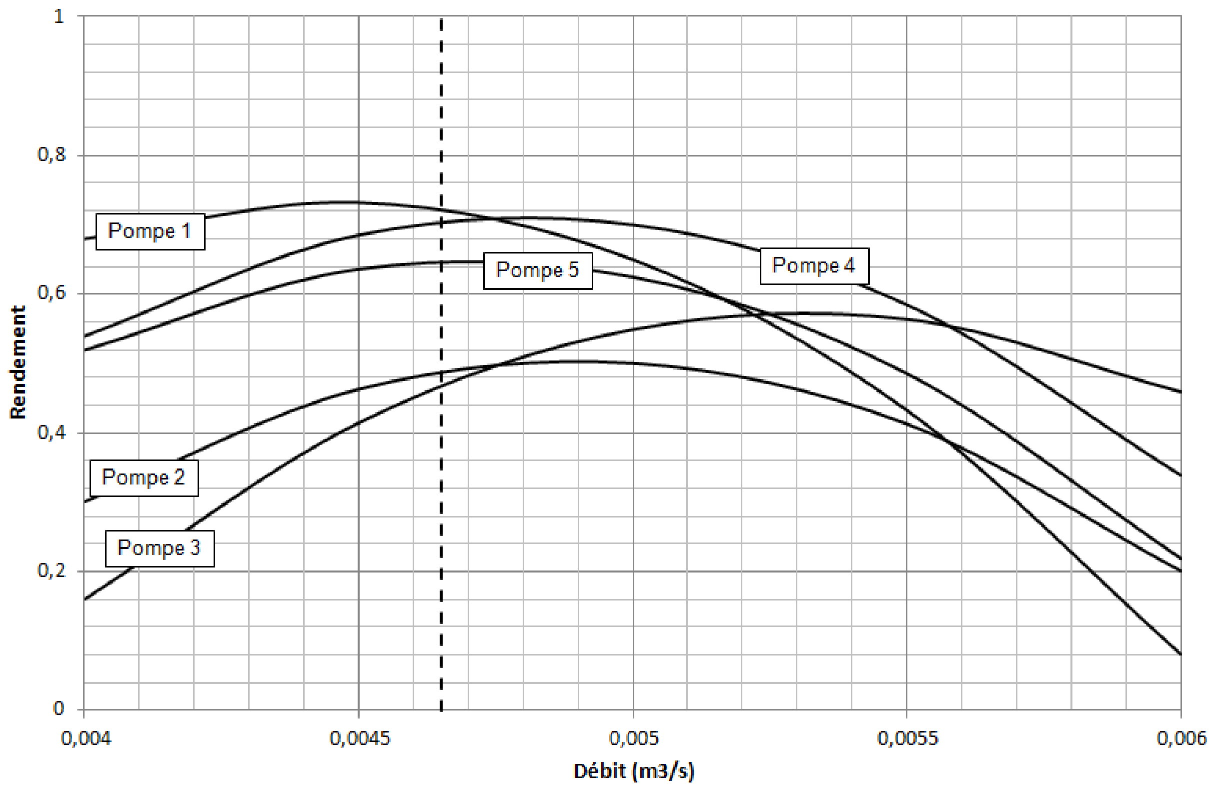
Dans cette partie, l'écoulement est identique au précédent mais dans le sens inverse. Les pertes de charge dans le réseau pour différents débits sont donc strictement égales à celles calculées dans le tableau de la partie précédente, puisque les dissipations énergétiques sont ici indépendantes de la direction de l'écoulement (il faut noter que ce ne serait pas le cas si on avait considéré des rétrécissements et/ou élargissements de section, qui auraient brisé cette symétrie). La demande en charge du réseau est égale au besoin énergétique nécessaire à l'établissement de l'écoulement. Elle tient donc compte des pertes de charge, mais aussi de la différence de potentiel que le fluide doit vaincre pour se rendre du réservoir inférieur au réservoir supérieur. Exprimée en hauteur d'eau, cette différence de potentiel vaut 10 mètres. La demande en charge du réseau (exprimée en hauteur d'eau) est donc tout simplement égale aux pertes de charge calculées à la partie précédente, plus 10 mètres. On trace la courbe correspondante sur la figure 3.

On souhaite un débit de 4.65 l/s, et on a déjà calculé à la question précédente que la perte de charge correspondant à ce débit vaut 10 mètres. On cherche donc une pompe fournissant une charge de 20 mètres d'eau pour un débit de 4.65 l/s, et la lecture graphique nous montre que les pompes 3 et 4 sont à même de fournir cette prestation.

Pour choisir entre les deux, on considère la figure 4. Pour un débit de 4.65 l/s, il apparaît que la pompe 3 a un rendement trop faible, tandis que la pompe 4 propose un rendement satisfaisant, proche de 0.75. Ce sera donc la pompe choisie pour ce projet.



Courbe de demande en charge et courbes caractéristiques des pompes disponibles



Courbes de rendement des pompes